حل مساله ی $n/1//\overline{T}_w$ به روش برنامه ریزی پویا:

۱- تعیین مراحل:

- مرحله ی اول: تصمیم در مورد اینکه کدام کار در نوبت آخر توالی قرار گیرد.
- مرحله ی دوم: تصمیم در مورد اینکه دربین دوکاری که در انتهای توالی است، کدام کار جلوتر قرار گیرد.
- .....
- مرحله ی n ام: تصمیم در مورد اینکه دربین nکاری که در انتهای توالی است، کدام کار جلوتر قرار گیرد.

۲- تعیین متغیر تصمیم در هر مرحله:

- متغیر تصمیم مرحله ی اول: شماره ی کاری که در نوبت آخر توالی انجام می شود.
- متغیر تصمیم مرحله ی دوم: شماره ی کاری که در ابتدای دو کار آخر توالی انجام می شود.
- .....
- متغیر تصمیم مرحله ی n ام: شماره ی کاری که در ابتدای n کار آخر توالی انجام می شود.

۳- تعیین متغیر وضعیت در هر مرحله:

- متغیر وضعیت مرحله ی اول: تمام ترکیب های یک کاری.
- متغیر وضعیت مرحله ی دوم: تمام ترکیب های دو کاری.
- .....
- متغیر وضعیت مرحله ی n ام: تمام ترکیب های n کاری.

قرارداد :

$J(\sigma)$: مجموعه ی کارهایی که توالی شان مشخص شده است.

$J'(\sigma')$: مجموعه ی کارهایی که توالی شان مشخص نشده است.

q_J : زمان شروع کاری که در هر مرحله می تواند در ابتدای توالی آن مرحله قرار گیرد.

[۱]	[۲]		$[k-۱]$	$[k]$	$[k+۱]$		$[n]$
J'	J'	.....	J'		J	.....	J
q_J							

معادلات بازگشتی:

$g_j(C_j)$: تاخیر کار j

$$g_j(C_j)=\begin{cases}(C_j-d_j).w_j & C_j>d_j\\ ۰ & C_j\le d_j\end{cases}$$

$G(J)$: کمترین تاخیر تجمعی ممکن برای کارهای مجموعه ی J

$$\begin{cases}G(J)=\min\limits_j\left\{g_j(q_J+t_j)+G(J-\{j\})\right\} & (I)\\ G(\varnothing)=۰ & (II)\end{cases}$$

مثال: مساله ی $4/1//\overline{T}_w$ را با داده های زیر در نظر گرفته و با روش برنامه ریزی پویا آنرا حل کنید:

$Job(j)$	۱	۲	۳	۴
t_j	۱	۲	۳	۴
d_j	۲	۷	۵	۶
w_j	۱	۱	۱	۱

مرحله ی اول:

J	$\{۱\}$	$\{۲\}$	$\{۳\}$	$\{۴\}$
q_J	$۲+۳+۴=۹$	$۱+۳+۴=۸$	$۱+۲+۴=۷$	$۱+۲+۳=۶$
$j \in J$	۱	۲	۳	۴
g_j	$(C_۱-d_۱)\times w_۱$ $(۹+۱-۲)\times ۱=۸$	$(C_۲-d_۲)\times w_۲$ $(۸+۲-۷)\times ۱=۳$	$(C_۳-d_۳)\times w_۳$ $(۷+۳-۵)\times ۱=۵$	$(C_۴-d_۴)\times w_۴$ $(۶+۴-۶)\times ۱=۴$
$G(J-\{j\})$	۰	۰	۰	۰
$G(J)$	$۸+۰=۸$	$۳+۰=۳$	$۵+۰=۵$	$۴+۰=۴$

مرحله ی دوم:

J	$\{۱,۲\}$		$\{۱,۳\}$		$\{۱,۴\}$		$\{۲,۳\}$		$\{۲,۴\}$		$\{۳,۴\}$	
q_J	$۳+۴=۷$		$۲+۴=۶$		$۲+۳=۵$		$۱+۴=۵$		$۱+۳=۴$		$۱+۲=۳$	
$j \in J$	۱	۲	۱	۳	۱	۴	۲	۳	۲	۴	۳	۴
g_j	$(۸-۲)$ ۶	$(۹-۷)$ ۲	$(۷-۲)$ ۵	$(۹-۵)$ ۴	$(۶-۲)$ ۴	$(۹-۶)$ ۳	$(۷-۷)$ ۰	$(۸-۵)$ ۳	$(۶-۷)$ $\boxed{۰}$	$(۸-۶)$ ۲	$(۶-۵)$ ۱	$(۷-۶)$ ۱
$G(J-\{j$	۳	۸	۵	۸	۴	۸	۵	۳	۴	۳	۴	۵
$G(J)$	$\boxed{۹}$	۱۰	$\boxed{۱۰}$	۱۲	$\boxed{۸}$	۱۱	$\boxed{۵}$	۶	$\boxed{۴}$	۵	$\boxed{۵}$	۶

مرحله ی سوم:

J	$\{۱,۲,۳\}$			$\{۱,۲,۴\}$			$\{۱,۳,۴\}$			$\{۲,۳,۴\}$		
q_J	۴			۳			۲			۱		
$j \in J$	۱	۲	۳	۱	۲	۴	۱	۳	۴	۲	۳	۴
g_j	۳	$(۶-۷)$ $\boxed{۰}$	۲	۲	$(۵-۷)$ $\boxed{۰}$	۱	۱	$(۵-۵)$ ۰	$(۶-۶)$ ۰	$(۳-۷)$ $\boxed{۰}$	$(۴-۵)$ $\boxed{۰}$	$(۵-۶)$ $\boxed{۰}$
$G(J-\{j\})$	۵	۱۰	۹	۴	۹	۸	۵	۸	۱۰	۵	۴	۵
$G(J)$	$\boxed{۸}$	۱۰	۱۱	$\boxed{۶}$	۹	۹	$\boxed{۶}$	۸	۱۰	۵	$\boxed{۴}$	۵

مرحله ی چهارم:

J	$\{۱,۲,۳,۴\}$			
q_J	۰	۰	۰	۰
$j \in J$	۱	۲	۳	۴
g_j	$(۱-۲)$ $\boxed{۰}$	$(۲-۷)$ $\boxed{۰}$	$(۳-۵)$ $\boxed{۰}$	$(۴-۶)$ $\boxed{۰}$
$G(J-\{j\})$	۴	۶	۶	۸
$G(J)$	$\boxed{۴}$	۶	۶	۸

توالی بهینه: $۱ \to ۳ \to ۲ \to ۴$

مجموع تاخیرها در توالی بهینه: $\sum_{j=۱}^{۴} T_j = ۴$

میانگین تاخیرها در توالی بهینه: $\bar{T}^* = \frac{۱}{۴}\sum_{j=۱}^{۴} T_j = ۱$

حل مساله ی $n/1//\overline{T}_w$ به روش شاخه و حد (انشعاب و تحدید)

روش شاخه و حد دارای دو مکانیزم است:

الف) مکانیزم شاخه زنی (Branching)

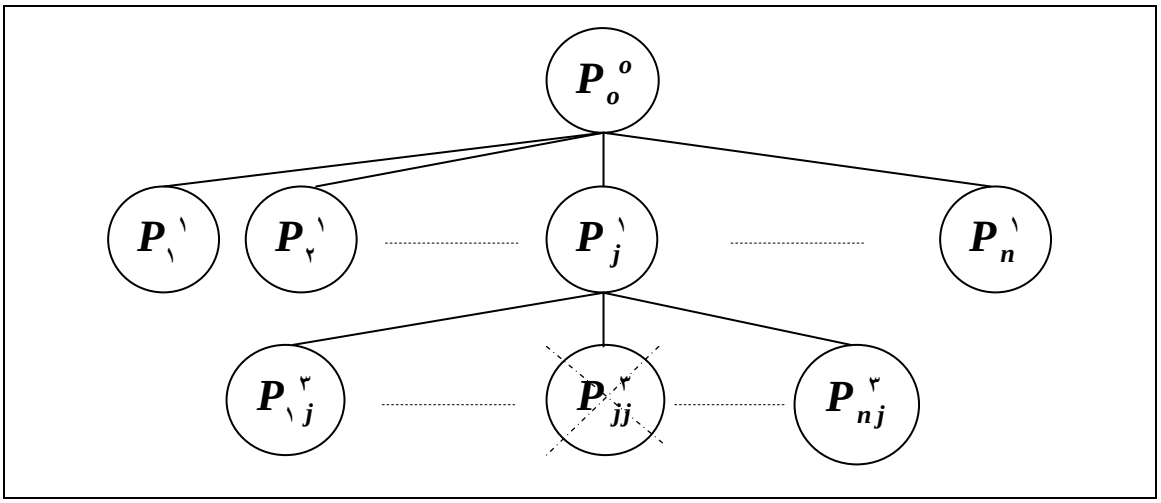
ب) مکانیزم حدگذاری (Bounding)

الف) مکانیزم شاخه زنی :

مساله ی اصلی را به اولین گره در نظر گرفته و بر حسب نوع مساله، به چند شاخه تقسیم می کنیم. در هر سطح از انشعاب باید دو اصل زیر رعایت شود:

۱- جمع حالات (شاخه های فرعی) به شاخه ی اصلی منجر شود.

۲- هر چه به سطوح پائین تر برویم، مقدار تابع هدف گره ها نسبت به شاخه ی بالایی اش بهتر نشود (بدتر شود یا ثابت باقی بماند).



روش های شاخه زنی :

۱- روش B.T: Back Tracking

۲- روش J.T: Jump Tracking

مشترکات دو روش :

هر دو روش در سطح اول شاخه زنی یکسان عمل می کنند. ابتدا شاخه زنی انجام می شود، سپس بهترین شاخه در سطح اول برای شاخه زنی مجدد انتخاب می شود.

تفاوت های بین دو روش :

۱- در روش B.T، همواره بهترین گره را از بین گره های باز در پائین ترین سطح انتخاب نموده و شاخه می زنیم تا اینکه به پائین ترین سطح انشعاب برسیم. در موقع برگشت بهترین گره را از سطح قبل برای شاخه زنی انتخاب می کنیم و تنها در صورتی مجازیم که دو سطح یا بیشتر به عقب برگردیم که گره باز شده ای در سطح قبل نداشته باشیم.

۲- در روش J.T، همواره بهترین گره را از بین گره های باز موجود در تمام سطوح (سطح یک، دو، سه و ...) انتخاب نموده و شاخه می زنیم.

تذکر: بررسی های تجربی حاکی از آن است که در مساله ی $n/۱//\overline{T}_w$، میانگین تعداد شاخه زنی های روش J.T نسبت به B.T کمتر است.

ب) مکانیزم حدگذاری :

بعد از اینکه مساله ای را به یکی از دو روش فوق شاخه زنی کردیم در پائین ترین سطح انشعاب به یک جواب موجه می رسیم. مقدار تابع هدف برای این جواب به عنوان حد بالایی در مسائل بیشینه سازی (حد پائینی در مسائل کمینه سازی) محسوب شده و بر اساس آن تمام گره های بازی که در این حد یا بدتر هستند را کور می کنیم.

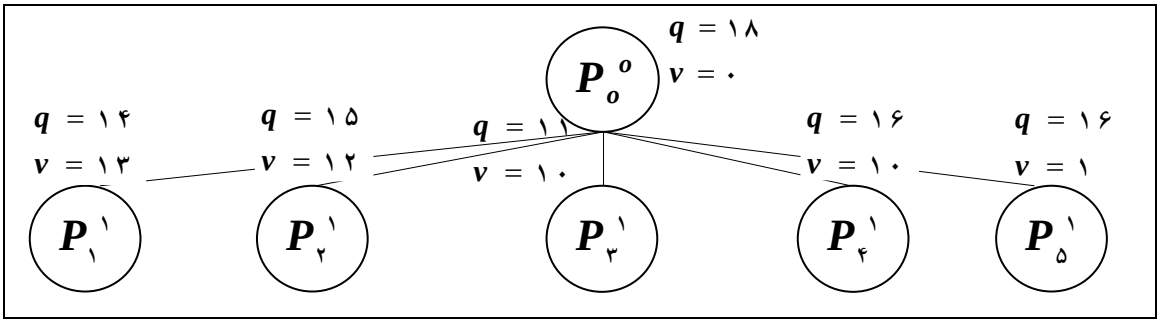
در ضمن به محض این که به جواب موجه جدیدی رسیدیم، این حد بالا را به هنگام کرده و مجددا گره های باز در این حد یا بدتر را کور می کنیم.

تذکر: در واقع روش شاخه و حد، بخشی از فضای جواب را به صورت ضمنی بررسی می کند.

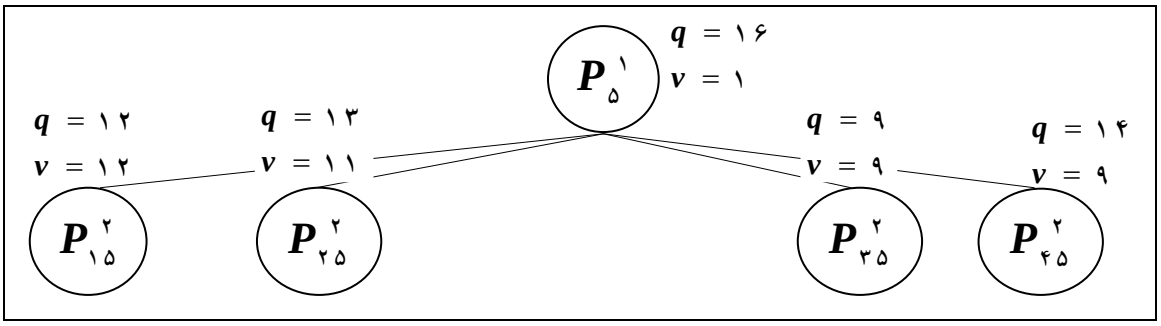
مثال: مساله ی $۵/۱//\overline{T}$ را با داده های زیر در نظر گرفته و با روش شاخه و حد آنرا حل کنید:

$Job(j)$	۱	۲	۳	۴	۵
t_j	۴	۳	۷	۲	۲
d_j	۵	۶	۸	۸	۱۷

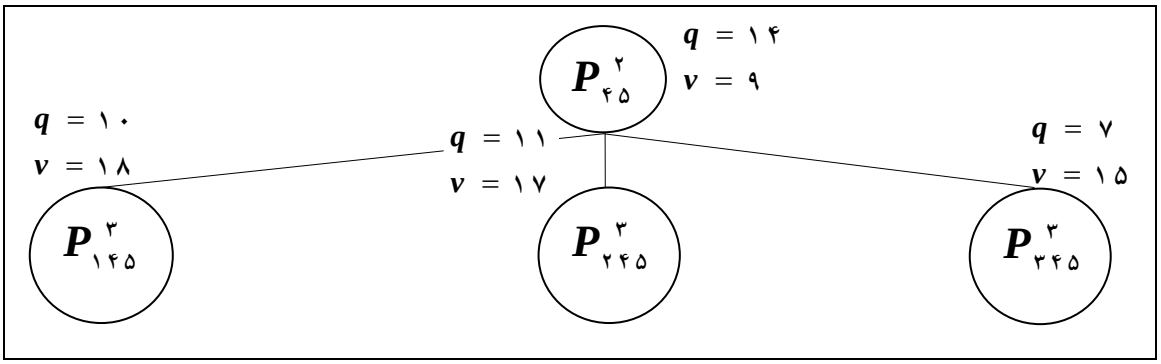
مرحله ی صفر:



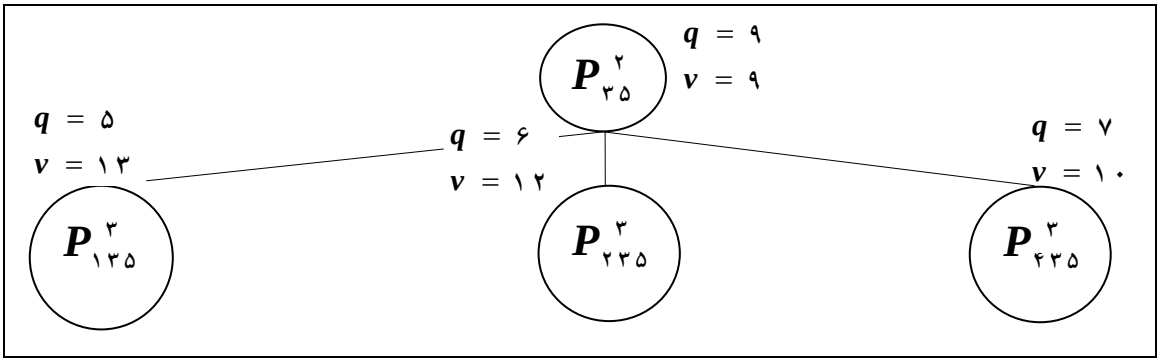
مرحله ی اول: گره $P_۵^۱$ با ارزش $v = ۱$ برای شاخه زنی انتخاب می شود:



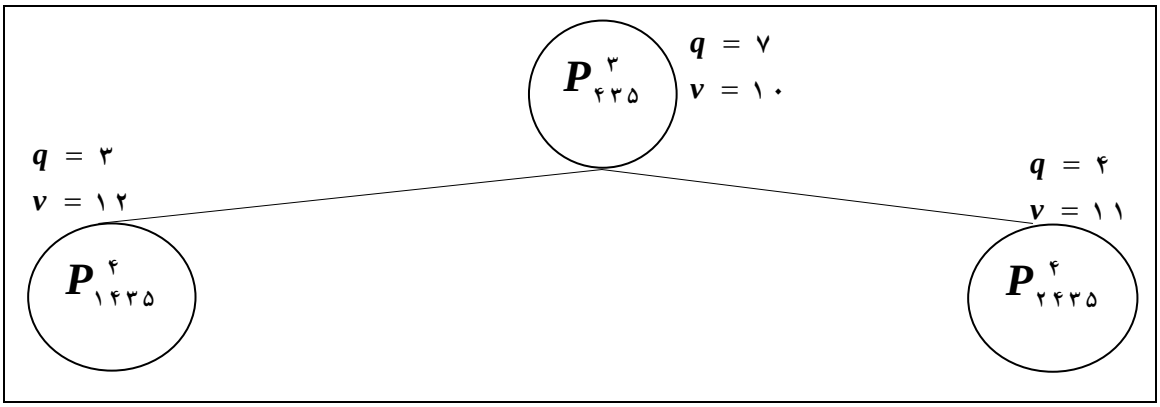
مرحله ی دوم: از بین دو گره $P_{۴۵}^۲$ و $P_{۳۵}^۲$ با ارزش $v = ۹$ به تصادف یکی برای شاخه زنی انتخاب می شود (گره $P_{۴۵}^۲$):



مرحله ی سوم: گره $P^{۲}_{۳۵}$ با ارزش $v = ۹$ برای شاخه زنی انتخاب می شود:

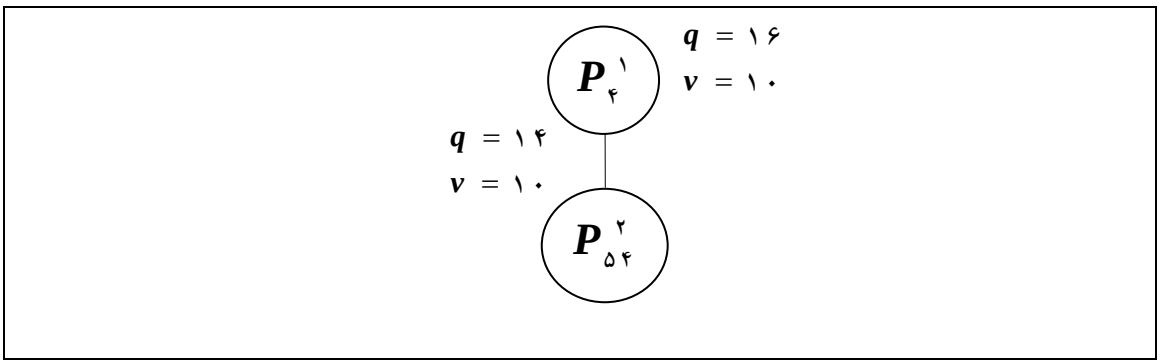


مرحله ی چهارم: از بین سه گروه $P^{۱}_{۳}$ ، $P^{۱}_{۴}$ و $P^{۳}_{۴۳۵}$ با ارزش $v = ۱۰$ گره $P^{۳}_{۴۳۵}$ برای شاخه زنی انتخاب می شود (در گره سطح پائین تر، تعداد کارهای بیشتری تخصیص یافته است):

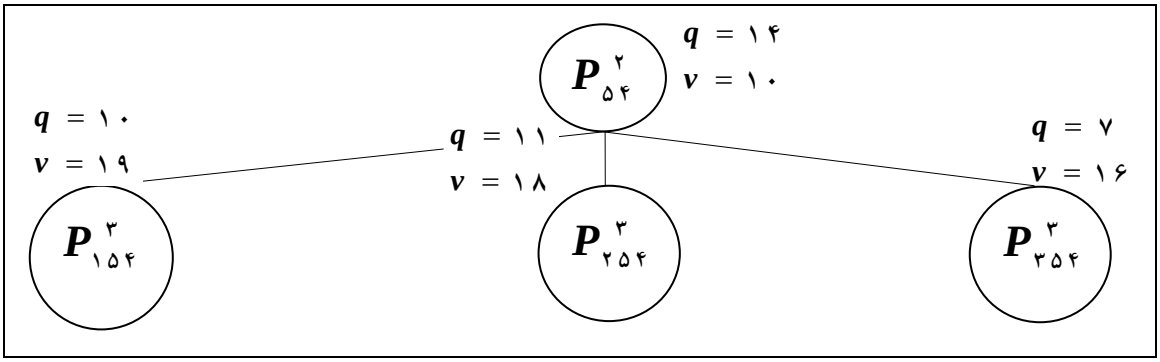


مرحله ی پنجم: از بین دو گره $P^{۱}_{۳}$ و $P^{۱}_{۴}$ با ارزش $v = ۱۰$ به تصادف یکی برای شاخه زنی انتخاب می شود (گره $P^{۱}_{۴}$):

خاصیت $(۱-۳)$ برای کار $j = ۵$ برقرار است، زیرا: $d_{۵} = ۱۷ \geq \sum_{j \in \sigma'} t_j = q = ۱۶$

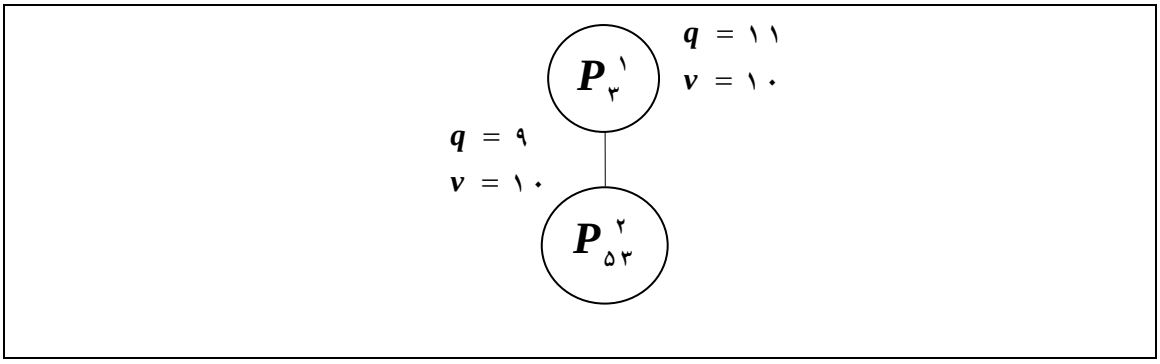


مرحله ی ششم: از بین دو گره $P^{۱}_{۳}$ و $P^{۲}_{۵۴}$ با ارزش $v = ۱۰$ گره $P^{۲}_{۵۴}$ برای شاخه زنی انتخاب می شود:

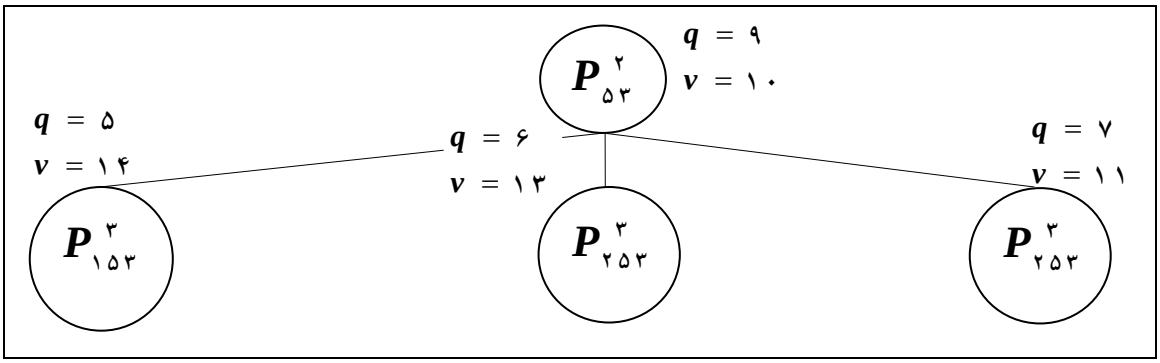


مرحله ی هفتم: گره $P^{۱}_{۳}$ با ارزش $v = ۱۰$ برای شاخه زنی انتخاب می شود:

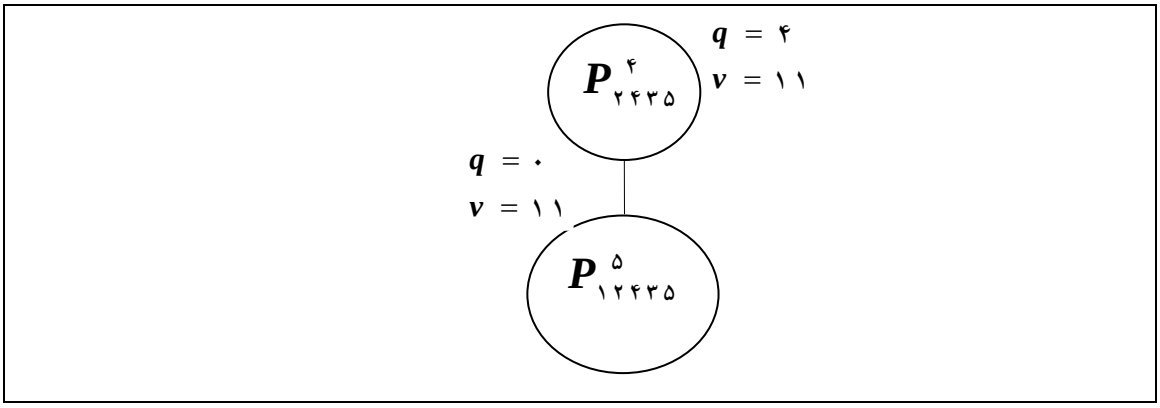
خاصیت $(۱-۳)$ برای کار $j = ۵$ برقرار است، زیرا: $d_{۵} = ۱۷ \geq \sum_{j \in \sigma'} t_j = q = ۱۱$



مرحله ی هشتم: گره $P^{۲}_{۵۳}$ با ارزش $v = ۱۰$ برای شاخه زنی انتخاب می شود:



مرحله ی نهم: از بین سه گره $P^{۴}_{۲۴۳۵}$ ، $P^{۳}_{۴۵۳}$ و $P^{۲}_{۲۵}$ با ارزش $v = ۱۱$ گره $P^{۴}_{۲۴۳۵}$ برای شاخه زنی انتخاب می شود:



مقدار ارزش $v = ۱۱$ برای تابع هدف یک حد بالا به حساب می آید و بر اساس آن تمام گره های باز موجود بسته می شود. در نتیجه همین گره در بر دارنده ی جواب بهینه است.

$$J_۱ - J_۲ - J_۴ - J_۳ - J_۵ \; ; \quad v^* = ۱۱ \; ; \quad \bar{T}^* = \frac{۱}{۵}(۱۱) = ۲.۲$$