جزوه درس سیستمهای فازی

جناب آقای دکتر جعفری

پاییز ۹٤

سر فصل ها

۱- تاریخچه پیدایش تئوری فازی (Fuzzy)

۲- مفهوم تئوری فازی و علل پیدایش و تفاوت های آن با نظریه احتمالات

۳- آشنایی با مجموعه های کلاسیک (Crisp) و قوانین حاکم بر آن کار

۴- آشنایی با مجموعه های فازی و قوانین حاکم بر آنها

۵- آشنایی با عملگرهای مجموعه های فازی

۶- مجموعه های Tنرم و Sنرم

۷- اعداد فازی

۸- معرفی اعداد فازی معروف (اعداد فازی مثلثی ، ذوزنقه ای، ...)

۹- محاسبات فازی (ریاضیات فازی)

۱۰- مفاهیم رابطه فازی

۱۱- سیستم های استنتاج فازی

۱۲- مدلسازی سیستم های فازی(SISO, MISO, MIMO)

۱۳- معرفی سیستم های استنتاج فازی یادگیرنده

۱۴- آموزش Toolbax فازی نرم افزار متلب

جلسه اول

تاریخچه منطق فازی

منطق فازی اولین بار توسط آقای لطفعلی عسگرزاده(معروف به پرفسور زاده) در سال ۱۹۶۵ مطرح شد. ایشان متولد باکو بوده و پس از جنگ جهانی به ایران مهاجرت کرده و در دانشگاه تهران در رشته مهندسی برق تحصیل نموده. وی از دانشگاه برکلی آمریکا،ارشد و دکترا را اخذ نموده است.

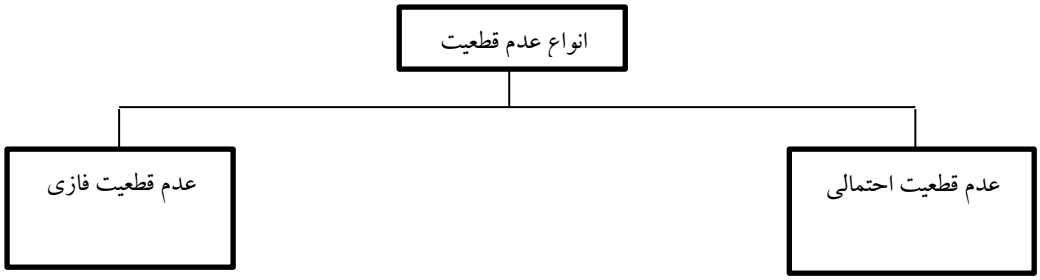
در سال ۱۹۶۵ پس از مدتها تلاش در مجله Informetion And Control چاپ نمود. پس از هفت سال در سال ۱۹۷۲ آقای سوژنو (Sugeno) اندازه فازی ، انتگرال فازی ، ... مطرح نمود ولی همچنان استقبالی از آن نشد. در سال ۱۹۷۴ شخصی بنام ابراهیم ممدانی ، کنترل فازی را در کوره های سیمان استفاده کرد. در سال ۱۹۸۰ شخصی بنام اسمیت نیز از کنترل فازی در کوره های سیمان استفاده کرد.در سال ۱۹۸۴ انجمن بین المللی سیستم های فازی (IFSA) تشکیل شد.

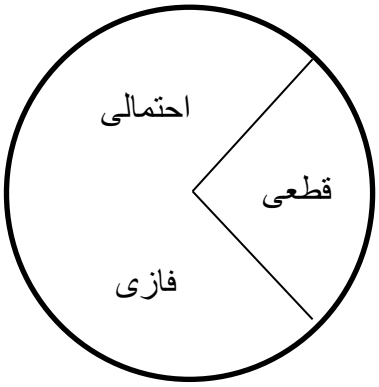
مفهوم فازی

مسائل دنیای واقعی بدلیل وجود ابهام و عدم قطعیت ، دارای ساختار پیچیده ای است. انسانها مکررا در گفتار خود از عباراتی استفاده میکنند که دارای ابهام، عدم دقت و به عبارت بهتر عدم قطعیت است.عباراتی مانند: تقریبا زیاد ، نسبتا کم ، تا حدودی ، خیلی خیلی زیاد ، ... نمونه هایی از عبارات کلامی هستند که دارای ابهام می باشند. لطفا به عبارات زیر توجه نمایید:

- علی تقریبا قدبلند است
- ضایعات خط تولید نسبتا کم است
- فشارخون بیمار تا حدودی بالاست
- دمای هوا تقریبا معتدل است

نکته: تمامی عبارات فوق دارای نوعی عدم قطعیت هستند. بعنوان مثال وقتی میگوییم "علی تقریبا قدبلند است" دقیقا نمی توانیم بگوییم قد علی در چه حد است و یا حتی در چه بازه ای است.





تفاوت نظریه فازی و احتمالات:

نظریه احتمالات : یکی از روشهای سنتی مدلسازی عدم قطعیت می باشد. از نظریه احتمالات زمانی استفاده می گردد که متغییرهای دارای عدم قطعیت در سیستم ، در واقع متغییرهای تصادفی باشند. در این حالت میتوان با تکیه بر سوابق و اطلاعات گذشته، توزیع احتمال(چگالی احتمال) را مشخص نمود و براساس آن رفتار سیستم را پیش بینی کرد. بنابراین شرط استفاده از مدلهای احتمالی، وجود سوابق اطلاعات از گذشته و ماهیت تصادفی بودن متغییرهاست.

نظریه فازی : در نظریه فازی نوعی ابهام و عدم دقت ناشی از کمبود دانش و آگاهی در سیستم وجود دارد و معمولا سوابقی از گذشته، جهت تعیین توزیع احتمال وجود ندارد. در چنین شرایطی با تکیه بر نظرات افراد خبره سعی می گردد عدم قطعیت موجود در سیستم مدلسازی گردد.

بعنوان مثال ممکن است یک فرد خبره چنین اظهار نظری داشته باشد : اگر درجه رطوبت در مرغداری نسبتا بالا بود و دمای هوا خیلی گرم بود، بهتر است فن ها به مدت حدودا ۲۰ دقیقه روشن شده سپس تقریبا ۵ دقیقه خاموش شوند.

در واقع منطق فازی در مقابل منطق ۰ و ۱ (منطق دو ارزشی یا ارسطویی) قرار می گیرد. در منطق ارسطویی، یک گزاره یا درست است یا غلط. در حالی که مطابق منطق فازی ، یک گزاره با یک درجه امکان می تواند درست ویا نادرست باشد.

به مثال زیر توجه کنید:

- منطق ارسطویی : اگر معدل دانشجویی بالای ۱۷ باشد "زرنگ" و اگر زیر ۱۷ باشد "متوسط" است. بنابراین دانشجویی که معدلش ۱۷/۵ باشد "زرنگ" و دانشجویی که معدلش ۱۶/۹۹ باشد "متوسط" است.

- منطق فازی : دانشجوی اول (معدل ۱۷/۵) باامکان ۰/۸ زرنگ و باامکان ۰/۲ متوسط است. دانشجوی دوم (معدل ۱۶/۹۹) باامکان ۰/۷۵ زرنگ و باامکان ۰/۲۵ متوسط است.

جلسه دوم

مجموعه های کلاسیک / قطعی (Crisp) : در نظریه کلاسیک یک مجموعه شامل تعدادی اجزاء است که به واسطه خصوصیات مشترکی گرد هم جمع شده اند. به مثال زیر توجه کنید :

۱- مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۵ A={ ۱،۲،۳،۴}

۲- مجموعه خطوط ممکن در فضای دو بعدی

$$B=\{ (x,y)|ax+by+c = ۰ , (a,b,c,x,y) \in R\}$$

تعریف مجموعه جهانی (U یا X) : مجموعه ای که تمام عناصر مورد مطالعه، زیر مجموعه آن هستند. (بزرگترین مجموعه ممکن)

روشهای نمایش مجموعه های کلاسیک :

۱- نمایش تمام اعضای مجموعه

۲- تعریف خصوصیات عناصر مجموعه

۳- نمایش مجموعه با استفاده از تابع مشخصه (تابع عضویت)

تعریف تابع مشخصه : تابعی ست که عناصر مجموعه جهانی را به دو مقدار ۰ یا ۱ تصویر میکند. عناصری که عضو مجموعه هستند ۱و عناصری که عضو نیستند ۰ می گیرند. $\mu_A(X): X \rightarrow \{۰،۱\}$

مثال : مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۵ را با سه روش ذکر شده نمایش دهید.

۱) A= { ۱،۲،۳،۴،۵}

۲) A= {X |X ∈ N , X < ۵}

۳)

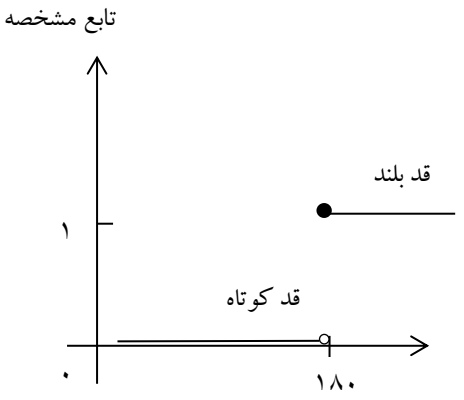
A	۱	۲	۳	٤	٥	٦	....
$\mu_A(X)$	۱	۱	۱	۱	۰	۰	....

نکته ۱: همانطور که ملاحظه میشود در مجموعه های کلاسیک یک عنصر، عضو یک مجموعه هست یا نیست.

نکته ۲: با توجه به مطالب فوق مشخص می شود که مجموعه های کلاسیک برای مفاهیمی مناسب است که بطور قطعی یا مشخص قابل تعریف است. این در حالی ست که برخی مفاهیم در دنیای واقعی بطور قطعی و با مرزهای دقیق قابل تعریف نیست. به مثال زیر توجه کنید:

۱۸۰/۰۱ قد بلند

۱۷۹/۹۹ قد کوتاه



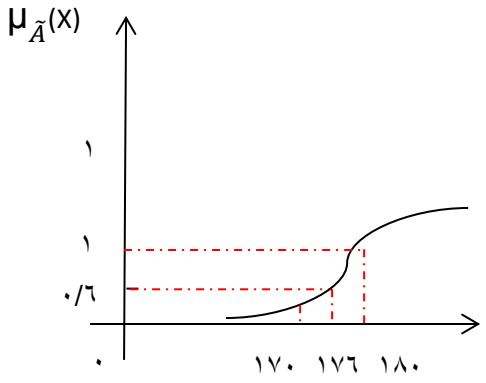
مطابق این تعریف مشخص میگردد بعنوان مثال فردی که دارای ۱۸۰/۰۱ است بلند قد و کسی که ۱۷۹/۹۹ است غیر قد بلند است در حالی که ممکن است از دید مردم هر دو قد بلند دیده شوند. برای جبران این نقیصه در بیان مجموعه ها نظریه فازی ارائه شده است.

در این نظریه، تابع مشخصه غیر از مقادیر ۰ و ۱ ، تمام مقادیر بین ۰ تا ۱ را میتوانند اختیار کنند.

نکته : معمولا در تئوری فازی بجای عبارت تابع مشخصه از عبارت تابع عضویت یا درجه عضویت استفاده می شود.

بنابراین مجموعه فازی افراد قد بلند بصورت زیر استفاده شود:

بصورت نموداری :



بصورت تابعی :

$$\mu_A(h) = \begin{cases} ۱ & h \geq ۱۸۰ \\ (۰،۱) & ۱۷۰ < h < ۱۸۰ \\ ۰ & h \leq ۱۷۰ \end{cases}$$

نکته : شکل تابع عضویت برای یک پارامتر فازی ممکن است متفاوت باشد و این را خبره ها تعیین می کنند. مثلا تعریفی از قدبلندی ممکن است بین دو خبره و یا کشورهای مختلف متفاوت باشد.

مجموعه های فازی : اگر X مجموعه ای از عناصر باشد که با X نمایش داده شود آنگاه مجموعه فازی $\widetilde{A}$ در X ، مجموعه زوج مرتب هایی به شرح زیر است:

$$\widetilde{A} = \left\{ (x, \mu_{\tilde{A}}(X)) \;\middle|\; x \in X \right\}$$

مثال : دو مجموعه فازی زیر را در نظر بگیرید و آنرا بصورت یک مجموعه فازی نمایش دهید.مجموعه آپارتمانهای راحت برحسب اتاق های خواب برای یک خانواده ۴نفره

مجموعه جهانی تعداد اتاق خواب های ممکن یک آپارتمان $X=\{۱،۲,\ldots,۱۰\}$

$\widetilde{A}=\{(۱،۰/۱),(۲،۰/۴),(۳،۰/۷),(۴،۱),(۵،۰/۶),(۶،۰/۱)\}$

(۰/۱و۱) یعنی آپارتمان تک خوابه با درجه ۰/۱ عضو مجموعه است.

عناصری که درجه عضویت آنها صفر باشد معمولا نمایش داده نمی شوند .(مانند اتاق های ۶ به بعد که نمایش داده نمی شوند) .

عملیات در مجموعه های کلاسیک :

$X \in A$: عنصر X متعلق به مجموعه A است

$X \notin A$: عنصر X متعلق به مجموعه A نیست

$A \subset B$: مجموعه A زیرمجموعه B است(هر عنصری که در A است در B هم هست)

$A = B$: مجموعه A و B مساوی هستند(هر عنصری که در A است در B هم هست و برعکس)

$A \subseteq B$: مجموعه A زیر مجموعه یا مساوی B است

$A \cup B$: اجتماع دو مجموعه A و $A \cup B = \{X \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$

$A \cap B$: اشتراک دو مجموعه A و B $A \cap B = \{X \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$

$\bar{A}$: متمم (مکمل) مجموعه عناصری که در مجموعه جهانی هست ولی در A نیست

$\bar{A} = \{X \mid X \notin A \ , \ x \in U\}$

A | B (تفاضل دو مجموعه) : شامل عناصری که در A هست ولی در B نیست

$\{A \mid B\} = A \cap \bar{B} = \{X \mid x \in A \quad \text{and} \quad x \notin B\}$

خواص مجموعه های کلاسیک (خواص ده گانه) :

۱	خاصیت متمم متمم	$\bar{\bar{A}} = A$
۲	خاصیت جابجایی	$A \cup B = B \cup A$ $\quad$ $A \cap B = B \cap A$
۳	خاصیت شرکت پذیری	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\quad$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
۴	خاصیت توزیع پذیری	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\quad$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
۵	خاصیت خود توانی	$A \cup A = A$ $\quad$ $A \cap A = A$
۶	خاصیت جذب با X و Ø	$A \cup X = X$, $A \cap X = A$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$
۷	قانون تناقض	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
۸	قانون اجتماع با مکمل	$A \cup \bar{A} = X$
۹	قوانین دمورگان	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\quad$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

در مثال زیر برخی از قوانین فوق بر اساس تابع مشخصه بیان شده است.

مثال : فرض کنید مجموعه جهانی X و مجموعه های A و B بصورت زیر باشند .

$X = \{a,b,c,d\}$

$A = \{a,c\} \xrightarrow{\text{تابع مشخصه}} \mu_A(X) = \{۱،۰،۱،۰\}$

$B = \{b,c\} \xrightarrow[\text{تابع مشخصه}]{} \mu_B(X) = \{۰،۱،۱،۰\}$

مطلوبست :

$A \cap B$, $A \cup B$, $\bar{A}$

پاسخ :

$A \cap B$: $\mu_{A \cap B}(X) = \min\{\mu_A(X), \mu_B(X)\} = \{۰،۰،۱،۰\} = \{C\}$

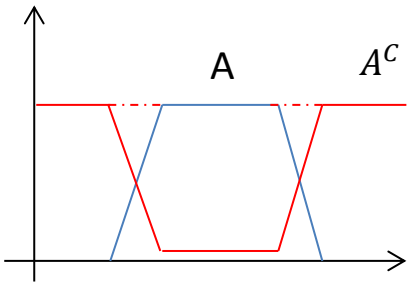
$A \cup B$: $\mu_{A \cup B}(X) = \max\{\mu_A(X), \mu_B(X)\} = \{۱،۱،۱،۰\} = \{a,b,c\}$

$\overline{A}$: $\mu_{\overline{A}}$(X) = ۱- μ_A(X) = {۰،۱،۰،۱} = {b,d}

عملیات در مجموعه های فازی :

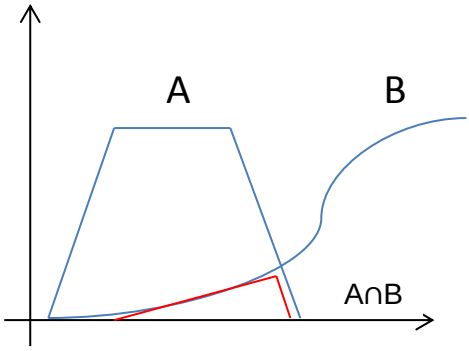
۱- متمم فازی : متمم فازی مجموعه $\widetilde{A}$ بصورت $\widetilde{A^C}$ یا $\widetilde{\overline{A}}$ نمایش داده می شود و درجه عضویت آن بصورت زیر بدست می آید :

$\mu_{\widetilde{A^C}}$(X) = ۱- $\mu_{\widetilde{A}}$(X)



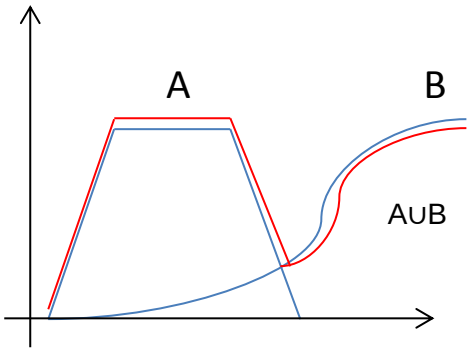
۲- اشتراک مجموعه های فازی : تابع عضویت عملگر اشتراک مجموعه های فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ بصورت زیر تعریف می شود:

$\mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}$ (X)= min { $\mu_{\widetilde{A}}$(X), $\mu_{\widetilde{B}}$(X) }



۳- اجتماع مجموعه های فازی: تابع عضویت عملگر اجتماع مجموعه های فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ بصورت زیر تعریف می شود :

$\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}$ (X)= max { $\mu_{\widetilde{A}}$(X), $\mu_{\widetilde{B}}$(X) }



جلسه سوم

خواص عملیات در مجموعه های فازی :

تمام خواص مطرح شده در مجموعه های کلاسیک (خواص نه گانه) در مجموعه های فازی نیز صادق است به استثناء قانون تناقض و اجتماع با مکمل.

$\tilde{A} \cap \tilde{A}^C \neq \emptyset$ $\qquad$ $\tilde{A} \cup \tilde{A}^C \neq X$

نکته : دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ مساوی هستند اگر : $\mu_{\tilde{A}}(X) = \mu_{\tilde{B}}(X) \ \forall \ x \in X$

مثال) فرض کنید مجموعه جهانی X و مجموعه جهانی فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ بصورت زیر تعریف شده باشند.

$X = \{۱،۲،۳،۴،۵،۶\}$

$\tilde{A} = \{(۲،۰/۳), (۳،۰/۵), (۴،۱), (۵،۰/۶), (۶،۰/۲)\}$

$\tilde{B} = \{(۱،۰/۴), (۲،۰/۸), (۳،۱), (۴،۰/۷), (۵،۰/۳)\}$

مطلوبست :

$\tilde{A}^C , \tilde{A} \cap \tilde{B} , \tilde{A} \cup \tilde{B} , \tilde{A} \cap \tilde{A}^C , \tilde{A} \cup \tilde{A}^C$

پاسخ :

$\tilde{A}^C = \{(۱ ,۱), (۲ ,۰/۷), (۳ ,۰/۵), (۵ ,۰/۴), (۶ ,۰/۸)\}$

$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(۲ ,۰/۳), (۳ ,۰/۵), (۴ ,۰/۷), (۵ ,۰/۳)\}$

$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(۱ ,۰/۴), (۲ ,۰/۸), (۳ ,۱), (۴ ,۱), (۵ ,۰/۶), (۶ ,۰/۲)\}$

$\tilde{A} \cap \tilde{A}^C = \{(۲ ,۰/۳), (۳ ,۰/۵), (۵ ,۰/۴), (۶ ,۰/۲)\}$

$\tilde{A} \cup \tilde{A}^C = \{(۱ ,۱), (۲ ,۰/۷), (۳ ,۰/۵), (۴ ,۱), (۵ ,۰/۶), (۶ ,۰/۸)\}$

تعاریف پایه :

۱) مجموعه های فازی گسسته و پیوسته : اگر مجموعه عناصر یک مجموعه فازی گسسته باشد به آن مجموعه فازی گسسته و اگر مجموعه عناصر یک مجموعه فازی پیوسته باشد به آن مجموعه فازی پیوسته گفته میشود.

نحوه نمایش مجموعه فازی گسسته و پیوسته بصورت زیر است :

مجموعه فازی گسسته :

۱) $\tilde{A} = \{ (x, \mu_{\tilde{A}}(X) | x \in X) \}$

۲) $\tilde{A} = \frac{\mu_{\tilde{A}}(X)}{x_۱} + \frac{\mu_{\tilde{A}}(X)}{x_۲} + \dots + \frac{\mu_{\tilde{A}}(X)}{x_n}$

بطور کلی : $\tilde{A} = \sum_{i=۱}^{n} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}$

مجموعه فازی پیوسته :

معمولا در خصوص مجموعه های فازی پیوسته درجه عضویت بصورت یک تابع که به آن تابع درجه عضویت گفته می شود نمایش داده می شود. نماد مجموعه های فازی پیوسته $\int$ می باشد .

$$\tilde{A} = \int_x \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x}$$

مثال) مجموعه فازی سن افراد خردسال را بصورت یک مجموعه گسسته بنویسید.

$$\tilde{A} = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۰/۸۵}{۳} + \frac{۰/۵}{۴} + \frac{۰/۳}{۵} + \frac{۰/۱}{۶}$$

مثال) فرض کنید U مجموعه جهانی عمر نرمال افراد باشد . عبارت کلامی افراد جوان بصورت یک مجموعه فازی پیوسته می تواند بصورت زیر بیان شود :

U = [۰ - ۸۵]

$$\tilde{A} = \int_{۰}^{۲۵} \frac{۱}{x} + \int_{۲۵}^{۸۵} \frac{(۱+(\frac{x-۲۵}{۲۵})^۲)^{-۱}}{x}$$

۲) مجموعه پشتیبان یک مجموعه فازی ($supp(\tilde{A})$) :

مجموعه پشتیبان یک مجموعه فازی ، یک مجموعه کلاسیک است که زیرمجموعه ای از عناصر مجموعه فازی با درجه عضویت مثبت است و بصورت زیر تعریف می شود :

$$supp(\tilde{A}) = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

۳) هسته یک مجموعه فازی ($core\ (\tilde{A})$) :

هسته یک مجموعه فازی زیرمجموعه ای از عناصر آن با درجه عضویت یک می باشد.

۴) برش $\propto$ در مجموعه فازی ($\propto$ - cut) :

برش $\propto$ در مجموعه فازی زیرمجموعه ای از عناصر آن است که درجه عضویت آنها بزرگتر یا مساوی $\propto$ است و بصورت زیر تعریف می شود :

$$A_{\propto} = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \propto\}$$

اگر برش $\propto$ بصورت زیر اصلاح شود به آن برش قوی $\propto$ گفته می شود:

$$\acute{A}_{\propto} = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \propto\}$$

۵) ارتفاع مجموعه فازی ($h(\tilde{A})$) :

ارتفاع یک مجموعه فازی برابر حداکثر درجه عضویت عناصر آن مجموعه است . بصورت زیر نمایش داده می شود :

$$h(\tilde{A}) = \max \{ \mu_{\tilde{A}}(x) \}$$

۶) مجموعه های فازی نرمال :

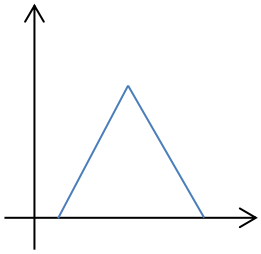
مجموعه فازی $\tilde{A}$ نرمال است اگر ارتفاع آن برابر یک باشد. در غیر اینصورت اصطلاحا زیر نرمال است.

۷) مجموعه فاز ی محدب و غیر محدب (convex fuzzy sets) :

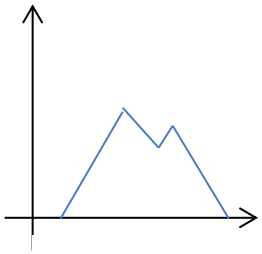
مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر داشته باشیم :

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_۱ + (۱-\lambda) x_۲) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_۱), \mu_{\tilde{A}}(x_۲)\}$$

به لحاظ مهندسی محدب بودن به صورت زیر تفسیر می گردد :



مجموعه محدب



مجموعه غیر محدب

۸) کاردینالتی مجموعه فازی ($|\tilde{A}|$) :

برای یک مجموعه فازی متناهی $\tilde{A}$ ، کاردینالتی بصورت زیر تعریف می گردد :

$$|\tilde{A}| = \sum_x \mu_{\tilde{A}}(x)$$

کاردینالتی مجموعه فازی $\tilde{A}$ بصورت زیر تعریف می شود :

$$\|\tilde{A}\| = \frac{|\tilde{A}|}{|x|}$$

نکته : کاردینالتی نسبی یک مجموعه فازی در واقع میتواند بصورت نسبت عناصر X در مجموعه فازی $\tilde{A}$ با وزن درجه عضویت آنها در $\tilde{A}$ تعریف شود .

مثال) کاردینالتی و کاردینالتی نسبی مجموعه فازی $\tilde{A}$ را محاسبه نمایید .

$$\tilde{A} = \frac{۰/۲}{۵} + \frac{۰/۶}{۷} + \frac{۱}{۹} + \frac{۰/۵}{۱۱} + \frac{۰/۱}{۱۳}$$

$X = \{۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳\}$

پاسخ :

$$|\tilde{A}| = ۰/۲+۰/۶+۱+۰/۵+۰/۱ = ۲/۴$$

$$\|\tilde{A}\| = \frac{۲/٤}{۶} = ۰/۴$$

جلسه چهارم

اعداد فازی و محاسبات روی اعداد فازی

تعریف اعداد فازی:

عدد فازی $\tilde{A}$ روی اعداد حقیقی تعریف میشود و حداقل دارای سه شرط زیر میباشد:

۱- $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی نرمال است

۲- $\tilde{A}$ یک مجموعه محدب است

۳- مجموعه پشتیبان $\tilde{A}$ محدود است

برای آشنایی با اعداد فازی مهم (استاندارد) بایستی با مهمترین توابع عضویت مورد استفاده آشنا شویم.

توابع عضویت مهم :

۱- تابع عضویت مثلثی : دارای سه پارامتر { a,b,c} می باشد و بصورت زیر تعریف می گردد :

$$\text{Trn}(x : a,b,c) = \begin{cases} ۰ & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ \frac{c-x}{c-b} & b \le x \le c \\ ۰ & x \ge c \end{cases}$$

۲- تابع عضویت ذوزنقه ای : دارای چهار پارامتر { a,b,c,d} می باشد و بصورت زیر تعریف می گردد :

$$\text{Trp}(x : a,b,c,d) = \begin{cases} ۰ & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ ۱ & b \le x \le c \\ \frac{d-x}{d-c} & c \le x \le d \\ ۰ & x > d \end{cases}$$

۳- تابع عضویت گوسی (نرمال) : دارای دو پارامتر { a , δ} می باشد و بصورت زیر تعریف می گردد :

$$\text{gsn}(x : a , \delta) = \exp\left[\frac{-(x-a)^۲}{\delta^۲}\right] = e^{\frac{-(x-a)^۲}{\delta^۲}}$$

۴- تابع عضویت زنگوله ای : دارای سه پارامتر { a ,b , δ} می باشد و بصورت زیر تعریف می گردد :

$$\text{bll}(x : a, b , \delta) = \frac{۱}{۱+\left|\frac{x-\delta}{b}\right|^{۲b}}$$

۵- تابع عضویت سیگمویدال : دارای دو پارامتر { a ,b} می باشد و بصورت زیر تعریف می گردد :

الف) افزایشی

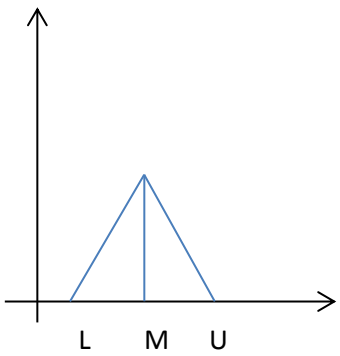
$$\text{sgn}(x : a ,b) = \frac{۱}{۱+e^{-a(x-b)}}$$

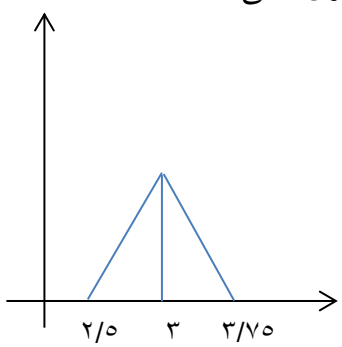
ب) کاهشی

$$\text{sgn}(x : a ,b) = \frac{۱}{۱-e^{-a(x-b)}}$$

فرمهای استاندارد اعداد فازی :

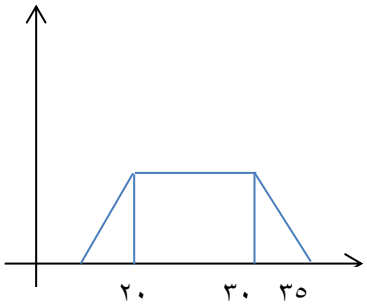
۱- اعداد فازی مثلثی (L,M,U)



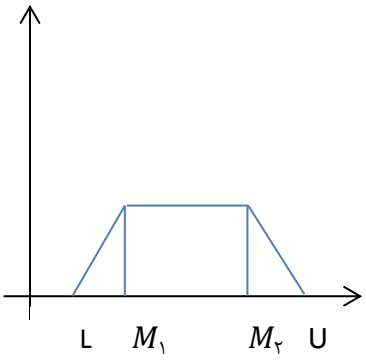


حدودا ۳

۲- اعداد فازی ذوزنقه ای (L , $M_۱$, $M_۲$,U)



حدودا بین ۲۰ تا ۳۰



عملیات ریاضی روی اعداد فازی :

تعریف : فرض کنید علامت * بیانگر هریک از ۴ عمل اصلی ریاضی باشد. دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ روی مجموعه اعداد حقیقی را در نظر بگیرید ، در این صورت :

$$\tilde{A}(x) * \tilde{B}(y) = Max \;\; Min_{z=x*y} \{ \mu(x)_{\tilde{A}} \;, \mu(y)_{\tilde{B}} \}$$

مثال) دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را در نظر بگیرید :

$$\tilde{A} = \frac{۰/۲}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۰/۷}{۴} \qquad \tilde{B} = \frac{۰/۵}{۱} + \frac{۱}{۲}$$

مطلوبست $\tilde{A} * \tilde{B}$ و $\tilde{A} + \tilde{B}$:

پاسخ :

$$\tilde{A} * \tilde{B} = \frac{min\{۰/۲ \;,۰/۵\}}{۱} + \frac{\max\{min\{۰/۲ ,۱\} ,min\{۱ ,۰/۵\}\}}{۲} + \frac{\max\{min\{۱ ,۱\} ,min\{۰/۷ ,۰/۵\}\}}{۴} + \frac{min\{۰/۷ \;,۱\}}{۸} = \frac{۰/۲}{۱} + \frac{۰/۵}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۰/۷}{۸}$$

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \frac{min\{۰/۲ \;,۰/۵\}}{۲} + \frac{\max\{min\{۰/۲ ,۱\} ,min\{۱ ,۰/۵\}\}}{۳} + \frac{min\{۱ \;,۱\}}{۴} + \frac{min\{۰/۷ \;,۰/۵\}}{۵} + \frac{min\{۰/۷ \;,۱\}}{۶} = \frac{۰/۲}{۲} + \frac{۰/۵}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۰/۵}{۵} + \frac{۰/۷}{۶}$$

مثال) فرض کنید عدد فازی تقریبا ۱ بصورت زیر تعریف شده باشد :

$$\tilde{۱} = \frac{۰/۲}{۰} + \frac{۱}{۱} + \frac{۰/۲}{۲} \qquad \tilde{۱} + \tilde{۱} = ?$$

پاسخ :

$$\tilde{۱} + \tilde{۱} = \frac{min\{۰/۲\ ,۰/۲\}}{۰} + \frac{\max\{min\{۰/۲,۱\},min\{۱\ ,۰/۲\}\}}{۱} + \frac{\max\{min\{۰/۲\ ,۰/۲\},min\{۰/۲\ ,۰/۲\},\min\{۱,۱\}}{۲} +$$
$$\frac{\max\{min\{۱\ ,۰/۲\},min\{۰/۲,۱\}\}}{۳} + \frac{min\{۰/۲\ ,۰/۲\}}{۴} = \frac{۰/۲}{۰} + \frac{۰/۲}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۰/۲}{۳} + \frac{۰/۲}{۴}$$

تمرین ۱) مجموعه های فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و مجموعه جهانی X را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید :

X = {۱۱،۱۲،۱۳،۱۴،۱۵،۱۶،۱۷،۱۸،۱۹}

$$\tilde{A} = \frac{۰/۱}{۱۲} + \frac{۰/۴}{۱۳} + \frac{۱}{۱۴} + \frac{۱}{۱۵} + \frac{۰/۳}{۱۶}$$

$$\tilde{B} = \frac{۰/۲}{۱۵} + \frac{۰/۴}{۱۶} + \frac{۰/۶}{۱۷} + \frac{۰/۸}{۱۸} + \frac{۱}{۱۹}$$

مطلوبست:

۱- $\tilde{A}^C$
۲- $\tilde{A} \cap \tilde{B}$
۳- $\tilde{A} \cup \tilde{B}$
۴- $\tilde{A} \cup \tilde{A}^C$
۵- $\tilde{A} \cap \tilde{A}^C$
۶- هسته مجموعه $\tilde{A} \cup \tilde{B}$
۷- مجموعه پشتیبان مجموعه $\tilde{A} \cap \tilde{B}$
۸- مجموعه $\tilde{A} \cup \tilde{B}_{\propto = ۰/۷}$

تمرین ۲) دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را در نظر بگیرید:

$$\tilde{A} = \frac{۰/۳}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۰/۳}{۶}$$

$$\tilde{B} = \frac{۰/۳}{۲} + \frac{۰/۸}{۳} + \frac{۱}{۴}$$

مطلوبست :

۱- $\tilde{A} * \tilde{B}$

۲- $\tilde{A}^{۲}$

۳- $\frac{\widetilde{A}}{\widetilde{B}}$

۴- $\tilde{B} - \tilde{A}$

۵- $\tilde{A} + \tilde{B}^{۲}$

جلسه پنجم

عملیات ریاضی در اعداد فازی مثلثی :

فرض کنید دو عدد فازی مثلثی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ تعریف شده باشد.آنگاه خواهیم داشت :

$\tilde{A} = (a_{۱}, a_{۲}, a_{۳})$ $\qquad$ $\tilde{B} = (b_{۱}, b_{۲}, b_{۳})$

۱) $\tilde{A} + \tilde{B} = (a_{۱} + b_{۱}, a_{۲} + b_{۲}, a_{۳} + b_{۳})$

۲) $-\tilde{B} = (-b_{۳}, -b_{۲}, -b_{۱})$

۳) $\tilde{A} - \tilde{B} = \tilde{A} + (-\tilde{B}) = (a_{۱} - b_{۳}, a_{۲} - b_{۲}, a_{۳} - b_{۱})$

۴) $\tilde{A} * \tilde{B} = (a_{۱}b_{۱}, a_{۲}b_{۲}, a_{۳}b_{۳})$

۵) $\frac{۱}{\widetilde{B}} = (\frac{۱}{b_{۳}}, \frac{۱}{b_{۲}}, \frac{۱}{b_{۱}})$

۶) $\frac{\widetilde{A}}{\widetilde{B}} = \widetilde{A} * (\frac{۱}{\widetilde{B}}) = (\frac{a_{۱}}{b_{۳}}, \frac{a_{۲}}{b_{۲}}, \frac{a_{۳}}{b_{۱}})$

رتبه بندی فازی (FR : Fuzzy Ranking)

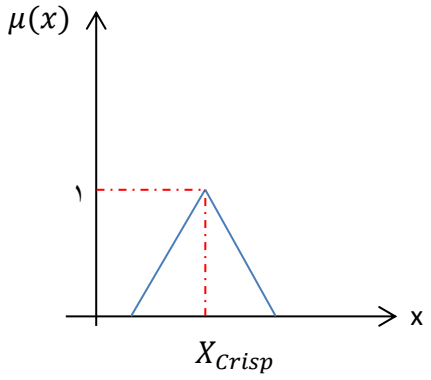
جهت رتبه بندی اعداد فازی میتوان از ۲ رویکرد قطعی (Crisp) و فازی استفاده کرد :

الف) رویکرد Crisp :

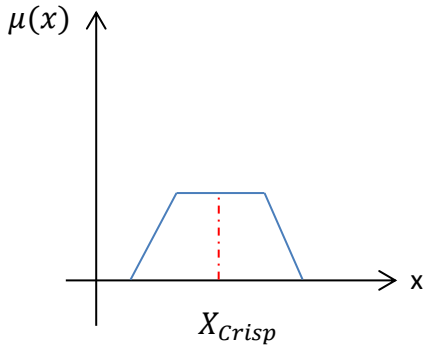
مطابق این رویکرد جهت رتبه بندی اعداد فازی (تعیین بزرگی اعداد نسبت به یکدیگر) اظهارنظر قطعی صورت می پذیرد. برای اینکار روشهای مختلفی وجود دارد که در زیر به آنها اشاره می گردد :

۱) روشهای D Fuzzy کردن / فازی زدایی : در روشهای فازی زدایی یک عدد Crisp بعنوان نماینده یک عدد یا یک مجموعه فازی انتخاب می گردد. مهمترین روشهای فازی زدایی عبارتند از :

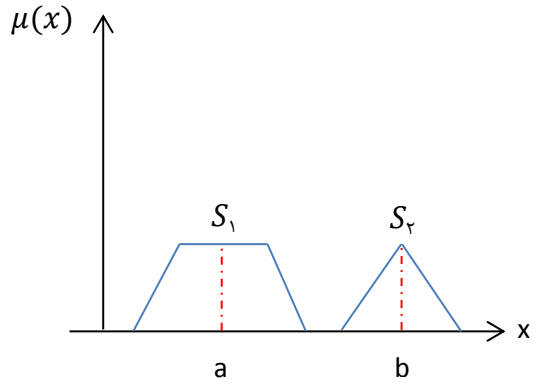
۱-۱) روش ماکزیمم درجه عضویت (Max μ)



۲-۱) وسط ناحیه Max



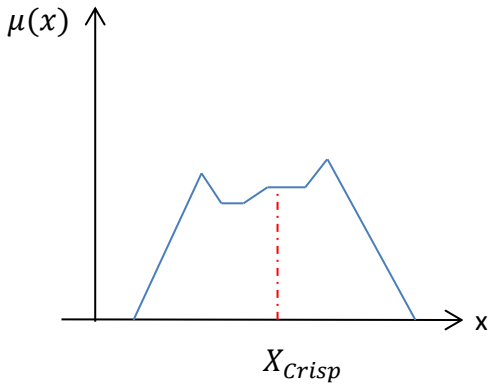
۳-۱) میانگین وزنی اشکال منفصل



$$X_{Crisp} = \frac{a\, s_۱ + \mathrm{b}\, s_۲}{s_۱ + s_۲}$$

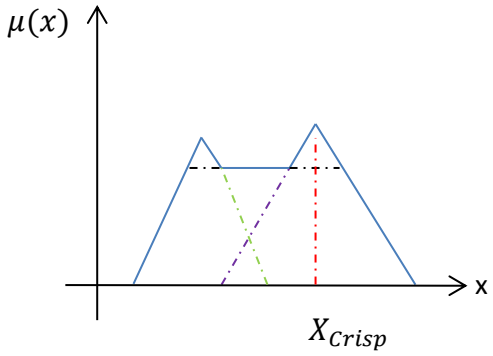
۴-۱) روش مرکز ثقل (روش centroyol)

این روش اولین بار توسط lee & lai ارائه شد

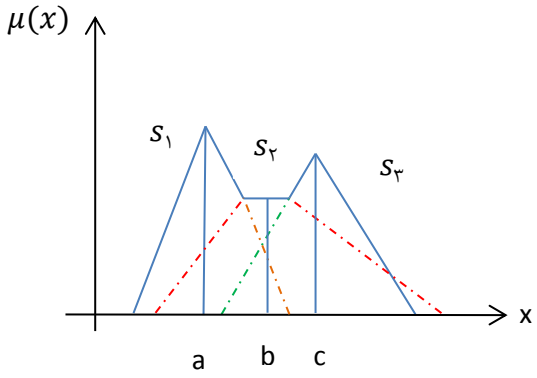


$$X_{Crisp} = \frac{\int x\, \mu(x)}{\int \mu(x)}$$

۵-۱) مرکز ثقل بزرگترین شکل

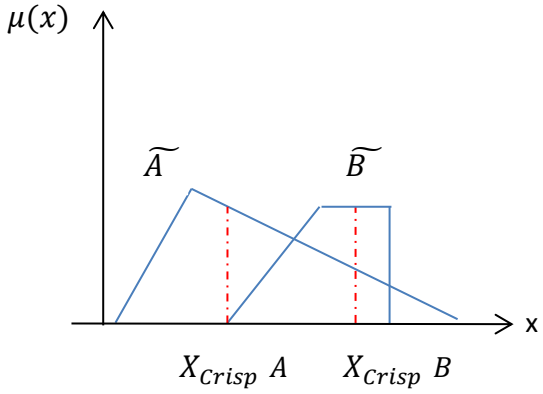


۶-۱) مرکز ثقل اشکال تودرتو



$$X_{Crisp} = \frac{a\, s_1 + b\, s_2 + c\, s_3}{s_1 + s_2 + s_3}$$

مطابق ۶ روش اشاره شد، جهت رتبه بندی اعداد فازی ابتدا با یکی از روشهای فازی زدایی اعداد مربوطه را D Fuzzy می کنیم سپس اعداد crisp را با هم مقایسه می کنیم .



$$X_{Crisp}\ B > X_{Crisp}\ A \quad \longrightarrow \quad \widetilde{B} > \widetilde{A}$$

ب) رویکرد فازی در رتبه بندی اعداد فازی (اعداد فازی مثلثی) :

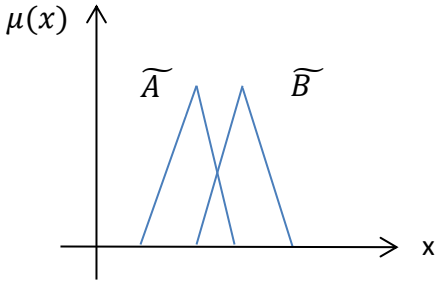
رویکردهای فازی به دو دسته تقسیم می شوند:

۱- مقایسه با رویکرد فازی ولی اظهارنظر crisp در خصوص رتبه بندی

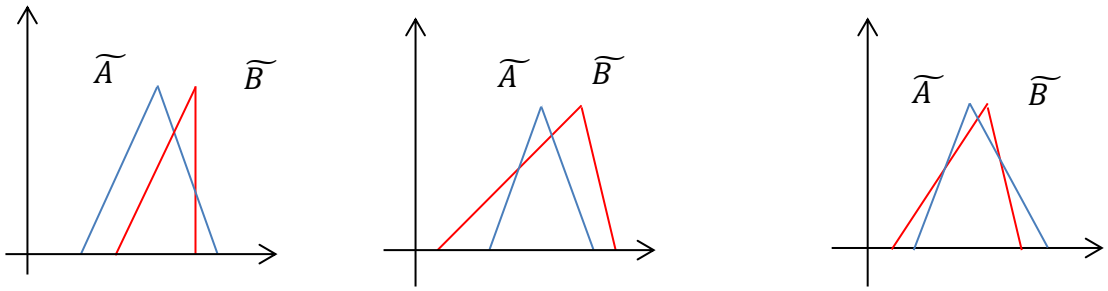
۲- مقایسه با رویکرد فازی و اظهارنظر فازی در خصوص رتبه بندی اعداد فازی

روشهای مقایسه اعداد فازی با رویکرد فازی و رتبه بندی crisp (اعداد فازی مثلثی)

در این حالت صد در صد (امکان ۱) ، $\widetilde{B} > \widetilde{A}$ است



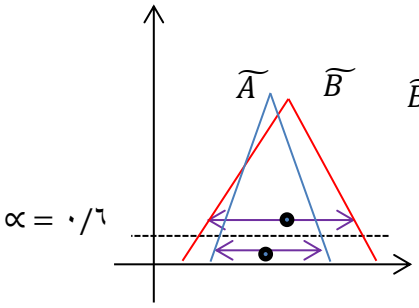
روشهای رنکینگ در حالات زیر دچار مشکل می شود:



برای رتبه بندی اعداد فازی مثلثی مطابق این رویکرد، متدهای زیر پیشنهاد میگردد :

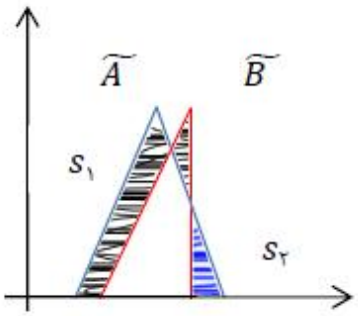
۱) استفاده از روش $\propto - cat$

چون مرکز خط مثلث B جلوتر از مرکز خط مثلث A است پس : $\widetilde{B} > \widetilde{A}$



۲) استفاده از مساحت ها

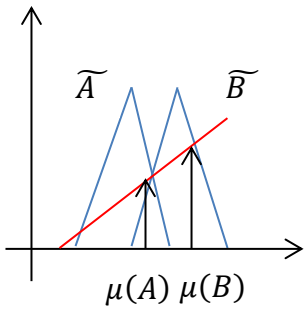
$$s_۱ > s_۲ \longrightarrow \widetilde{B} > \widetilde{A}$$



جلسه ششم

۳) استفاده از یال سمت راست

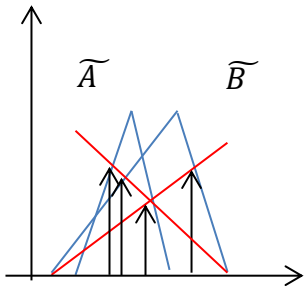
$$\mu(B) > \mu(A) \longrightarrow \widetilde{B} > \widetilde{A}$$



ایراد این رو ش در این است که فقط یال سمت راست در نظر گرفته میشود. به همین منظور روش (۴) توسعه داده است.

۴)

$$S_T = \frac{\mu^R + (۱ - \mu^L)}{۲}$$



مثال)

$$S_T^B = \frac{\mu_B^R + (۱ - \mu_B^L)}{۲} = ۰/۷$$

$$S_T^A = \frac{\mu_A^R + (۱ - \mu_A^L)}{۲} = ۰/۶$$

$$\longrightarrow \widetilde{B} > \widetilde{A}$$

روشهای رتبه بندی اعداد فازی با مقایسه فازی و رتبه بندی فازی :

بعنوان مثال می گوییم عدد $\widetilde{B}$ با امکان ۰/۷ از $\widetilde{A}$ بزرگتر است و عدد $\widetilde{A}$ با امکان ۰/۳ از $\widetilde{B}$ بزرگتر است.

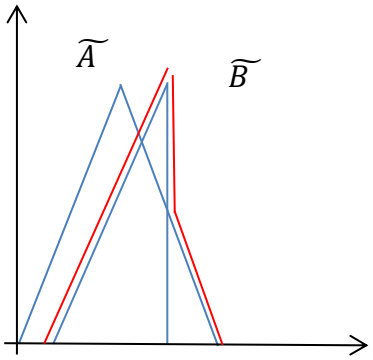
به منظور آشنایی با این نوع روشهای رتبه بندی می بایست با عملگرهای حداقل (MIN) و حداکثر(MAX) آشنا شوید.

حداقل و حداکثر فازی :

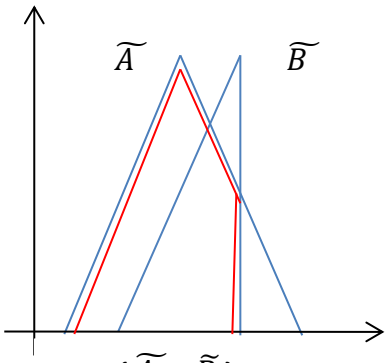
حداقل و حداکثر فازی به ترتیب با MIN و MAX نمایش داده می شود.

در منطق Crisp : max {۵،۳،۸} = ۸

در منطق فازی، *Max* یا *Min* چند عدد فاز ی لزوما یکی از آنها نیست.



Max { $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ }



Min { $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ }

الگوریتم رتبه بندی فازی (با مقایسه و رتبه بندی فازی)

۱- *MAX* دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را بیابید

۲- درجه شباهت عدد $\tilde{B}$ یا $\tilde{A}$ به *MAX* محاسبه کنید. (درجه شباهت $\tilde{B}$ به *MAX* همان درجه امکان بزرگی $\tilde{B}$ نسبت به $\tilde{A}$ است).

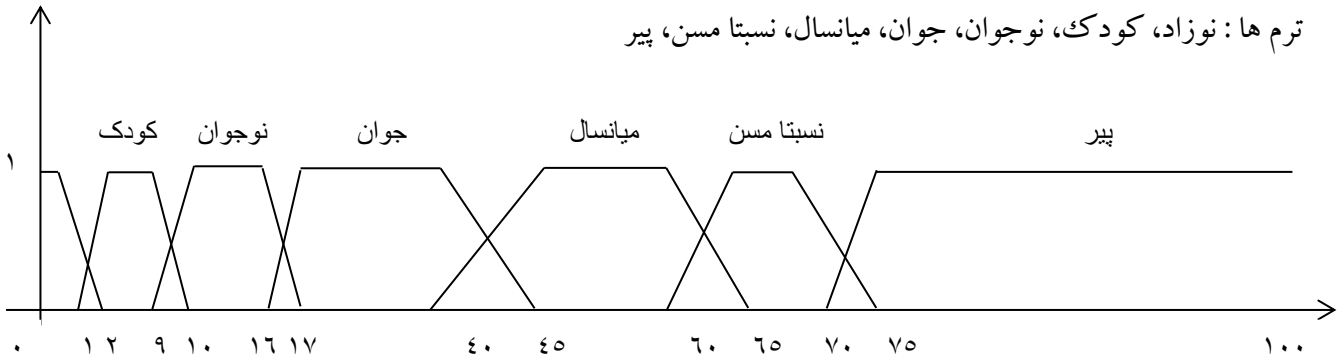
$$\text{درجه شباهت } \tilde{B} \text{ به MAX} = \frac{\text{مساحت اشغال شده توسط B}}{\text{کل مساحت MAX}}$$

متغیر کلامی (زبانی)

اعداد فازی نقش مهمی در فرمول کردن متغیرهای کلامی دارند.بسیاری از سیستمهای واقعی دارای نوعی عدم قطعیت هستند که ناشی از بکارگیری متغیرهای کلامی است. نمونه های از متغیرهای کلامی که دارای ابهام هستند عبارتند از : خیلی کوچک ،کوچک ،بزرگ ،متوسط و ... . نمونه ای از کاربرد اعداد فازی برای نمایش متغیرهای کلامی که در خصوص سن افراد بکار می رود در زیر آورده شده است:

جنس متغیر : سن

ترم ها : نوزاد، کودک، نوجوان، جوان، میانسال، نسبتا مسن، پیر



برخی از اپراتورهای محاسبه گر درجه عضویت متغیرهای کلامی :

متغیر کلامی کوچک($\tilde{A}$) بعنوان متغیر پایه در نظر بگیریم:

خیلی کوچک = $\tilde{A}^{۲} = \int \frac{\mu_A^{(x)^{۲}}}{x}$

خیلی خیلی کوچک = $\tilde{A}^{۴} = \int \frac{\mu_A^{(x)^{۴}}}{x}$

نه خیلی کوچک = ۱- $\tilde{A}^{۲} = \int \frac{۱-\mu_A^{(x)^{۲}}}{x}$

حدودا کوچک = $\sqrt{\tilde{A}} = \int \frac{\sqrt{\mu_A^{(x)}}}{x}$

متوسط = $\sqrt{۱ - \tilde{A}} = \int \frac{\sqrt{۱-\mu_A^{(x)}}}{x}$

جلسه هفتم

طراحی سیستم های استنتاج فازی (*Fuzzy Inference System*)

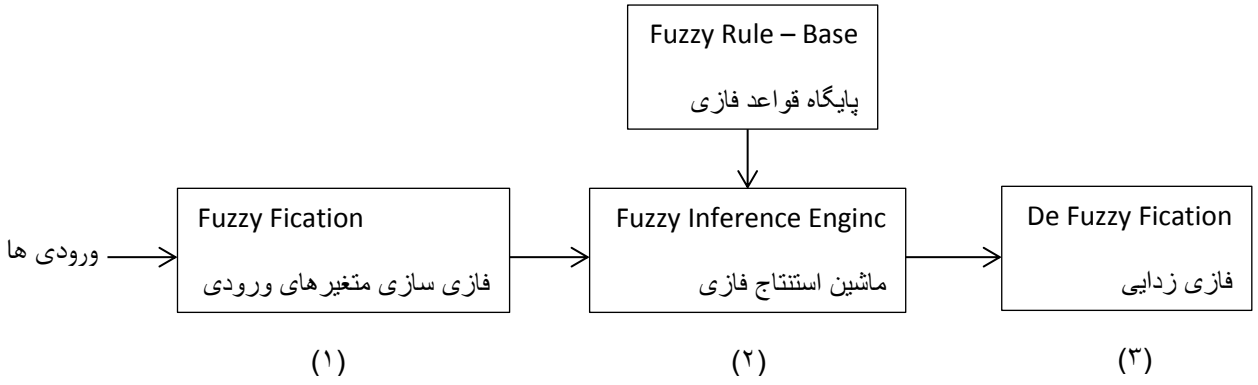
یک سیستم استنتاج مجموعه ای از قواعد ، اگر ← آنگاه ، می باشد. بطوری که با گرفتن یکسری ورودی و کنترل یکسری قواعد (مشخص شده توسط خبره ها) خروجی تولید می کند. در سیستم های استنتاج قطعی مشکلات زیر وجود دارد :

۱- برای شرایط تعریف نشده ، پاسخی ندارد

۲- خروجی های سیستم های قطعی در بسیاری از اوقات با واقعیت مطابقت ندارد. (بدلیل در نظر نگرفتن عدم قطعیت و ابهام ذاتی سیستم)

به همین دلیل در دهه گذشته استنتاج سیستم فازی بسیار مورد توجه قرار گرفته است.

ساختار یک سیستم استنتاج فازی :



(۱) فازی سازی :

فازی سازی عبارتست از تعریف :

- متغیرهای ورودی و خروجی سیستم

- تعریف ترم ها و واحد سنجش
- تعریف توابع عضویت هر متغیر

مثال) فرض کنید در یک سیستم استنتاج فازی متغیرهای ورودی I_1 و I_2 به ترتیب تغییرات قیمت طلا و دلار باشد و همچنین خروجی O تغییرات شاخص بورس تعریف شود :

تعریف ترم ها:

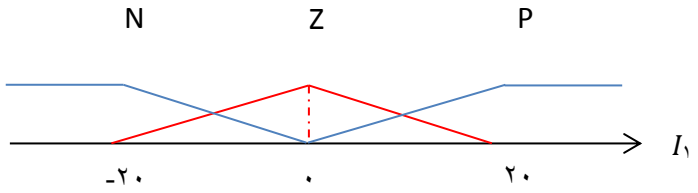
ترم های ورودی I_1 و I_2:

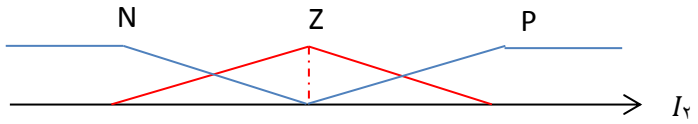
- N : کاهش (منفی)
- Z : ثابت (صفر)
- P : افزایش (مثبت)

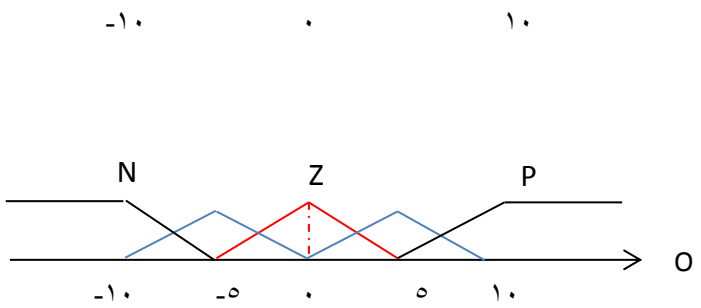
ترم های خروجی O :

- NG : منفی بزرگ
- N : منفی
- Z : ثابت (صفر)
- P : مثبت
- PG : مثبت بزرگ

تعریف توابع عضویت :







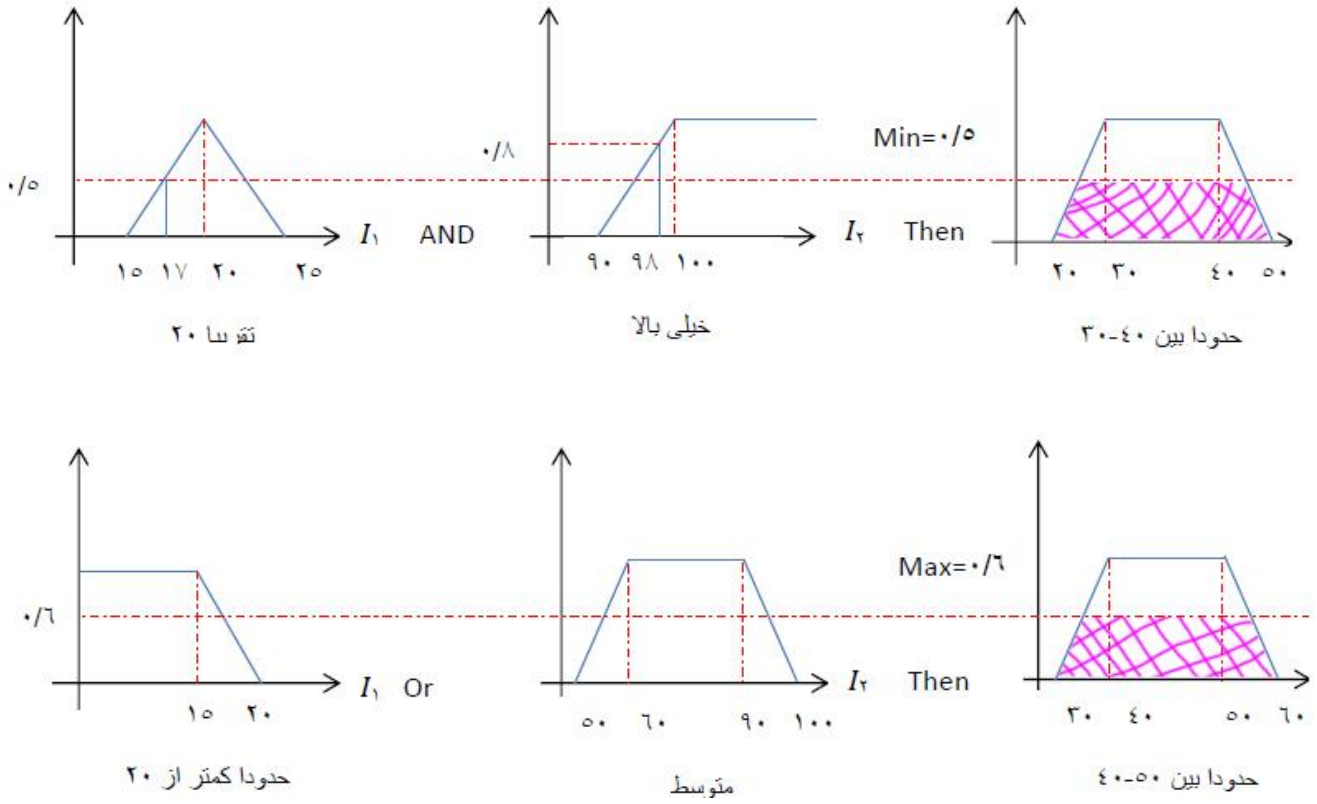
(۲) استنتاج فازی :

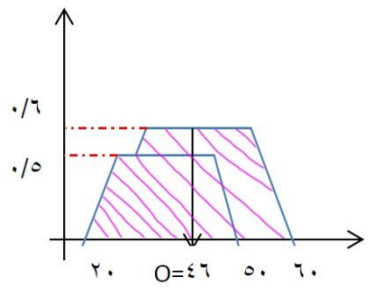
قلب یک سیستم استنتاج فازی ، پایگاه قواعد آن است. این قواعد بصورت قواعد اگر- آنگاه ، تشکیل شده است. این قواعد توسط افراد خبره بدست می آید . فرمت کلی قواعد بصورت زیر می باشد:

Rule : if $I_1 = \tilde{a}$ And/Or $I_2 = \tilde{b}$,... Then $O = \tilde{C}$

انواع سیستم های استنتاج فازی : (در اینجا فقط به یک مورد آن اشاره میکنیم)

روش Mamdani (max – min) : برای ورودی های Crisp





نکته : تعداد کل قواعد از رابطه زیر بدست می آید :

تعداد ترم های ورودی nام × .... × تعداد ترم های ورودی دوم × تعداد ترم های ورودی اول = تعداد کل قواعد

تعیین قواعد :

فرض کنید چند خبره در بازار بورس، پایگاه قواعد زیر را تعیین کنند (ماتریس قواعد) :

		$I_۱$		
		N	Z	P
$I_۲$	N	PG	P	Z
	Z	P	Z	N
	P	Z	N	NG

به عبارت دیگر قواعد بصورت زیر تعریف می گردند :

Rule ۱) if ($I_۱$ is N) And ($I_۲$ is N) Then (O is PG)

Rule ۲) if ($I_۱$ is N) And ($I_۲$ is Z) Then (O is P)

Rule ۳) if ($I_۱$ is Z) And ($I_۲$ is N) Then (O is P)

⋮

Rule ۹) if ($I_۱$ is P) And ($I_۲$ is P) Then (O is NG)

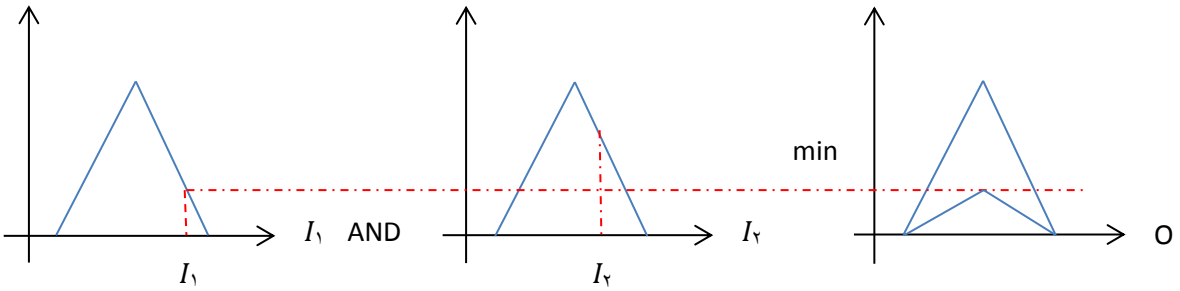
مثال) فرض کنید سه قاعده زیر را داشته باشیم. $I_۱ = -۱۸$ و $I_۲ = -۶$ باشد. مقدار خروجی را تخمین بزنید. (از سیستم استنتاجی ممدانی)

تمرین : یک سیستم فازی با سه ورودی و یک خروجی با استفاده از روش ممدانی (Max-Min) طراحی کنید و به ازای یک ورودی مشخص خروجی آن را بدست آورید.

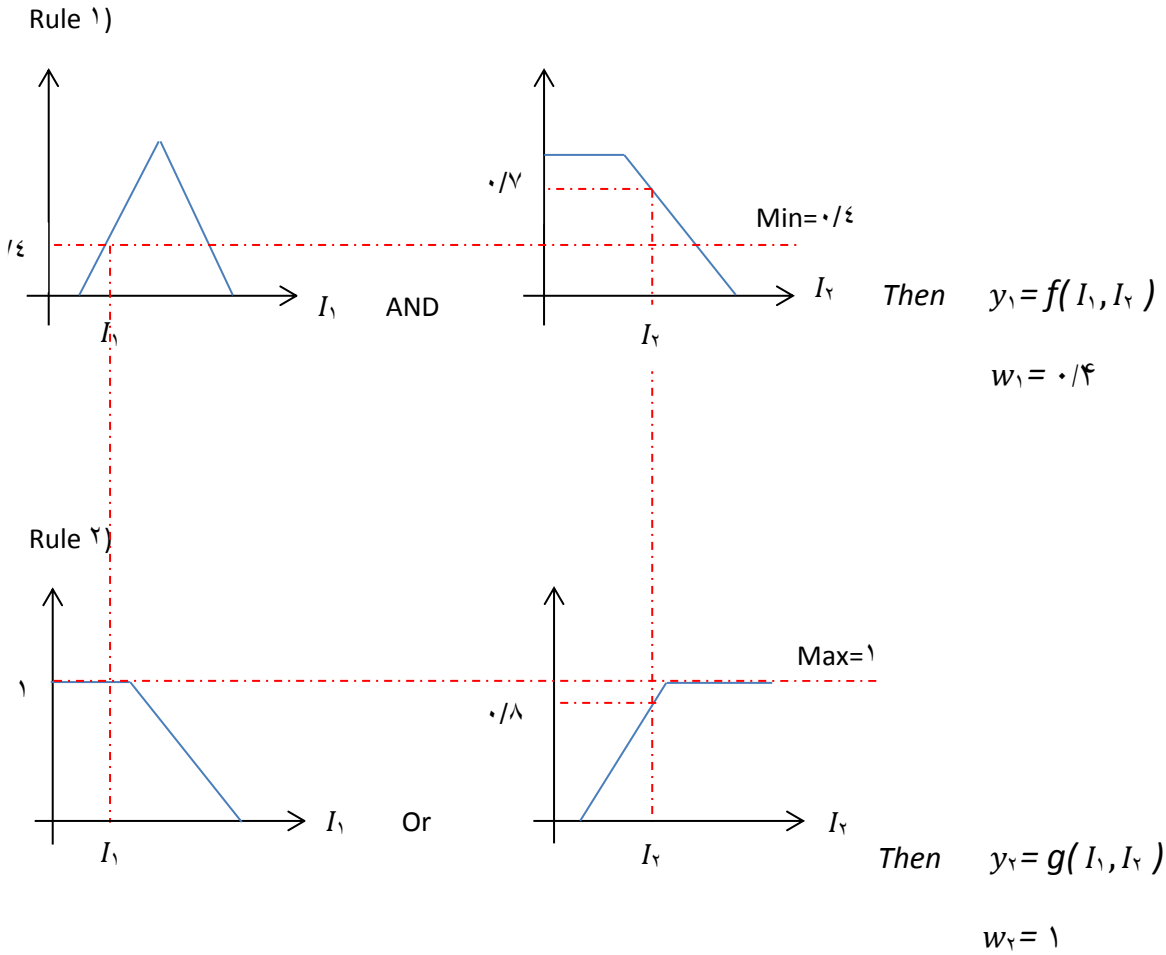
جلسه هشتم

روش Mamdani (Max-Product) **:**

در این روش بجای برش زدن شکل ، آنرا به اندازه min کوچک میکند .



روش سوژانو (Sugeno) :



$$Y = \frac{w_۱ y_۱ + w_۲ y_۲}{w_۱ + w_۲}$$

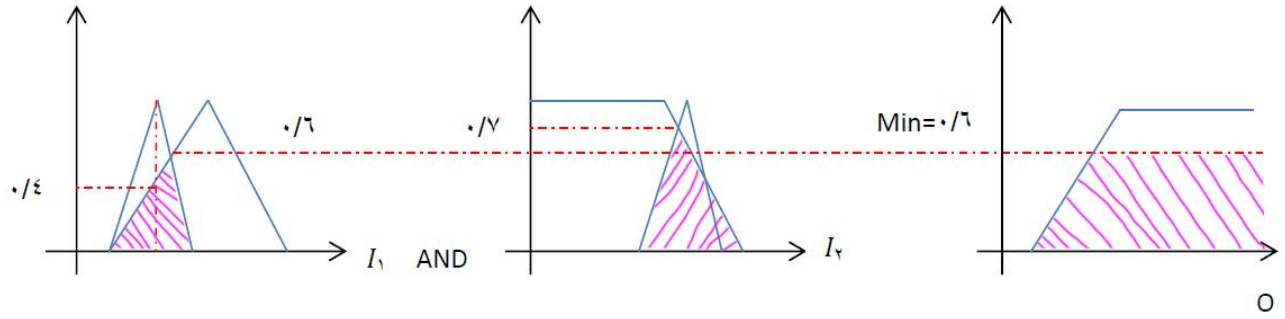
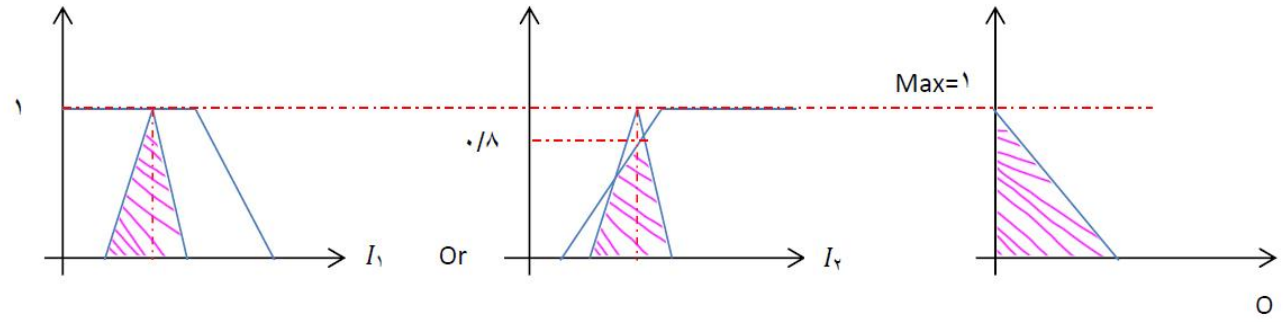
تفاوت روش ممدانی با سوژانو :

در روش ممدانی خروجی بصورت فازی است ولی در روش سوژانو اینگونه نیست بلکه یک فرمول است و مقدار آن دقیق و *crisp* می باشد و همچنین قابلیت *Defyzzy* کردن را ندارد.

وقتی که رابطه بین ورودی و خروجی را بدانیم بهتر است که از روش سوژانو استفاده کنیم.

روش ممدانی با ورودی های فازی :

Rule ۱)



Rule ۲)