تمرین فصل اول

۱-۱) در مورد داده های جدول زیر، الف) یک جدول فراوانی با فاصله رده ای ۰/۲۰ (با شروع از ٦/٦٠-٦/٦١ ، ٦/٦٣-٦/٦٢ و غیره) محاسبه کنید؛ ب) یک نمودار ستونی رسم کنید، و ج) یک تابع فراوانی تجمعی رسم کنید.

قطرهای سرمیخ پرچها بر حسب صدم اینچ

٦/٦٢	٦/٧٠	٦/٧٨	٦/٧٠	٦/٨٢	٦/٧٧	٦/٧٢
٦/٨٠	٦/٧٣	٦/٧٦	٦/٦٤	٦/٦٦	٦/٦٦	٦/٧٥
٦/٧٢	٦/٦٢	٦/٦٦	٦/٦٨	٦/٧٦	٦/٧٦	٦/٧٢
٦/٧٢	٦/٧٠	٦/٦٧	٦/٧٦	٦/٧٨	٦/٧٠	٦/٧٦
٦/٧٢	٦/٧٦	٦/٦٦	٦/٧٨	٦/٧٩	٦/٨١	٦/٧٤
٦/٧٦	٦/٧٦	٦/٧٠	٦/٧٦	٦/٧٨	٦/٧٠	٦/٧٤
٦/٦٦	٦/٨١	٦/٧٤	٦/٧٤	٦/٦٨	٦/٦٢	٦/٦٧
٦/٨٢	٦/٧٢	٦/٧٩	٦/٦٤	٦/٧٤	٦/٧٢	٦/٦٨
٦/٧٢	٦/٦٠	٦/٧٧	٦/٨١	٦/٧٣	٦/٧٤	٦/٨٠
٦/٧٨	٦/٦٤	٦/٧٠	٦/٧٤	٦/٧٦	٦/٧٨	٦/٦٨
	٦/٧٥	٦/٧٠	٦/٧٠	٦/٦٤	٦/٧١	٦/٧٢
	٦/٧٣	٦/٦٩	٦/٦٤	٦/٧٦	٦/٧٢	٦/٦٧
	٦/٦٦	٦/٦٦	٦/٧٣	٦/٨٤	٦/٦٦	٦/٦٧

٦/٧٢ ٦/٧٦ ٦/٧٢ ٦/٨٠ ٦/٧٢ ٦/٦٢

پاسخ:

$\begin{cases} \min = ٦/٦٠ \\ \max = ٦/٨٤ \end{cases}$ $\begin{cases} \text{تعداد داده ها (N)} = ٦٤ \\ \text{طول بازه ها} = ٠/٠٢ \end{cases} \Rightarrow$ $\text{تعداد بازه ها (n)} = \frac{6/84 - 6/60}{0/02} = 12$

i		f_i	x_i	d_i	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i x_i^٢$	$f_i d_i^٢$
١	٠/٦٠−٠/٦٢	١	٠/٦١	−٠/١٢	٠/٦١	−٠/١٢	٠/٣٧٢١	٠/٠١٤٤
٢	٠/٦٢−٠/٦٣	٤	٠/٦٣	−٠/١٠	٢/٥٢	−٠/٤	١/٥٨٧٦	٠/٠٤
٣	٠/٦٤−٠/٦٥	٥	٠/٦٥	−٠/٠٨	٣/٢٥	−٠/٤	٢/١١٢٥	٠/٠٣٢
٤	٠/٦٦−٠/٦٧	١٢	٠/٦٧	−٠/٠٦	٨/٠٤	−٠/٧٢	٥/٣٨٦٨	٠/٠٤٣٢
٥	٠/٦٨−٠/٦٩	٥	٠/٦٩	−٠/٠٤	٣/٤٥	−٠/٢	٢/٣٨٠٥	٠/٠٠٨
٦	٠/٧٠−٠/٧١	١٠	٠/٧١	−٠/٠٢	٧/١	−٠/٢	٥/٠٤١٠	٠/٠٠٤
٧	٠/٧٢−٠/٧٣	١٧	٠/٧٣	٠	١٢/٤١	٠	٩/٠٥٩٣	٠
٨	٠/٧٤−٠/٧٥	٩	٠/٧٥	٠/٠٢	٦/٧٥	٠/١٨	٥/٠٦٢٥	٠/٠٣٦
٩	٠/٧٦−٠/٧٧	١٤	٠/٧٧	٠/٠٤	١٠/٧٨	٠/٥٦	٨/٣٠٠٦	٠/٠٢٢٤
١٠	٠/٧٨−٠/٧٩	٨	٠/٧٩	٠/٠٦	٦/٣٢	٠/٤٨	٤/٩٩٢٨	٠/٠٢٨٨
١١	٠/٨٠−٠/٨١	٦	٠/٨١	٠/٠٨	٤/٨٦	٠/٤٨	٣/٩٣٦٦	٠/٣٨٤
١٢	٠/٨٢−٠/٨٤	٣	٠/٨٣	٠/١٠	٢/٤٩	٠/٣	٢/٠٦٦٧	٠/٠٣٠

i		f_i	x_i	d_i	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i x_i^۲$	$f_i d_i^۲$
$\sum$		۹۴			۶۸/۵۸	−۰/۰۴	۵۰/۲۹۹	۰/۲۶۴۸

$x_۰ = ۶/۷۳$ مبدا اختیاری

می دانیم که رابطه ای به شکل روبرو بین متغیر d_i و x_i برقرار است:

$$x_i = x_۰ + d_i = ۶/۷۳ + d_i$$

$$\bar{y} = b + a\bar{x} \qquad , \qquad \sigma_y = \sqrt{a}\,\sigma_x$$

اما توجه داشته باشید که در هنگام تحلیل نتایج حاصل از نمونه گیری به جای σ از انحراف معیار نمونه یا S به شرح زیر استفاده می شود:

$$S = \left[\sum_{i=۱}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^۲}{N-۱}\right]^{\frac{۱}{۲}} = \left[\frac{\sum_{i=۱}^{N}(x_i^۲ + \bar{x}^۲ - ۲\bar{x}x_i)}{N-۱}\right]^{\frac{۱}{۲}} = \left[\frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲ + N\bar{x}^۲ - ۲\bar{x}\sum_{i=۱}^{N} x_i}{N-۱}\right]$$

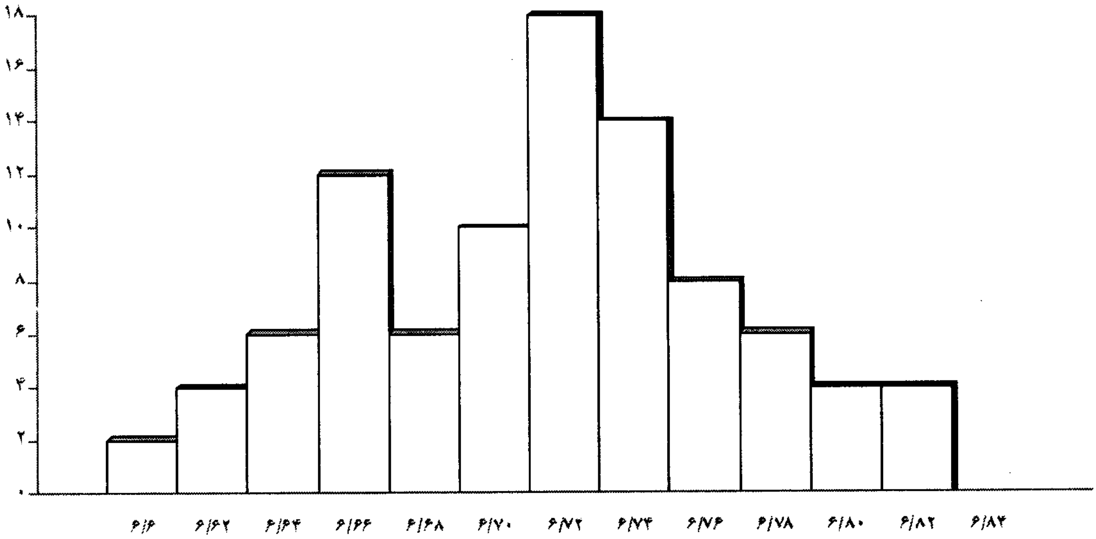
$$= \left[\frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲ + N\bar{x} - ۲N\bar{x}^۲}{N-۱}\right]^{\frac{۱}{۲}} = \left[\frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲ - N\bar{x}^۲}{N-۱}\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

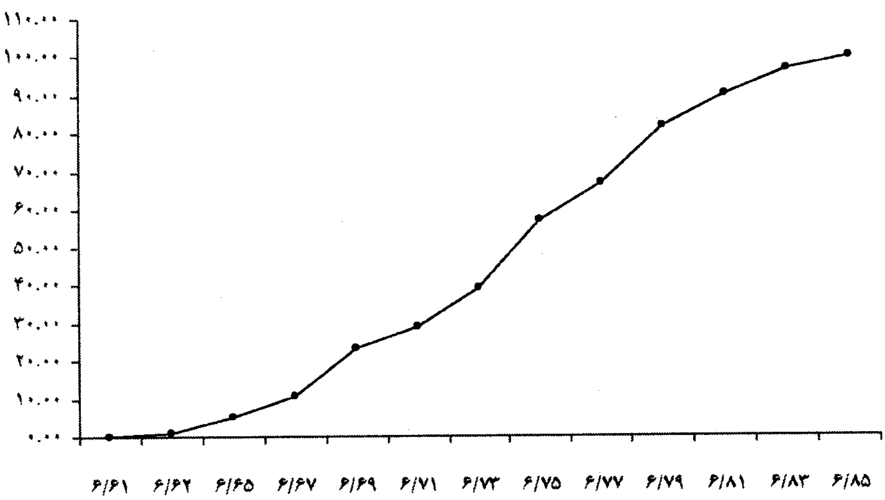
$$\bar{X} = \sum_{i=۱}^{۹۴} \frac{X_i}{۹۴} + ۶ = ۶ + \frac{۶۸/۵۸}{۹۴} = ۶ + ۰/۷۲۹۶ = ۶/۷۲۹۶$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=۱}^{۹۴} d_i}{۹۴} = \frac{-۰/۰۴}{۹۴} = -۴/۲۵۵\times۱۰^{-۴} \Rightarrow \bar{X} = X_۰ + \bar{d} = ۶/۷۳ - ۴/۲۵۵\times۱۰^{-۴} = ۶/۷۲۹۶$$

$$S_x = \left[\frac{(\sum x_i^۲ - N\bar{x}^۲)}{N-۱}\right]^{\frac{۱}{۲}} = \left[\frac{(۵۰/۲۹۹ - ۹۴\times۰/۷۲۹۶^۲)}{۹۳}\right]^{\frac{۱}{۲}} = ۰/۰۵۳۳۶$$

$$S_d=\left[\frac{\sum d_i^{۲}-N\bar{d}^{۲}}{N-۱}\right]^{\frac{۱}{۲}}=\left[\frac{۰/۲۶۴۸-۹۴\times(۴.۲۵۵\times۱۰^{-۴})^{۲}}{۹۳}\right]^{\frac{۱}{۲}}=۰/۰۵۳۳۶$$





١-٢) میانگین و انحراف معیار داده های خام مساله ١ را محاسبه کنید. میانگین و انحراف معیار داده های رده بندی شده مساله ١ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}\overline{X} = \text{٦/٧٢١٨} \\ S = \text{٠/٠٥٤٣٢}\end{cases}$$

١-٣) در تجربه سنجش درصد انقباض بر اثر خشک کردن، نتایج زیر از ٥٠ نمونه گل رس قالبگیری به دست آمده است:

١٧/١	١٧/٣	١٧/٩	٢٠/٥	١٩/٣
٢٢/٥	١٩/٥	١٧/١	١٦/٩	١٥/٨
١٧/٩	١٩/١	٢٢/٥	١٨/٥	٢٠/٧
١٧/٥	١٧/٥	١٨/٨	١٨/٧	١٨/٤
١٩/٣	١٦/٨	١٩/٤	١٢/٣	١٤/٩
١٨/٨	١٦/٣	١٧/٤	١٩/٥	١٧/٣
١٩/٠	١٩/٠	١٨/٥	٢٣/٤	٢١/٣
١٧/٤	١٨/٢	١٧/٥	١٨/٨	١٦/١
١٧/٤	١٧/٤	١٦/٥	١٨/٣	١٨/٦
٢٢/٥	١٨/٢	١٧/٥	١٦/٩	٢٠/٥

الف) این درصدها را در قالب یک جدول فراوانی با فواصل رده ای ۱ درصد با شروع از۱۲/۹–۱۲/۰ رده بندی کنید؛ ب) یک نمودار ستونی بکشید و ج) یک تابع فراوانی تجمعی رسم کنید.

۱–٤) در مساله ۳، میانگین و انحراف معیار داده های خام و رده بندی شده را محاسبه کنید.

(۱–٤ , ۱–۳

پاسخ:

i		f_i	d_i	f_id_i	$f_id_i^۲$	درصد فراوانی تجمعی	
۱	۱۲–۱۲/۹	۱	−٦	−٦	۳٦	۲	/
۲	۱۳–۱۳/۹	۰	−٥	۰	۰	۲	
۳	۱٤–۱٤/۹	۱	−٤	−٤	۱٦	٤	/
٤	۱٥–۱٥/۹	۱	−۳	−۳	۹	٦	/
٥	۱٦–۱٦/۹	٦	−۲	−۱۲	۲٤	۱۸	𝍸 /
٦	۱۷–۱۷/۹	۱٤	−۱	−۱٤	۱٤	٤٦	𝍸 𝍸 ////
۷	۱۸–۱۸/۹	۱۱	۰	۰	۰	٦۸	𝍸 𝍸 /

۸	۱۹–۱۹/۹	۸	۱	۸	۸	۸٤	卌 ///
۹	۲۰–۲۰/۹	۳	۲	٦	۱۲	۹۰	///
۱۰	۲۱–۲۱/۹	۱	۳	۳	۹	۹۲	/
۱۱	۲۲–۲۲/۹	۳	٤	۱۲	٤۸	۹۸	///
۱۲	۲۳–۲۳/۹	۱	۵	۵	۲۵	۱۰۰	/
$\sum$		۵۰		۵–	۲۰۱		

$x_{\circ} =$ مبدا اختیاری $= ۱۸/۵$

$$S_{\circ} = \left[\frac{۲۰۱ - ۵۰ \times (۰/۱)^{۲}}{٤۹}\right]^{\frac{۱}{۲}} = ۲/۰۲۵$$

$$\bar{x} = x_{\circ} + \bar{d} = ۱۸/۵ - ۰/۱ = ۱۸/٤$$

$$\begin{cases} \bar{x} = ۱۸/۳۷ \\ S = ۱/۹۹۵ \end{cases}$$

نمودار تابع توزیع تجمعی و نمودار ستونی در این مسئله نیز مانند مسئله ۱ رسم می شود.

۱–۵) اولین ۵۰ مشاهده جدول ۱/۱ (از تاریخ ٤۷/۱/۲ تا ٤۷/۱/۳۰) را گرفته و الف) یک جدول فراوانی با فاصله رده ای ۱۰۰ ساعت با شروع از ۲۰۱–۳۰۰ محاسبه کنید؛ ب) یک نمودارستونی بکشید؛ و ج) یک تابع فراوانی تجمعی رسم کنید.

۱–٦) میانگین وانحراف معیار داده های خام مساله ۵ را محاسبه کنید. میانگین و انحراف معیار داده های رده بندی شده مساله ۵ را محاسبه کنید.

۱-۷) مساله ٥ را با استفاده از ٥٠ مشاهده دوم (از ٤٧/٢/٦ تا ٤٧/٣/٦) تکرار کنید.

۱-۸) میانگین وانحراف معیار داده های خام مساله ۷ را محاسبه کنید. میانگین و انحراف معیار داده های رده بندی شده مساله ۷ را محاسبه کنید.

۱-۹) مساله ٥ را با استفاده از ٥٠ مشاهده سوم (از ٤٧/٣/١٣ تا ٤٧/٤/١٠) تکرار کنید.

۱-۱۰) میانگین و انحراف معیار داده های خام مساله ۹ را محاسبه کنید. میانگین و انحراف معیار داده های رده بندی شده مساله ۹ را محاسبه کنید.

۱-۱۱) مساله ٥ را با استفاده از ٥٠ مشاهده چهارم (از ٤٧/٤/١٧ تا ٤٧/٥/١٥) تکرار کنید.

۱-۱۲) میانگین و انحراف معیار داده های خام مساله ۱۱ را محاسبه کنید. میانگین و انحراف معیار داده های رده بندی شده مساله ۱۱ را محاسبه کنید.

پاسخ:

میانگین و انحراف معیار برای داده های خام مسائل ٥ الی ۱۲ در جدول زیر آمده است:

شماره ی مسائل / شاخصهای آماری	٥-٦	٧-٨	٩-١٠	١١-١٢
$\overline{X}$	١٠٢٧/٠٨	٩٩٥/٠٢	٩٨٨/٠٢	٩٨٢/٤
S_x	١٤٨/٣٦٢١	١٦٥/٣٢٤٨	١٣٠/٠٤٣١	١٨٣/٦٦٠٨

۱-۱۳) نشان دهید که $\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})=0$ است.

پاسخ:

$$\bar{x}=\sum_{i=۱}^{N}\frac{x_i}{N}\Rightarrow N\bar{x}=\sum_{i=۱}^{N}x_i\Rightarrow\sum_{i=۱}^{N}\bar{x}=\sum_{i=۱}^{N}x_i\Rightarrow\sum_{i=۱}^{N}(x_i-\bar{x})=۰$$

۱-۱۴) اتحاد جبری $\sum_{i=۱}^{N}(x_i-\bar{x})^۲=\sum_{i=۱}^{N}x_i^۲-N\bar{x}^۲$ را به اثبات برسانید.

پاسخ:

$$\sum_{i=۱}^{N}(x_i-\bar{x})^۲=\sum_{i=۱}^{N}(x_i^۲-۲\bar{x}x_i+\bar{x}^۲)=\sum_{i=۱}^{N}x_i^۲-۲\bar{x}\sum_{i=۱}^{N}x_i+\sum_{i=۱}^{N}\bar{x}^۲$$

$$(\sum_{i=۱}^{N}x_i=N\bar{x})=\sum_{i=۱}^{N}x_i^۲-۲N\bar{x}^۲+\sum_{i=۱}^{N}\bar{x}^۲=\sum_{i=۱}^{N}x_i^۲-N\bar{x}^۲$$

۱-۱۵) اگر همه مشاهدات موجود در جدول ۱-۱ با کم کردن ۵۰۰ ساعت از هر یک تغییر داده شوند این عمل چه تاثیری بر میانگین و انحراف معیار داده ها می گذارد؟

پاسخ:

$$y_i=ax_i+b \qquad \Rightarrow \bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{N}y_i}{N}=\sum_{i=1}^{N}(a\frac{x_i}{N}+\frac{b}{N})=a\bar{x}+b$$

$$S_y^۲=\frac{\sum_{i=۱}^{N}(y_i-\bar{y})^۲}{N-۱}=\frac{\sum_{i=۱}^{N}(ax_i+b-a\bar{x}-b)^۲}{N-۱}=\frac{a^۲\sum(x_i-\bar{x})^۲}{N-۱}$$

$$\Rightarrow S_y^2=a^2S_x^2\Rightarrow S_y=aS_x$$

$$y_i'=y_i-۵۰۰\Rightarrow\bar{y}'=\bar{y}-۵۰۰$$

$$S_y=aS_x\Rightarrow S_{y'}=S_y$$

۱-۱۶) اگر همه مشاهدات موجود در جدول ۱-۱ با تقسیم شدن هر یک به ۱۰۰ ساعت تغییر داده شوند، این عمل چه تاثیری بر میانگین وانحراف معیار داده ها می گذارد؟

پاسخ:

$$y'_i = \frac{١}{١٠٠} y_i$$

$$\overline{y}' = \frac{\sum_{i=١}^{N} y'_i}{N} = \frac{١}{١٠٠} \sum_{i=١}^{N} \frac{y_i}{N} = \frac{١}{١٠٠} \overline{y}$$

$$S_{y'} = aS_y = \frac{١}{١٠٠} S_y$$