«به نام خدا»

جواب سؤالات آمار و احتمال دکتری ۹۵

① گزینه ۲

کل حالات مرتب کردن این ارقام !۵ است و همواره در $\frac{۱}{۳}$ مواقع رقم ۵ قبل از ارقام ۳ و ۴ قرار خواهد گرفت بنابراین:

$۵! \times \frac{۱}{۳} = ۴۰$

---

② گزینه ۲

*روش اول: (امتحان گزینه‌ها با عددگذاری)

اگر $n=1$ باشد، رقم حاصل قطعاً بر ۱۰ بخش‌پذیر نخواهد بود یعنی $P=0$ که با امتحان گزینه‌ها فقط گزینه ۲ می‌تواند صحیح باشد.

*روش دوم: برای اینکه حاصل ضرب ارقام بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد، در بین آنها باید حداقل یک رقم زوج و یک رقم ۵ باشد

A: پیشامد وجود رقم ۵ ، B: پیشامد وجود رقم زوج

$$P(A\cap B) = 1 - P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A^c) - P(B^c) + P(A^c \cap B^c)$$

$$= 1 - \left(\frac{۸}{۹}\right)^n - \left(\frac{۵}{۹}\right)^n + \left(\frac{۴}{۹}\right)^n$$

---

③ گزینه ۱

برای کار کردن مدار، هیچ دو آتش‌نشانی نباید کنار هم باشند (سنگ آتش‌ها)

$$P = \frac{۱۰!\ \binom{۱۱}{۵}\ ۵!}{۱۵!} = \frac{\binom{۱۱}{۵}}{\frac{۱۵!}{۱۰!\,۵!}} = \frac{\binom{۱۱}{۵}}{\binom{۱۵}{۵}} = \frac{\binom{۱۱}{۶}}{\binom{۱۵}{۱۰}}$$

---

④ گزینه ۱

E: پیشامد استفاده از کلاه ایمنی

$$P(E|X=0) = \frac{P(X=0|E)P(E)}{P(X=0|E)P(E) + P(X=0|E^c)P(E^c)} = \frac{e^{-1}\times\frac{۲}{۳}}{e^{-1}\times\frac{۲}{۳} + e^{-۳}\times\frac{۱}{۳}} = \frac{۲e^{-1}}{۲e^{-1}+e^{-۳}}\times\frac{e^{۳}}{e^{۳}}$$

$$= \frac{۲e^{۲}}{۲e^{۲}+1}$$

۵) گزینه ۴

$X \sim NB(r=10, p=0.1)$
← تعداد آزمایش‌ها تا دهمین موفقیت

$Y = X + 5$
← " " " " بشرط اینکه ۵ آزمایش اول شکست باشند

$$SD(Y) = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{Var(X+5)} = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{10 \times 0.9}{(0.1)^2}} = \sqrt{900} = 30$$

---

۶) گزینه ۳

★ روش اول: با عددگذاری و امتحان گزینه‌ها به جواب می‌رسیم.

$$n=3 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{یک ۳ تا} \\ \text{صفر ۰ تا} \end{array}\right. \longrightarrow \{1,1,1\} \Rightarrow E(X)=2 \longrightarrow$$ رد گزینه‌های ۲ و ۴

$$n=4 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{یک ۳ تا} \\ \text{صفر ۱ تا} \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0,1,1,1 \\ 1,0,1,1 \\ 1,1,0,1 \\ 1,1,1,0 \end{array}\right\} \Rightarrow E(X) = 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \longrightarrow$$ رد گزینه ۱

★ روش دوم: موقعیت دومین رقم یک، با احتمال مساوی در یکی از موقعیت‌های ۲، ۳، ...، $(n-1)$ خواهد بود. بنابراین

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{n-2} + 3 \times \frac{1}{n-2} + \dots + (n-1) \times \frac{1}{n-2} = \frac{2+3+\dots+(n-1)}{(n-2)}$$

$$= \frac{\frac{n(n-1)}{2} - 1}{(n-2)} = \frac{n^2 - n - 2}{2(n-2)} = \frac{(n-2)(n+1)}{2(n-2)} = \frac{n+1}{2}$$

---

۷) گزینه ۳

درصورت سؤال منظور طراح $E(Y|X) = \gamma X$ بوده است. (چرا؟). درضمن Yها همان متغیرهای پاسخ و Xها همان متغیرهای پیش‌بینی کننده در رگرسیون هستند. در واقع

$$f(y_i) = f(y_i | X = x_i) = \frac{1}{\gamma x_i} e^{-\frac{1}{\gamma x_i} y_i} \qquad y_i > 0$$

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(y_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\gamma x_i} e^{-\frac{1}{\gamma x_i} y_i} = \gamma^{-n} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) e^{-\frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i}{x_i}\right)}$$

$$\ln L = -n \ln \gamma - \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i}{x_i}\right) \Rightarrow \frac{\partial \ln L}{\partial \gamma} = \frac{-n}{\gamma} + \frac{\sum \left(\frac{y_i}{x_i}\right)}{\gamma^2} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\gamma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i}{x_i}\right)$$

۸ گزینه ۱

فصل	بهار	تابستان	پاییز	زمستان
O_i	۵۵	۴۵	۹۰	۱۱۰
$E_i = N \cdot P_i$	$۳۰۰ \times \frac{۱}{۶}$	$۳۰۰ \times \frac{۱}{۶}$	$۳۰۰ \times \frac{۲}{۶}$	$۳۰۰ \times \frac{۲}{۶}$

$N = \sum O_i = ۳۰۰$

$$\chi^2_0 = \sum_{i=1}^{۴} \frac{(O_i - E_i)^۲}{E_i} = \frac{(۵۵-۵۰)^۲}{۵۰} + \frac{(۴۵-۵۰)^۲}{۵۰} + \frac{(۹۰-۱۰۰)^۲}{۱۰۰} + \frac{(۱۱۰-۱۰۰)^۲}{۱۰۰} = ۳$$

---

۹ گزینه ۴

می‌دانیم اگر

$$\hat{y} = a + b x_i \quad , \quad \hat{x} = a' + b' y_i$$

$$bb' = r^2 \Rightarrow ۲b' = \left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)^۲ \Rightarrow b' = \frac{۳}{۳۲}$$

در ضمن خط رگرسیون از نقطه $(\bar{x}, \bar{y})$ عبور خواهد کرد:

$$\hat{x} = a' + \frac{۳}{۳۲} y_i \xrightarrow{(۲,۵)} ۲ = a' + \frac{۳}{۳۲} y_i \Rightarrow a' = \frac{۴۹}{۳۲} \Rightarrow \hat{x} = \frac{۴۹}{۳۲} + \frac{۳}{۳۲} y_i$$

بنابراین اگر $y_i = ۱$ باشد:

$$\hat{x} = \frac{۴۹}{۳۲} + \frac{۳}{۳۲}(۱) = \frac{۵۲}{۳۲} = \frac{۱۳}{۸}$$

---

۱۰ گزینه ۲

$$S_y^۲ = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^۲ = S_{yy} = SST$$

$$\frac{SSE}{SST} = ۱ - r^2 \Rightarrow SST = \frac{SSE}{۱ - r^2} = \frac{۱۹}{۱ - /۸۱} = \frac{۱۹}{/۱۹} = ۱۰۰$$

---

۱۱ گزینه ۴

$$Z = W^C \Rightarrow \ln Z = C \ln W \Rightarrow Z' = C W'$$

در نتیجه C شیب خط رگرسیون در حالت صفر بودن عرض از مبدأ است.

$W' = \ln W$	$-۳\ln ۱۰$	$-\ln ۱۰$	۰	$۲\ln ۱۰$	$\frac{۵}{۲}\ln ۱۰$
$Z' = \ln Z$	$-\frac{۱}{۲}\ln ۱۰$	۰	$\frac{۱}{۲}\ln ۱۰$	$۲\ln ۱۰$	$۴\ln ۱۰$

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{۵} w'_i z'_i}{\sum_{i=1}^{۵} w'^۲_i}$$

$$\Rightarrow C = \frac{\frac{۳}{۲}(\ln ۱۰)^۲ + ۰ + ۰ + ۴(\ln ۱۰)^۲ + ۱۰(\ln ۱۰)^۲}{۹(\ln ۱۰)^۲ + (\ln ۱۰)^۲ + ۰ + ۴(\ln ۱۰)^۲ + \frac{۲۵}{۴}(\ln ۱۰)^۲} = \frac{\frac{۳۵}{۲}}{\frac{۸۱}{۴}} = \frac{۷۰}{۸۱} = /۸۶$$

۱۲ام تمرین

وقتی اندازه نمونه ها برابرند داریم :

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) S_i^2}{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} S_i^2}{k} = \frac{۱۸۰ + ۲۲۰ + ۲۰۰}{۳} = ۲۰۰$$

$$\bar{X}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \bar{X}_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \bar{X}_i}{k} = \frac{۱۱۰ + ۱۰۰ + ۱۲۰}{۳} = ۱۱۰$$

$$MST_r = \frac{SST_r}{k-1} = \frac{۴\left[(۱۱۰ - ۱۱۰)^۲ + (۱۰۰ - ۱۱۰)^۲ + (۱۲۰ - ۱۱۰)^۲\right]}{۳ - ۱} = \frac{۸۰۰}{۲} = ۴۰۰$$

$$\Rightarrow F_0 = \frac{MST_r}{MSE} = \frac{۴۰۰}{۲۰۰} = ۲$$

چون سؤالات رو سریع حل کردم، احتمال اشتباه محاسباتی در جوابها وجود داره ولی تا حد ممکن سعی کردم اشتباهی نداشته باشه.

موفق باشید - احسان خاکبازان