# حل المسائل کتاب آمار مهندسی

## تالیف: لیبرمن، ترجمه: دکتر محلوجی


## مولف:

## ابوالفضل کاظمی

## مهدی عزیز محمدی

# فصل هفتم:

# آزمون فرضها در مورد دو پارامتر

**1- دو ماشین X و Y برای پر کردن بطری بکار می روند و باید بطریهای را با حجم خالص 5/65 لیتر پر کنند. فرآیند پر کردن بطریها برای ماشین X دارای انحراف معیار 0/015 لیتر و فرآیند پر کردن بطریها برای ماشین Y دارای انحراف معیار 0/016 لیتر است. پرسشی مبنی بر اینکه آیا هر دو ماشین عملکردی یکسان دارند یا نه مطرح شده است. مهندس کنترل معتقد است که به علت توافق نسبی انحراف معیارها و بعضی اقدامات دیگر، دو فرآیند به طور متوسط به میزان یکسانی بطریها را پر می کنند. خواه این مقدار، 5/65 لیتر باشد یا نباشد. از هر ماشین یک نمونه تصادفی گرفته می شود. میانگین نمونه ها را محاسبه کنید و بگویی که آیا فکر می کنید نظر مهندس کنترل درست است یا نه. سپس با سطح معنا داربودن 5 درصد آزمون را انجام دهید و تصمیمات خود را مقایسه کنید. با فرض مساوی بودن اندازه نمونه، حفظ $b = 0.05$ هر گاه تفاوت واقعی 0/03 باشد، به چند مشاهده نیاز است؟**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| X: | 5/63 | 5/61 | 5/65 | 5/65 | 5/62 |
| | 5/61 | 5/63 | 5/68 | 5/62 | 5/60 |
| | 5/68 | 5/64 | 5/66 | 5/61 | 5/68 |
| | 5/61 | 5/62 | 5/61 | 5/65 | 5/63 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Y: | 5/68 | 5/65 | 5/59 | 5/64 | 5/66 |
| | 5/61 | 5/62 | 5/64 | 5/63 | 5/61 |
| | 5/64 | 5/66 | 5/60 | 5/65 | 5/63 |
| | 5/67 | 5/64 | 5/60 | 5/60 | 5/65 |
| | 5/60 | 5/65 | 5/60 | 5/63 | 5/60 |

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$a = 0.05$$
$$s_X = 0.015$$
$$s_Y = 0.016$$
$$\begin{cases} H_0 : m_X = m_Y \\ H_1 : m_X \neq m_Y \end{cases}$$
$$b = 0.05$$
$$|m_X - m_Y| = 0.03$$

برای پاسخ به اینکه آیا دو فرآیند به طور متوسط به میزان یکسانی بطریها را پر می کنند می بایستی میانگین دو فرآیند را مورد بررسی قرار دهیم، بنابراین خواهیم داشت:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{20} X_i}{20} = \frac{112.69}{20} = 5.6345$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{j=1}^{25} Y_j}{25} = \frac{140.75}{25} = 5.63$$

با بررسی مقادیر بدست آمده برای میانگینها دو فرآیند در می یابیم نظر مهندسی کنترل درست می باشد.

از آنجا که آزمون فرض دو طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A=\left[-Z_{a/2},Z_{a/2}\right]=[-1.96,1.96]$$

$$Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n_X}+\frac{s_Y^2}{n_Y}}}=\frac{5.6345-5.63}{\sqrt{\frac{0.015^2}{20}+\frac{0.016^2}{25}}}=0.9707$$

حال از آنجا که مقدار Z در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد پس فرض صفر ( $H_0 : m_X = m_Y$ ) را می پذیریم.

با توجه به مفروضات مسئله و همچنین دوطرفه بودن آزمون فرض، تعداد مشاهدات برابر خواهد بود با:

$$n=\frac{\left(Z_{a/2}+Z_b\right)^2\left(s_X^2+s_Y^2\right)}{(m_X-m_Y)^2}=\frac{(Z_{0.025}+Z_{0.05})^2\left(0.015^2+0.016^2\right)}{(0.03)^2}=6.92\approx 7$$

$$\Rightarrow n=n_X=n_Y=7$$

**2- به منظور بررسی تفاوت درجه تاثیر دو روش کشت گندم تجربه ای اجرا می شود. ده قطعه زمین را شخم کم عمق و 15 قطعه زمین را شخم عمیق می زنیم. میانگین استحصال نمونه در هر جریب (واحد سطح معادل 0/4047 هکتار) در گروه اول 44/3 بوشل (هر بوشل گندم معادل 60 پوند است) و میانگین نمونه در گروه دوم معادل 44/7 بوشل است. فرض کنید انحراف معیار کشت کم عمق 0/6 بوشل و انحراف معیار کشت عمیق 0/8 بوشل است. در سطح معنادار بودن 1 درصد، آزمون یکسانی این دو شیوه عمل را انجام دهید. منحنی OC این آزمون را رسم کنید.**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

X: استحصال در هر جریب زمین با شخم کم عمق

Y: استحصال در هر جریب زمین با شخم عمیق

$$a=0.01$$
$$n_X=10$$
$$n_Y=15$$
$$\overline{X}=44.3$$
$$\overline{Y}=44.7$$
$$s_X=0.6$$
$$s_Y=0.8$$
$$\begin{cases}H_0: m_X=m_Y\\ H_1: m_X\neq m_Y\end{cases}$$

از آنجا که آزمون فرض دو طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A=\left[-Z_{a/2},Z_{a/2}\right]=[-Z_{0.005},Z_{0.005}]=[-2.576,2.576]$$

$$Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n_X}+\frac{s_Y^2}{n_Y}}}=\frac{44.3-44.7}{\sqrt{\frac{0.6^2}{10}+\frac{0.8^2}{15}}}=-1.426$$

حال از آنجا که مقدار Z در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد پس فرض صفر $(H_0 : m_X = m_Y)$ را می پذیریم. یعنی تفاوت چشمگیری در دو روش وجود ندارد. اما بدلیل منفی شدن مقدار آماره آزمون نتیجه می گیریم $m_X < m_Y$ یعنی میزان استحصال از هر جریب زمین با شخم عمیق از میزان استحصال از هر جریب زمین با شخم کم عمق بیشتر است.
برای رسم منحنی OC باید میزان احتمال $b$ (احتمال پذیرفتن فرض صفر درحالی که این فرض غلط می باشد) را محاسبه نماییم، بنابراین خواهیم داشت:

$$b = P\left(\frac{\left|\overline{X}-\overline{Y}\right|}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n_X}+\frac{s_Y^2}{n_Y}}} \le Z_{0.005} \mid m_X - m_Y \ne 0\right) = P\left(\frac{\left|\overline{X}-\overline{Y}\right|}{\sqrt{\frac{0.6^2}{10}+\frac{0.8^2}{15}}} \le 2.576 \mid m_X - m_Y = m \ne 0\right)$$

$$\Rightarrow b = P\left(-2.576-(m_X - m_Y) \le Z \le 2.576-(m_X-m_Y)\right)$$

3- **نوع جدید از مهمات برای آزمایش ارائه شده بود. طی یک ترتیب تصادفی، بیست بار از مهمات مورد استفاده قبلی و ده بار از مهمات جدید شلیک شد. میانگین نمونه فشار لوله مهمات مورد استفاده قبلی 41900psi و میانگین نمونه فشار لوله مهمات آزمایشی 44200psi بود. انحراف معیار مهمات مورد استفاده قبلی و آزمایشی معلوم و معادل 2050psi بود. الف) به ازای مقدار 1 درصد برای سطح معنادار بودن، فرض یکسان بودن فشار لوله برای دو نوع مهمات را آزمایش کنید. ب) درصورت بکارگیری شیوه بند الف چه تفاوتی در امید ریاضی فشار لوله ها با احتمال 0/90 کشف خواهد شد؟**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

X: فشار لوله مهمات جدید

Y: فشار لوله مهمات مورد استفاده قبلی

$$a = 0.01$$
$$n_X = 10$$
$$n_Y = 20$$
$$\overline{X} = 44200$$
$$\overline{Y} = 41900$$
$$s_X = 2050$$
$$s_Y = 2050$$
$$\begin{cases} H_0 : m_X = m_Y \\ H_1 : m_X \ne m_Y \end{cases}$$

الف)از آنجا که آزمون فرض دو طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A = \left[-Z_{a/2}, Z_{a/2}\right] = \left[-Z_{0.005}, Z_{0.005}\right] = \left[-2.576, 2.576\right]$$

$$Z = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n_X}+\frac{s_Y^2}{n_Y}}} = \frac{44200-41900}{\sqrt{\frac{2050^2}{10}+\frac{2050^2}{20}}} = 2.8969$$

حال از آنجا که مقدار Z در داخل ناحیه پذیرش قرار ندارد پس فرض صفر $(H_0 : m_X = m_Y)$ را نمی پذیریم. یعنی فشار لوله در دو نوع مهمات با هم برابر نمی باشد. اما بدلیل مثبت شدن مقدار آماره آزمون نتیجه می گیریم $m_X > m_Y$ یعنی فشار لوله مهمات جدید از فشار لوله مهمات مورد استفاده قبلی بیشتر است.

ب)از آنجا که در مفروضات این قسمت احتمال کشف با 0/90 ذکر شده است در نتیجه در می یابیم می بایستی $1-b = 0.9$ می باشد، در نتیجه خواهیم داشت:

$$1-b = 0.9 \Rightarrow b = 0.1$$

$$b = P\left(\frac{\left|\overline{X}-\overline{Y}\right|}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n_X}+\frac{s_Y^2}{n_Y}}} \le Z_{0.005} \mid m_X - m_Y \ne 0\right) = 0.1 \Rightarrow P\left(\frac{\left|\overline{X}-\overline{Y}\right|}{\sqrt{\frac{2050^2}{10}+\frac{2050^2}{20}}} \le 2.576 \mid m_X - m_Y = m \ne 0\right)$$

$$\Rightarrow b = P\left(-2.576 \le \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{2050^2}{10}+\frac{2050^2}{20}}} \le 2.576 \mid m_X - m_Y = m \ne 0\right) = 0.1$$

$$\Rightarrow b = P\left(-2.576 - \frac{m}{2050\sqrt{0.15}} \le Z \le 2.576 - \frac{m}{2050\sqrt{0.15}}\right) = 0.1$$

$$\Rightarrow b = P\left(Z \le 2.576 - \frac{m}{2050\sqrt{0.15}}\right) \approx 0.1 \Rightarrow b = P\left(Z \ge \frac{m}{2050\sqrt{0.15}} - 2.576\right) \approx 0.1$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2050\sqrt{0.15}} - 2.576 = Z_{0.1} \Rightarrow \frac{m}{2050\sqrt{0.15}} - 2.576 = 1.28 \Rightarrow m \approx 3062$$

حال از آنجا که $m_X - m_Y = m$ خواهیم داشت:

$$\mathrm{E}(X-Y) = \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y) = m_X - m_Y = m \approx 3062$$

توجه داشته باشید در حل بالا از آنجا که مقدار $P\left(-2.576 - \frac{m}{2050\sqrt{0.15}} \le Z\right)$ بسیار کوچک می باشد از آن صرف نظر شده است.

**4- یک سازنده نردبانهای چوبی ادعا می کنداگر الوار تازه به جای خشک شدن در کوره در معرض هوا خشک شود، قطعات کناری نردبان ساخته شده از آن تنش بیشتری خواهند داشت. اما با استفاده از الوار خشک شده در کوره، ممکن است هزینه های عملیاتی بطور قابل توجهی کاهش یابد. بنابراین، بمنظور تعیین اینکه آیا الوار خشک شده در معرض هوا تنش بیشتری از الوار خشک شده در کوره دارد یا نه، سازنده تصمیم گرفته آزمایشی با سطح معنا دار بودن 5 درصد انجام دهد. او بسیار مایل است از الوار خشک شده در کوره استفاده کند، اگر نتایج تجربی این کار را توجیه کند اما فکر می کند که بهتر است اگر تنش ماده خشک شده در کوره تا 100psi کمتر از تنش ماده خشک شده در معرض هوا باشد، با استفاده از مواد خشک شده در هوا ادامه دهد و مایل است مخاطره انجام یک تغییر روش غیر صحیح در این موقعیت از 5 درصد بیشتر نشود. سازنده بر اساس تجربیات گذشته در مورد الوار خشک شده در معرض هوا، مایل است که بپذیرد انحراف معیار این تنش 45psi است. او معتقد است که انحراف معیار تنش ماده خشک شده در کوره نیز به همین**

**مقدار است. الف) آزمون مناسب برای ادعای سازنده زا تعیین کنید. ب) اندازه نمونه مورد نیاز را تعیین کنید. ج) با این فرض که داده های زیر از آزمون بند الف نتیجه می شوند و با استفاده از اندازه نمونه به دست آمده در بند ب، سازنده چه تصمیمی باید بگیرد؟**

**میانگین تنش ماده خشک شده در معرض هوا 1170psi**

**میانگین تنش ماده خشک شده در کوره 1105psi**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

X: تنش ماده خشک شده در معرض هوا

Y: تنش ماده خشک شده در کوره

$$a = 0.05$$
$$b = 0.05$$
$$s_X = s_Y = 45$$
$$\begin{cases} H_0 : m_X \le m_Y \\ H_1 : m_X > m_Y \end{cases}$$

الف) نمونه هایی مستقل از ماده خشک شده در معرض هوا و ماده خشک شده در کوره می گیریم و سپس اقدام به محاسبه آماره آزمون $Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{s_X^2}{n_X} + \dfrac{s_Y^2}{n_Y}}}$ می نماییم، چنانچه مقدار بدست آمده برای آماره آزمون در داخل ناحیه پذیرش $A = \left(-\infty, Z_a\right]$ قرار گرفت فرض صفر را پذیرفته و در غیر اینصورت آنرا رد می کنیم.

ب)از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A=(-\infty, Z_a]=(-\infty, Z_{0.05}]=(-\infty, 1.645]$$

$$b=P\left(\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n_X}+\frac{s_Y^2}{n_Y}}}\le Z_{0.05} \mid m_X>m_Y\right)=P\left(\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n_X}+\frac{s_Y^2}{n_Y}}}\le 1.645 \mid m_X-m_Y=100\right)=0.05$$

$$b=P\left(\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{45^2}{n_X}+\frac{45^2}{n_Y}}}\le 1.645 \mid m_X-m_Y=100\right)=0.05 \Rightarrow b=P\left(Z\le 1.645-\frac{m_X-m_Y}{\sqrt{\frac{45^2}{n}+\frac{45^2}{n}}}\right)=0.05$$

$$\Rightarrow b=P\left(Z\le 1.645-\frac{100}{\sqrt{\frac{45^2}{n}+\frac{45^2}{n}}}\right)=0.05 \Rightarrow b=P\left(Z\ge \frac{100}{\sqrt{\frac{45^2}{n}+\frac{45^2}{n}}}-1.645\right)=0.05$$

$$\frac{100}{\sqrt{\frac{45^2}{n}+\frac{45^2}{n}}}-1.645=Z_{0.05} \Rightarrow \frac{100}{\sqrt{\frac{45^2}{n}+\frac{45^2}{n}}}-1.645=1.645 \Rightarrow n\approx 5=n_X=n_Y$$

ج)با توجه به موارد ذکر شده در بالا خواهیم داشت:

$$A=(-\infty, Z_a]=(-\infty, Z_{0.05}]=(-\infty, 1.645]$$

$$Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n_X}+\frac{s_Y^2}{n_Y}}}=\frac{1170-1105}{\sqrt{\frac{45^2}{5}+\frac{45^2}{5}}}=2.284$$

حال از آنجا که مقدار Z در داخل ناحیه پذیرش قرار ندارد پس فرض صفر ( $H_0: m_X \le m_Y$ ) را نمی پذیریم

**5- در یک آزمایش تجربی روش $X_1$ برای تولید بنزین از نفت خام مورد بررسی قرار دارد. پیش از اتمام تجربه روش دیگری $X_2$ پیشنهاد می شود. چنین تصمیم گرفته شد که تحت شرایط یکسان تنها درصورتی $X_1$ به نفع $X_2$ کنار گذاشته شود که استحصال دومی به طور قابل توجهی بیشتر باشد. به منظور تعیین انحراف معیارهای واقعی دو روش فوق فرصت کافی وجود نداشته است، هر چند دلیلی مبنی بر اینکه نتوان آنها را مساوی دانست در دست نیست. ملاحظات هزینه، بر اندازه نمونه های قابل حصول محدودیتهایی تحمیل می کند. اگر سطح معنادار بودن 5 درصد مجاز باشد، بر اساس نمونه های تصادفی زیر توصیه شما چیست؟ اعداد زیر معرف درصد استحصال از نفت خامند.**

$X_1$: 23/2, 26/6, 24/4, 23/5, 22/6, 25/7, 25/5; $\sum(X_1-\overline{X}_1)^2=13.16$

$X_2$: 25/7, 27/7, 26/2, 27/9, 25/0, 21/4, 26/1; $\sum(X_2-\overline{X}_2)^2=28.23$

**با استفاده از شیوه بالا کدام مقدار $(m_{X_2}-m_{X_1})/s$ با احتمال 80 درصد کشف می شود؟**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$a = 0.05$$
$$n_{X_1} = n_{X_2} = 7$$
$$\begin{cases} H_0 : m_{X_1} \geq m_{X_2} \\ H_1 : m_{X_1} < m_{X_2} \end{cases}$$
$$S_{X_1}^2 = \sum \frac{\left(X_1 - \overline{X}_1\right)^2}{\left(n_{X_1} - 1\right)} \Rightarrow \left(n_{X_1} - 1\right) S_{X_1}^2 = \sum \left(X_1 - \overline{X}_1\right)^2 = 13.16$$
$$S_{X_2}^2 = \sum \frac{\left(X_2 - \overline{X}_2\right)^2}{\left(n_{X_2} - 1\right)} \Rightarrow \left(n_{X_2} - 1\right) S_{X_2}^2 = \sum \left(X_2 - \overline{X}_2\right)^2 = 28.23$$
$$\overline{X}_1 = \frac{\sum X_1}{7} = \frac{171.5}{7} = 24.5$$
$$\overline{X}_2 = \frac{\sum X_2}{7} = \frac{180}{7} = 25.7$$
$$A = \left[-t_{0.05,12}, +\infty\right) = \left[-1.782, +\infty\right)$$
$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_{X_1}} + \frac{1}{n_{X_2}}}} = \frac{24.5 - 25.7}{S_P \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{7}}}$$

حال برای بدست آوردن آماره آزمون فوق نیاز به محاسبه $S_P^2$ می باشد، بنابراین با توجه به فرمول $S_P^2$ خواهیم داشت:

$$S_P^2 = \frac{\left(n_{X_1} - 1\right) S_{X_1}^2 + \left(n_{X_2} - 1\right) S_{X_2}^2}{n_{X_1} + n_{X_2} - 2} = \frac{\sum \left(X_1 - \overline{X}_1\right)^2 + \sum \left(X_2 - \overline{X}_2\right)^2}{n_{X_1} + n_{X_2} - 2} = \frac{13.16 + 28.23}{7 + 7 - 2} = 3.45$$

در نتیجه داریم:

$$A = \left[-t_{0.05,12}, +\infty\right) = \left[-1.782, +\infty\right)$$
$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_{X_1}} + \frac{1}{n_{X_2}}}} = \frac{24.5 - 25.7}{\sqrt{3.45}\sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{7}}} = -1.2088$$

حال از آنجا که مقدار t در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد پس فرض صفر ( $H_0 : m_{X_1} \geq m_{X_2}$ ) را می پذیریم.
برای بدست آوردن مقدار $\left(m_{X_2} - m_{X_1}\right)/s$ با احتمال 80 درصد کشف با مراجعه به شکل 12,6 صفحه 242 و داشتن $n' = 2n - 1 = 13$ و $b = 0.2$ مقدار $1 - b = 0.8 \Rightarrow b = 0.2$ برای 0/80 مقدار $d = \frac{\left(m_{X_2} - m_{X_1}\right)}{2s}$ بدست می آید، بنابراین خواهیم داشت: $\frac{\left(m_{X_2} - m_{X_1}\right)}{s} = 2d = 1.6$

**6- دو خط تولید مشابه X و Y ترانزیستور تولید می کنند. به ازای سطح معنادار بودن 1 درصد تمایل به آزمودن این فرض وجود دارد که خط X در هر روز واحدهای بیشتری نسبت به خط Y تولید می کند. اگر متوسط تولید روزانه خط Y به مقدار 250 واحد بیشتر باشد، تمایل به کشف این واقعیت با احتمال 0/90 وجود دارد. فرض کنید $s_X$ و $s_Y$ مساوی یکدیگر و تقریبا مساوی 110 اند. الف) چند مشاهده باشد داشت؟ (فرض**

**کنید $s_X = s_Y$ ولی هر دو مجهول اند. برای یافتن n مقدار تقریبی $s = 110$ را بکار ببرید) ب) تصور کنید داده ها بشرح زیرند:**

| خط Y | خط X |
|---|---|
| $\overline{Y} = 2800$ | $\overline{X} = 2800$ |
| $\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = 99800$ | $\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = 103600$ |

**آزمون را اجرا و تصمیم را مشخص کنید.**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$a = 0.01$$

$$1 - b = 0.9 \Rightarrow b = 0.1$$

$$s_X = s_Y = s = 110$$

$$\begin{cases} H_0 : m_X \le m_Y \\ H_1 : m_X > m_Y \end{cases}$$

الف) با توجه به مفروضات مسئله و همچنین یکطرفه بودن آزمون فرض، تعداد مشاهدات برابر خواهد بود با:

$$n = \frac{\left(Z_a + Z_b\right)^2\left(s_X^2 + s_Y^2\right)}{\left(m_X - m_Y\right)^2} = \frac{\left(Z_{0.01} + Z_{0.1}\right)^2\left(110^2 + 110^2\right)}{(250)^2} = 5.3 \approx 6$$

$$\Rightarrow n = n_X = n_Y = 6$$

ب) از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A = \left(-\infty, t_{a, n_X + n_Y - 2}\right] = \left(-\infty, t_{0.01,10}\right] = (-\infty, 2.764]$$

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} = \frac{2800 - 2680}{S_P\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}}$$

حال برای بدست آوردن آماره آزمون فوق نیاز به محاسبه $S_P^2$ می باشد، بنابراین با توجه به فرمول $S_P^2$ خواهیم داشت:

$$S_P^2 = \frac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2} = \frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2 + \sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{n_X + n_Y - 2} = \frac{103600 + 99800}{6 + 6 - 2} = 20340$$

در نتیجه داریم:

$$A = \left(-\infty, t_{0.01,10}\right] = (-\infty, 2.764]$$

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} = \frac{2800 - 2680}{\sqrt{20340}\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}} = 1.457$$

حال از آنجا که مقدار t در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد پس فرض صفر $(H_0 : m_X \le m_Y)$ را می پذیریم.

**7- معاون تولید یک شرکت سازنده ترانزیستور که دو کارخانه را تحت پوشش دارد، تولید کارخانه را بررسی می کند و متوجه می شود که بنظر می رسد کارخانهA همواره تولید روزانه بیشتری نسبت به کارخانه B دارد.**

**علی رغم این مطلب که هر دو طوری طراحی شده اند که در خلال مدتی معین تعداد یکسانی ترانزیستور تولید کنند. در آزمونی بمنظور اینکه آیا کارخانه A به طور متوسط تعداد تولید روزانه بیشتری نسبت به کارخانه B دارد، وی مقدار A، 250 واحد از متوسط تولید کارخانه B بیشتر باشد معاون معتقد است که آزمون باید این تفاوت را با احتمال 0/90 کشف کند. بر اساس سوابق معلوم است که انحراف معیار تولید روزانه در هر کارخانه تقریبا معادل 120 واحد است. الف) به منظور تضمین مخاطرات فوق به چند مشاهده از کارخانه نیاز است؟ ب) اگر اندازه نمونه همان باشد که در الف پیدا شد و داده ها عبارت از**

| کارخانه A | کارخانه B |
|---|---|
| تولید روزانه = X | تولید روزانه = Y |
| $\overline{X} = 2830$ | $\overline{Y} = 2680$ |
| $\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = 103600$ | $\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = 99800$ |

**باشند، آیا نتیجه می گیرید که کارخانه A از کارخانه B بیشتر تولید می کند؟**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$a = 0.01$$
$$1 - b = 0.9 \Rightarrow b = 0.1$$
$$s_A = s_B = s = 120$$
$$\begin{cases} H_0 : m_A \le m_B \\ H_1 : m_A > m_B \end{cases}$$

الف) با توجه به مفروضات مسئله و همچنین یکطرفه بودن آزمون فرض، تعداد مشاهدات برابر خواهد بود با:

$$n = \frac{\left(Z_a + Z_b\right)^2\left(s_X^2 + s_Y^2\right)}{\left(m_X - m_Y\right)^2} = \frac{\left(Z_{0.01} + Z_{0.1}\right)^2\left(120^2 + 120^2\right)}{(250)^2} = 6.01 \approx 7$$
$$\Rightarrow n = n_A = n_B = 7$$

ب) از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A = \left(-\infty, t_{a, n_X + n_Y - 2}\right] = \left(-\infty, t_{0.01,12}\right] = (-\infty, 2.681]$$
$$t = \frac{\overline{A} - \overline{B}}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} = \frac{2830 - 2680}{S_P\sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{7}}}$$

حال برای بدست آوردن آماره آزمون فوق نیاز به محاسبه $S_P^2$ می باشد، بنابراین با توجه به فرمول $S_P^2$ خواهیم داشت:

$$S_P^2 = \frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2}{n_A + n_B - 2} = \frac{\sum\left(A_i - \overline{A}\right)^2 + \sum\left(B_i - \overline{B}\right)^2}{n_A + n_B - 2} = \frac{103600 - 99800}{7 + 7 - 2} = 16950$$

در نتیجه داریم:

$$A = \left(-\infty, t_{0.01,12}\right] = (-\infty, 2.624]$$
$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} = \frac{2830 - 2680}{\sqrt{16950}\sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{7}}} = 2.155$$

حال از آنجا که مقدار t در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد پس فرض صفر $(H_0 : m_A \le m_B)$ را می پذیریم. یعنی نمی توان نتیجه گرفت که تولید کارخانه A از کارخانه B بیشتر است

**8- روش جدیدی برای عمل آوری سیمان پرتلند ابداع شده است. به منظور تعیین تاثیر روش جدید بر استحکام آزمایشهایی صورت می گیرد. یک انباشته تولید شده است و در مورد آن روشهای عمل آوری استاندارد و تجربی هر دو اعمال می شود. مقاومتهای تراکمی (Psi) بشرح زیرند:**

| روش عمل آوری تجربی Y | روش عمل آوری استاندارد X |
|---|---|
| 4250 | 4125 |
| 3950 | 4225 |
| 3900 | 4350 |
| 4075 | 3575 |
| 4550 | 3875 |
| 4450 | 3825 |
| 4150 | 3975 |
| 4550 | 3800 |
| 3700 | 3775 |
| 4250 | 3850 |
| $\sum Y_i^2 = 175{,}663{,}125$ | $\sum X_i^2 = 155{,}740{,}625$ |

**الف) به ازای سطح معنادار بودن 5 درصد تاثیر تغییر روش عمل آوری بر مقاومت را آزمایش کنید.**

**ب) با استفاده از شیوه بند الف و با این فرض که مقدار مشترک $s$ تقریبا 280 است اندازه مورد نیاز نمونه برای کشف تفاوتی معادل 360Psi، با احتمال 0/95 را پیدا کنید. (فرض کنید $a = 0.05$ است).**

**پاسخ:**

الف) با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$a = 0.05$$
$$1-b = 0.95 \Rightarrow b = 0.05$$
$$n_X = n_Y = 10$$
$$\begin{cases} H_0 : m_X = m_Y \\ H_1 : m_X \neq m_Y \end{cases}$$
$$S^2 = \sum \frac{\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{(n-1)} \Rightarrow (n-1)S^2 = (n-1)\sum \frac{\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{(n-1)} \Rightarrow (n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$
$$\Rightarrow (n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} X_i \overline{X} + \sum_{i=1}^{n} \overline{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + n\overline{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X}\left(2\overline{X}\right) + n\overline{X}^2$$
$$\Rightarrow (n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2$$
$$\overline{X} = \frac{\sum X}{10} = \frac{39375}{10} = 3937.5$$
$$\overline{Y} = \frac{\sum Y}{10} = \frac{41825}{10} = 4182.5$$
$$A = \left[-t_{0.05,(n_X+n_Y-2)}, t_{0.05,(n_X+n_Y-2)}\right] = \left[-t_{0.05,18}, t_{0.05,18}\right] = [-2.101, 2.101]$$
$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_{X_1}} + \frac{1}{n_{X_2}}}} = \frac{3937.5 - 4182.5}{S_P\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}}$$

حال برای بدست آوردن آماره آزمون فوق نیاز به محاسبه $S_P^2$ می باشد، بنابراین با توجه به فرمول $S_P^2$ خواهیم داشت:

$$S_P^2 = \frac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2} = \frac{\sum\left(X - \overline{X}\right)^2 + \sum\left(Y - \overline{Y}\right)^2}{n_X + n_Y - 2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\overline{Y}^2\right)}{10 + 10 - 2}$$
$$= \frac{\left(155{,}529{,}375 - 10(3937.5)^2\right) + \left(175{,}663{,}125 - 10(4192.5)^2\right)}{18} = 67798.6$$

در نتیجه داریم:

$$A = \left[-t_{0.05,(n_X+n_Y-2)}, t_{0.05,(n_X+n_Y-2)}\right] = \left[-t_{0.05,18}, t_{0.05,18}\right] = [-2.101, 2.101]$$
$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} = \frac{3937.5 - 4182.5}{\sqrt{67798.6}\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = -2.10$$

حال از آنجا که مقدار t در داخل ناحیه پذیرش قرار ندارد پس فرض صفر ( $H_0 : m_X = m_Y$ ) را نمی پذیریم.

ب) با توجه به مفروضات مسئله و همچنین دوطرفه بودن آزمون فرض، تعداد مشاهدات برابر خواهد بود با:

$$n = \frac{\left(Z_{a/2} + Z_b\right)^2\left(s_X^2 + s_Y^2\right)}{(m_X - m_Y)^2} = \frac{(Z_{0.025} + Z_{0.05})^2\left(280^2 + 280^2\right)}{(360)^2} = 15.68 \approx 16$$
$$\Rightarrow n = n_X = n_Y = 16$$

**9- گفته می شود که مقاومت سیم A از سیم B بیشتر است و آزمایشهایی روی هر نوع سیم انجام داده ایم و نتایج زیر را برحسب اهم بدست آورده ایم:**

| سیم A | | سیم B | |
|---|---|---|---|
| 0/140 | Ohm | 0/135 | Ohm |
| 0/138 | | 0/143 | |
| 0/145 | | 0/136 | |
| 0/142 | | 0/142 | |
| 0/144 | | 0/138 | |
| 0/137 | | 0/140 | |

**با فرض تساوی انحراف معیارها چه نتیجه ای می گیرید؟**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$a = 0.05$$

$$n_A = n_B = 6$$

$$s_A = s_B = s$$

$$\begin{cases} H_0 : m_A \le m_B \\ H_1 : m_A > m_B \end{cases}$$

$$\overline{X}_A = \frac{\sum_{i=1}^{6} X_A}{n_A} = 0.141$$

$$\overline{X}_B = \frac{\sum_{i=1}^{6} X_B}{n_B} = 0.139$$

$$S_A^2 = \frac{\sum \left(X_A - \overline{X}_A\right)^2}{n_A - 1} = 0.0000103684$$

$$S_B^2 = \frac{\sum \left(X_B - \overline{X}_B\right)^2}{n_B - 1} = 0.0000103684$$

$$S_P^2 = \frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2}{n_A + n_B - 2} = \frac{(5 * 0.0000103684) + (5 * 0.0000103684)}{10} = 0.0000103684$$

حال با توجه به دوطرفه بودن آزمون فرض و همچنین مجهول بودن واریانسها خواهیم داشت:

$$A = \left(-\infty, t_{0.05,(n_A + n_B - 2)}\right] = \left(-\infty, t_{0.05,(10)}\right] = (-\infty, 1.812]$$

$$t = \frac{\overline{X}_A - \overline{Y}_B}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} = \frac{0.141 - 0.139}{\sqrt{0.0000103684}\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}} = 1.07$$

حال از آنجا که مقدار t در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد پس فرض صفر $(H_0 : m_A \leq m_B)$ را می پذیریم. یعنی نمی توان پذیرفت مقاومت سیم A از سیم B بیشتر است.

**10- قصد معلوم کردن این مطلب را داریم که آیا مقاومت برشی نخ تابیده A از مقاومت نخ B بیشتر است یا نه. معلوم است که انحراف معیار مقاومت برشی برای هر دو نوع نخ در حدود 10 پوند است. تمایل به پذیرش مخاطره ماکسیمم 0/01 در زمینه اظهار اینکه نخها مختلف اند، علی رغم اینکه واقعا یکسانند را داریم. از سوی دیگر هرگاه واقعا میانگینها مقاومت به میزان 15 پوند تفاوت داشته باشند، مایل نیستیم مخاطره ای بیشتر از 0/10 در زمینه اظهار اینکه یکسانند را بپذیریم. الف) اندازه نمونه را تعیین کنید و شیوه تصمیم گیری مورد استفاده خود را شرح دهید. ب) اگر $3.1 = \sqrt{\frac{\sum\left(X_A-\overline{X}_A\right)^2+\sum\left(X_B-\overline{X}_B\right)^2}{2n-2}}\sqrt{\frac{2}{n}}$ باشد، آیا نتیجه می گیرید که میانگینهای مقاومت مساوی اند؟**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

A استحکام نخ $X_A \sim \left(m_A, 10^2\right)$

B استحکام نخ $X_B \sim \left(m_B, 10^2\right)$

$$a = 0.1$$
$$b = 0.01$$
$$s_A = s_B = 10$$
$$\begin{cases} H_0 : m_A - m_B = 15 \\ H_1 : m_A - m_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : m_A - m_B \geq 15 \\ H_1 : m_A - m_B < 15 \end{cases}$$

الف) با توجه به یکطرفه بودن آزمون فرض خواهیم داشت:

$$n_A = n_B = n = \frac{\left(Z_a + Z_b\right)^2\left(s_A^2 + s_B^2\right)}{\left(m_A - m_B\right)^2} = \frac{\left(Z_{0.1} + Z_{0.01}\right)^2(100+100)}{(15)^2} = 0.81 \approx 1$$

$$A = \left[-Z_a, +\infty\right) = \left[-Z_{0.1}, +\infty\right) = \left[-0.4602, +\infty\right)$$
$$Z = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B - \left(m_A - m_B\right)}{\sqrt{\frac{s_A}{n_A} + \frac{s_B}{n_B}}}$$

حال چنانچه مقدار آماره آزمون بالا در داخل بازه پذیرش قرار گیرد فرض صفر را می پذیریم و در غیر اینصورت آنرا رد می کنیم.

**11- بمنظور برآورد سهولت جداسازی و صاف کردن فرآورده ای در مقیاس کارخانه، یک تجربه آزمایشگاهی انجام شد. تجربه مبتنی بر اندازه گیری زمان مصرف شده برای جدا سازی حجم معینی از ماده مورد نظر، تحت شرایط استاندارد بود. شش نمونه از نقاله کارخانه در مدتهایی که تصور می شد صافی در حالت B و در حالت A است گرفته شد. هر چند واریانس مجهول است ولی فرض می کنیم که در هر دو حالت یکسان است.**

صافی کردن در کارخانه

| حالت A | حالت B |
|---|---|
| 8 | 9 |
| 10 | 10 |
| 12 | 10 |
| 13 | 4 |
| 9 | 7 |
| 14 | 8 |

**الف) لازم است به ازای سطح معنادار بودن 5 درصد اهمیت تفاوت مورد آزمایش قرار گیرد.**

**ب) با این فرض که واریانس نمونه، برآورد مناسبی از واریانس واقعی است، هرگاه میانگینهای واقعی تفاوتی برابر با 4 داشته باشد، احتمال پذیرش فرض چقدر می شود؟**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$a = 0.05$$

$$n_A = n_B = 6$$

$$\begin{cases} H_0 : m_A = m_B \\ H_1 : m_A \neq m_B \end{cases}$$

الف)

$$\overline{X}_A = \frac{\sum X_A}{n_A} = \frac{66}{6} = 11$$

$$\overline{X}_B = \frac{\sum X_B}{n_B} = \frac{48}{6} = 8$$

$$S_A^2 = \frac{\sum \left(X_A - \overline{X}_A\right)^2}{n_A - 1} = \frac{28}{5} = 5.6$$

$$S_B^2 = \frac{\sum \left(X_B - \overline{X}_B\right)^2}{n_B - 1} = \frac{26}{5} = 5.2$$

$$S_P^2 = \frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2}{n_A + n_B - 2} = \frac{(5*5.6) + (5*5.2)}{10} = 5.4$$

حال با توجه به دوطرفه بودن آزمون فرض و همچنین مجهول بودن واریانسها خواهیم داشت:

$$A = \left[-t_{0.025,(n_A+n_B-2)}, t_{0.025,(n_A+n_B-2)}\right] = \left[-t_{0.025,10}, t_{0.025,10}\right] = [-2.228, 2.228]$$

$$t = \frac{\overline{X}_A - \overline{Y}_B}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} = \frac{11-8}{\sqrt{5.4}\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}} = 2.236$$

حال از آنجا که مقدار t در داخل ناحیه پذیرش قرار ندارد پس فرض صفر ($H_0 : m_A = m_B$) را نمی پذیریم.

ب)

روش اول:

$$b = P\left(-2.228 \le \frac{\overline{X}_A - \overline{Y}_B}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}} \le 2.228 \mid m_A - m_B = 4\right)$$

$$\Rightarrow b = P\left(-2.228 - \frac{\overline{X}_A - \overline{Y}_B}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}} \le t_{10} \le 2.228 - \frac{\overline{X}_A - \overline{Y}_B}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}} \mid m_A - m_B = 4\right)$$

$$\Rightarrow b = P\left(-2.228 - \frac{4}{\sqrt{5.4}\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}} \le t_{10} \le 2.228 - \frac{4}{\sqrt{5.4}\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}}\right) = P(-5.209 \le t_{10} \le -0.753)$$

$$\Rightarrow b = P(-5.209 \le t_{10} \le -0.753) = P(t_{10} \le -0.753) + P(-5.209 \le t_{10}) = P(t_{10} \ge 0.753) + 0 = 0.238$$

روش دوم:

$$d = \frac{|m_A - m_B|}{2s} = \frac{4}{2 * \sqrt{5.4}} = 0.86$$

$$n' = 2n - 1 \Rightarrow n' = 2 * 6 - 1 \Rightarrow n' = 11$$

حال با مراجعه به شکل 10,6 صفحه 240 کتاب و اعمال $d = 0.86$ و $n' = 11$ مقدار تقریبی 0/25 برای $b$ بدست خواهد آمد.

**12- تصور کنید در یک آزمایشگاه به سرپرستی عده ای متخصص علوم تجربی منصوب شده اید. جوانی اظهار می کند کشف بزرگی کرده است. کشف مورد بحث این است که با افزودن عنصر A به فولاد می تواند مقاومت کششی آن را افزایش دهد. کمی تردید دارید، لذا متخصص مورد بحث داده ها را به شما ارائه می دهد که (با فرض تساوی واریانسها) یک آزمون t روی داده انجام داده است که نتیجه مورد نظر را تایید می کند. پس از بررسی نتایج از او می پرسید که آیا از صدق فرضهای مربوط به استفاده از آماره t اطمینان حاصل کرده است یا نه. با حیرت می گوید می پنداشته است همیشه می توان این آزمون را بکار برد. نادرست بودن این تصور را به او گوشزد و یادآوری تمام فرضها را شروع می کنید. در واقع برایش ثابت می کنید که یکی از فرضها به یقین صادق نیست. آزمون t را ( به ازای سطح معنادار بودن 5 درصد) در مورد داده های زیر انجام می دهد. فرضها را خاطر نشان و ثابت می کنید که دست کم یک فرض صادق نیست.**

مقاومت کششی

| فولاد با عنصر B | فولاد با عنصر A |
| --- | --- |

| | |
|---|---|
| 4 | 4 |
| 14 | 6 |
| 6 | 4 |
| 12 | 6 |
| 8 | 5 |
| 4 | 5 |
| 4 | 5 |
| 12 | |

**اگر آزمون $t^{'}$ به کار گرفته شود، آیا نتایج تغییر می کنند؟**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله از آنجا که فرض تساوی یا عدم تساوی واریانسها مطرح نگردیده است ابتدا فرض تساوی واریانسها را مورد آزمون قرار می دهیم تا بتوانیم با توجه به نتیجه بدست آمده آماره آزمون مناسب را انتخاب نماییم (در صورت تساوی واریانسها از آماره آزمون t و در غیر اینصورت باید از آماره آزمون $t^{'}$ استفاده کنیم)، پس خواهیم داشت:

X: فولاد با عنصر A

Y: فولاد با عنصر B

$$a = 0.05$$

$$n_X = 8$$

$$n_Y = 7$$

$$\overline{X}_X = \frac{\sum X_X}{n_X} = \frac{64}{8} = 8$$

$$\overline{X}_Y = \frac{\sum X_Y}{n_Y} = \frac{35}{7} = 5$$

$$S_X^2 = \frac{\sum \left(X_X - \overline{X}_X\right)^2}{n_X - 1} = \frac{120}{7} = 17.142$$

$$S_Y^2 = \frac{\sum \left(X_Y - \overline{X}_Y\right)^2}{n_Y - 1} = \frac{4}{6} = 0.66$$

$$\begin{cases} H_0 : s_X = s_Y \\ H_1 : s_X \neq s_Y \end{cases}$$

حال با توجه به دوطرفه بودن آزمون فرض و همچنین مجهول بودن میانگینها خواهیم داشت:

$$A = \left[ F_{1-a/2, 1-n_1, 1-n_2}, F_{a/2, 1-n_1, 1-n_2} \right] = \left[ F_{1-0.025,7,6}, F_{0.025,7,6} \right] = [0.195, 5.7]$$

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{17.142}{0.66} = 25.972$$

حال از آنجا که مقدار F در داخل ناحیه پذیرش قرار ندارد پس فرض صفر $(H_0 : s_X = s_Y)$ را نمی پذیریم. در نتیجه برای آزمودن فرض بزرگی میانگین فولاد نوع X از فولاد نوع Y، بجای استفاده از آماره t از آماره $t^{'}$ استفاده می کنیم، بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} H_0 : m_X \le m_Y \\ H_1 : m_X > m_Y \end{cases}$$

$$R^* = \frac{\left(\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_Y^2}{n_Y}\right)^2}{\frac{1}{n_X-1}\left(\frac{S_X^2}{n_X}\right)+\frac{1}{n_Y-1}\left(\frac{S_Y^2}{n_Y}\right)} = \frac{\left(\frac{17.142}{8}+\frac{0.66}{7}\right)^2}{\frac{1}{8-1}\left(\frac{17.142}{8}\right)^2+\frac{1}{7-1}\left(\frac{0.66}{7}\right)^2} = \frac{5.004}{0.6574} = 7.6 \approx 8$$

$$t_{R^*} = t' = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_Y^2}{n_Y}}} = \frac{8-5}{\sqrt{\frac{17.142}{8}+\frac{0.66}{7}}} = 2$$

$$A = \left(-\infty, t_{0.05,R^*}\right] = \left(-\infty, t_{0.05,8}\right] = \left(-\infty, 1.86\right]$$

حال از آنجا که مقدار $t_{R^*} = t'$ در داخل ناحیه پذیرش قرار ندارد پس فرض صفر $(H_0 : m_X \le m_Y)$ را نمی پذیریم. یعنی ادعای جوان را تایید می کنیم.

**13- نتایج حاصل از 16 مورد تعیین نقطه ذوب یک ترکیب به شرح زیر است، که 8 مورد توسط تحلیلگر I و 8 مورد توسط تحلیلگر II انجام گرفته است. داده ها برحسب درجه سانتیگراد است.**

| تحلیلگر I | تحلیلگر II |
|---|---|
| 164/5 | 163/5 |
| 169/7 | 162/8 |
| 169/2 | 163/0 |
| 169/5 | 163/2 |
| 161/8 | 160/7 |
| 168/7 | 161/5 |
| 169/5 | 160/9 |
| 163/9 | 162/0 |

**آیا نتیجه می گیرید که از جانب یک تحلیلگرتمایلی مبنی بر حصول نتایج بزرگتر نسبت به تحلیلگر دیگر وجود داشته است؟ آزمون را درسطح معنادار بودن 1 درصد انجام دهید. ( فرض کنید انحراف معیار برای دو نفر یکسان است) (تذکر: مقدار 160 را از تمام مشاهدات کم کنید.)**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$a = 0.01$$
$$n_{\mathrm{I}} = 8$$
$$n_{\mathrm{II}} = 8$$
$$\overline{X}_{\mathrm{I}} = 167.1$$
$$\overline{X}_{\mathrm{II}} = 162.2$$
$$S_{\mathrm{I}}^2 = 10.048$$
$$S_{\mathrm{II}}^2 = 1.1657$$
$$\begin{cases} H_0 : m_{\mathrm{I}} = m_{\mathrm{II}} \\ H_1 : m_{\mathrm{I}} \ne m_{\mathrm{II}} \end{cases}$$

$$S_P^2 = \frac{(n_{\mathrm{I}}-1)S_{\mathrm{I}}^2 + (n_{\mathrm{II}}-1)S_{\mathrm{II}}^2}{n_{\mathrm{I}}+n_{\mathrm{II}}-2} = \frac{(7*10.048)+(7*1.1657)}{14} = 5.60685$$

حال با توجه به دوطرفه بودن آزمون فرض و همچنین مجهول بودن واریانسها خواهیم داشت:

$$A = \left[-t_{0.005,(n_{\mathrm{I}}+n_{\mathrm{II}}-2)}, t_{0.005,(n_{\mathrm{I}}+n_{\mathrm{II}}-2)}\right] = \left[-t_{0.005,14}, t_{0.005,14}\right] = [-2.977, 2.977]$$

$$t = \frac{\overline{X}_{\mathrm{I}} - \overline{Y}_{\mathrm{II}}}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_{\mathrm{I}}}+\frac{1}{n_{\mathrm{II}}}}} = \frac{167.1-162.2}{\sqrt{5.60685}\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}} = 4.1387$$

حال از آنجا که مقدار t در داخل ناحیه پذیرش قرار ندارد پس فرض صفر ( $H_0 : m_{\mathrm{I}} = m_{\mathrm{II}}$ ) را نمی پذیریم. یعنی می توان نتیجه گرفت که از جانب یک تحلیلگرتمایلی مبنی بر حصول نتایج بزرگتر نسبت به تحلیلگر دیگر وجود داشته است.

**14- در مسئله 13 چند مشاهده توسط هر تحلیلگر لازم است تا احتمال کشف مقدار اریبی معادل 5 درجه سانتیگراد در مورد هر تحلیلگر برابر با 0/90 شود؟ (فرض کنید مقدار مشترک $s$ تقریبا 3/20 درجه سانتیگراد است.)**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$a = 0.01$$
$$1-b = 0.9 \Rightarrow b = 0.1$$
$$s_1 = s_2 = 3.2$$
$$m_1 - m_2 = 5$$
$$n_1 = n_2 = n = \frac{(Z_a + Z_b)^2(s_1^2 + s_2^2)}{(m_1 - m_2)^2} = \frac{(Z_{0.01}+Z_{0.1})^2(3.2^2+3.2^2)}{(5)^2} = 0.85 \approx 1$$

**15- فرض تساوی میانگینها در مسئله 13 را با فرض توزیع نرمال، بدون تساوی واریانسها آزمایش کنید.**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله 13 و این مسئله خواهیم داشت:

$$\begin{cases} H_0 : m_{\mathrm{I}} = m_{\mathrm{II}} \\ H_1 : m_{\mathrm{I}} \neq m_{\mathrm{II}} \end{cases}$$

$$R^* = \frac{\left(\frac{S_{\mathrm{I}}^2}{n_{\mathrm{I}}}+\frac{S_{\mathrm{II}}^2}{n_{\mathrm{II}}}\right)^2}{\frac{1}{n_{\mathrm{I}}-1}\left(\frac{S_{\mathrm{I}}^2}{n_{\mathrm{I}}}\right)^2+\frac{1}{n_{\mathrm{II}}-1}\left(\frac{S_{\mathrm{II}}^2}{n_{\mathrm{II}}}\right)^2} = \frac{\left(\frac{10.048}{8}+\frac{1.1657}{8}\right)^2}{\frac{1}{8-1}\left(\frac{10.048}{8}\right)^2+\frac{1}{8-1}\left(\frac{1.1657}{8}\right)^2} = 10$$

$$t_{R^*} = t' = \frac{\overline{X}_{\mathrm{I}} - \overline{X}_{\mathrm{II}}}{\sqrt{\frac{S_{\mathrm{I}}^2}{n_{\mathrm{I}}}+\frac{S_{\mathrm{II}}^2}{n_{\mathrm{II}}}}} = \frac{167.1-162.2}{\sqrt{\frac{10.048}{8}+\frac{1.1657}{8}}} = 4.1387$$

$$A = \left[-t_{0.005,R^*}, t_{0.005,R^*}\right] = \left[-t_{0.005,10}, t_{0.005,10}\right] = [-3.169, 3.169]$$

حال از آنجا که مقدار t در داخل ناحیه پذیرش قرار ندارد پس فرض صفر ( $H_0 : m_{\mathrm{I}} = m_{\mathrm{II}}$ ) را نمی پذیریم. یعنی می توان نتیجه گرفت که از جانب یک تحلیلگرتمایلی مبنی بر حصول نتایج بزرگتر نسبت به تحلیلگر دیگر وجود داشته است.

**16- مهندسی در بخش طراحی یک کارخانه هواپیما سازی، شواهدی نظری مبنی بر این مطلب ارائه کرده است که سرعت اقتصادی نوعی هواپیمای جنگنده بر اثر رنگ آمیزی بدنه کاهش می یابد. او مهندس بخش طراحی را متقاعد می کند که 9 هواپیمای بعدی که از خط تولید بیرون می آیند را در پروازی آزمایشی شرکت دهد تا پیش از رنگ آمیزی سرعت پروازشان تعیین شود و سپس آنها را رنگ آمیزی کنند و در پرواز آزمایشی شرکت دهند تا سرعتشان بعد از رنگ آمیزی تعیین شود. داده های زیر به دست مس آید:**

| | سرعت اقتصادی (گره) | |
|---|---|---|
| هواپیما | رنگ نشده | رنگ شده |
| 1 | 426 | 416 |
| 2 | 418 | 403 |
| 3 | 424 | 420 |
| 4 | 438 | 431 |
| 5 | 440 | 432 |
| 6 | 421 | 404 |
| 7 | 412 | 398 |
| 8 | 409 | 405 |
| 9 | 427 | 422 |

**در سطح معنادار بودن 5 درصد آزمونی را طراحی کنید و محاسبات لازم را به منظور ارزیابی شواهد مهندس طراح انجام دهید.**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

X: رنگ نشده

Y: رنگ شده

$$a = 0.05$$

$$\begin{cases} H_0 : m_X = m_Y \\ H_1 : m_X > m_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : m_X \le m_Y \\ H_1 : m_X > m_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : m_X - m_Y \le 0 \\ H_1 : m_X - m_Y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : m_D \le 0 \\ H_1 : m_D > 0 \end{cases}$$

$$D_i = X_i - Y_i$$

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D_i$ | 10 | 15 | 4 | 7 | 8 | 17 | 14 | 4 | 5 |

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{9} D_i}{9} = 9.33$$

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(D_i - \overline{D}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{9}\left(D_i - \overline{D}\right)^2}{8} = 24.5$$

$$A = \left(-\infty, t_{0.05;8}\right] = \left(-\infty, 1.860\right]$$

$$t = \frac{\overline{D}\sqrt{n}}{S_D} = \frac{9.33\sqrt{9}}{\sqrt{24.5}} = 5.64$$

حال از آنجا که مقدار t در داخل ناحیه پذیرش قرار ندارد پس فرض صفر ( $H_0 : m_X = m_Y$ ) را نمی پذیریم. یعنی ادعای مهندس را می پذیریم.

در حل این سئوال توجه به دو نکته زیر الزامی است:

$$1-\begin{cases} H_0 : q = 10 \\ H_1 : q = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : q \geq 10 \\ H_1 : q < 10 \end{cases}$$

$$2-\begin{cases} H_0 : q = 8 \\ H_1 : q = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : q \leq 8 \\ H_1 : q > 8 \end{cases}$$

**17- در مسئله 16، اگر سرعت اقتصادی هواپیما 12/5 گره کم شود، به چند مشاهده نیاز است تا آزمون بتواند با احتمال 0/90 فرض را رد کند؟ فرض کنید انحراف معیار تفاوتها ( $s_D$ ) حدودا مساوی 5 گره است.**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

X: پس از تغییر

Y: پیش از تغییر

$$a = 0.01$$

$$\begin{cases} H_0 : m_X = m_Y \\ H_1 : m_X > m_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : m_X \leq m_Y \\ H_1 : m_X > m_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : m_X - m_Y \leq 0 \\ H_1 : m_X - m_Y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : m_D \leq 0 \\ H_1 : m_D > 0 \end{cases}$$

$$D_i = X_i - Y_i$$

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $D_i$ | 4 | 4 | -2 | 8 | 1 |

$$\overline{D}=\frac{\sum_{i=1}^{5}D_i}{5}=3$$

$$S_D^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(D_i-\overline{D}\right)^2}{n-1}=\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(D_i-\overline{D}\right)^2}{4}=14$$

$$A=\left(-\infty,t_{0.01;4}\right]=\left(-\infty,3.747\right]$$

$$t=\frac{\overline{D}\sqrt{n}}{S_D}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{14}}=1.79$$

حال از آنجا که مقدار t در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد پس فرض صفر $(H_0: m_X=m_Y)$ را می پذیریم. یعنی وزن افزایش نیافته است.

با مراجعه به شکل 13,6 صفحه 243 و با داشتن $1-b=0.9 \Rightarrow b=0.1$ و همچنین $d=\frac{3}{3}=1$ و اعمال نقطه $b(1)=0.1$ مقدار تقریبی 16 برای تعداد مشاهدات مورد نیاز بدست خواهد آمد.

در حل این سئوال توجه به دو نکته زیر الزامی است:

$$1-\begin{cases}H_0: q=10\\ H_1: q=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}H_0: q\ge 10\\ H_1: q<10\end{cases}$$

$$2-\begin{cases}H_0: q=8\\ H_1: q=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}H_0: q\le 8\\ H_1: q>8\end{cases}$$

**18- جیره غذایی پنج نفر را تغییر مختصری می دهیم و وزن آنها را پیش از این تغییر و سه ماه پس از آن اندازه گیری می کنیم. وزن برحسب پوند به شرح زیر است:**

| شخص | پیش | پس |
|---|---|---|
| 1 | 162 | 166 |
| 2 | 192 | 196 |
| 3 | 138 | 136 |
| 4 | 182 | 190 |
| 5 | 159 | 160 |

**الف) به ازای سطح معنادار بودن 1 درصد ، آزمون این فرض را که وزن افزایش نیافته است انجام دهید. ب) اگر میانگین واقعی وزن 3 پوند تغییر یابد باید از چند نفر در آزمایش فوق استفاده کرد تا بتوان با احتمال 0/90 فرض را رد کرد؟ (برای یافتن پاسخ این سئوال فرض کنید که مقدار تقریبی $s_D$ مساوی 3 است.)**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

الف)

X: وزن پیش از جیره

Y: وزن پس از جیره

$$a = 0.01$$

$$\begin{cases} H_0 : m_X = m_Y \\ H_1 : m_X \neq m_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : m_X - m_Y = 0 \\ H_1 : m_X - m_Y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : m_D = 0 \\ H_1 : m_D \neq 0 \end{cases}$$

$$D_i = X_i - Y_i$$

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $D_i$ | -4 | -4 | 2 | -8 | -1 |

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{5} D_i}{5} = -3$$

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(D_i - \overline{D}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{5}\left(D_i - \overline{D}\right)^2}{4} = 14$$

$$A = \left[-t_{a/2;n-1}, t_{a/2;n-1}\right] = \left[-t_{0.005;4}, t_{0.005;4}\right] = [-4.604, 4.604]$$

$$t = \frac{\left(\overline{D} - m_D\right)\sqrt{n}}{S_D} = \frac{(-3-0)\sqrt{5}}{\sqrt{14}} = -1.79$$

حال از آنجا که مقدار t در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد پس فرض صفر ( $H_0 : m_X = m_Y$ ) را می پذیریم.

ب)

$$a = 0.01$$

$$1 - b = 0.9 \Rightarrow b = 0.1$$

$$s_1 = s_2 = 3$$

$$m_1 - m_2 = 3$$

$$n_1 = n_2 = n = \frac{\left(Z_a + Z_b\right)^2\left(s_1^2 + s_2^2\right)}{\left(m_1 - m_2\right)^2} = \frac{\left(Z_{0.01} + Z_{0.1}\right)^2\left(3^2 + 3^2\right)}{(3)^2} = 1.8 \approx 2$$

**19- نوع جدیدی قالب برای تهیه بتن ساخته شده است. تصور کنید که قالب جدید مزایایی از قبیل سریعتر سخت شدن بتن و غیره نسبت به قالب استاندارد دارد، اما در مورد استحکام نهایی محصول کامل شده ابزار تردید شده است. از نظر اقتصادی انجام دادن تنها یه مشاهده از هر قالب امکان پذیر است و داده ها بشرح زیرند:**

مقاومت فشاری (Psi)

| انباشته | قالب استاندارد | قالب جدید |
|---|---|---|
| 1 | 4680 | 4020 |
| 2 | 4650 | 3940 |
| 3 | 4530 | 3980 |

**الف) تعیین کنید آیا (به ازای سطح معنادار بودن 0/05)، با استفاده از قالب جدید مقاومت فشاری بتن کاهش می یابد یا نه. ب) با فرض اینکه $s_D$ تقریبا معادل 90 است، به منظور کشف کاهش معادل 200Psi در مقاومت فشاری با احتمال حداقل 90 درصد به چند مشاهده نیاز است؟ ج) در مورد منحنی OC مربوط به آزمون انجام شده توضیح دهید.**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

X: قالب جدید

Y: قالب استاندارد

$$a = 0.05$$

$$\begin{cases} H_0 : m_X = m_Y \\ H_1 : m_X < m_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : m_X \ge m_Y \\ H_1 : m_X < m_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : m_X - m_Y \ge 0 \\ H_1 : m_X - m_Y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : m_D \ge 0 \\ H_1 : m_D < 0 \end{cases}$$

$$D_i = X_i - Y_i$$

| i | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $D_i$ | -660 | -710 | -550 |

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{3} D_i}{3} = -640$$

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(D_i - \overline{D}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{3}\left(D_i - \overline{D}\right)^2}{2} = 6700$$

$$A = \left[-t_{0.05;2}, +\infty\right) = \left[-2.320, +\infty\right)$$

$$t = \frac{\overline{D}\sqrt{n}}{S_D} = \frac{-640\sqrt{3}}{\sqrt{6700}} = -13.54$$

حال از آنجا که مقدار t در داخل ناحیه پذیرش قرار ندارد پس فرض صفر $(H_0 : m_X = m_Y)$ را نمی پذیریم. در نتیجه استفاده از قالب جدید باعث کاهش مقاومت فشاری بتن نمی شود.

ب) با مراجعه به شکل 12,6 صفحه 242 و با داشتن $1 - b = 0.9 \Rightarrow b = 0.1$ و همچنین $d = \frac{200}{90} = 2.22$ و اعمال نقطه $b(2.22) = 0.1$ مقدار تقریبی 4 برای تعداد مشاهدات مورد نیاز بدست خواهد آمد.

در حل این سئوال توجه به دو نکته زیر الزامی است:

$$1 - \begin{cases} H_0 : q = 10 \\ H_1 : q = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : q \ge 10 \\ H_1 : q < 10 \end{cases}$$

$$2 - \begin{cases} H_0 : q = 8 \\ H_1 : q = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : q \le 8 \\ H_1 : q > 8 \end{cases}$$

**20- دو تحلیلگر اندازه گیریهای مکرر از سختی آب شهر انجام داده اند. تعیین کنید که آیا یک تحلیلگر نسبت به دیگری تمایل به ثبت نتایج دیگری دارد یا نه. از روشهای نرمال و ناپارامتری، هر دو استفاده کنید.**

اندازه های کد گذاری شده سختی

| تحلیلگر X | تحلیلگر Y |
|---|---|
| 0/42 | 0/82 |
| 0/62 | 0/61 |
| 0/37 | 0/89 |
| 0/40 | 0/51 |
| 0/44 | 0/33 |
| 0/58 | 0/48 |
| 0/48 | 0/23 |
| 0/53 | 0/25 |
| | 0/67 |
| | 0/88 |
| $\sum\left(X-\overline{X}\right)^2=0.0558$ | $\sum\left(Y-\overline{Y}\right)^2=0.55981$ |

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله از آنجا که فرض تساوی یا عدم تساوی واریانسها مطرح نگردیده است ابتدا فرض تساوی واریانسها را مورد آزمون قرار می دهیم تا بتوانیم با توجه به نتیجه بدست آمده آماره آزمون مناسب را انتخاب نماییم (در صورت تساوی واریانسها از آماره آزمون t و در غیر اینصورت باید از آماره آزمون $t'$ استفاده کنیم)، پس خواهیم داشت:

X: تحلیلگر X

Y: تحلیلگر Y

$$a=0.05$$
$$n_X=8$$
$$n_Y=10$$
$$\overline{X}=\frac{\sum X}{n_X}=\frac{3.84}{8}=0.48$$
$$\overline{Y}=\frac{\sum Y}{n_Y}=\frac{5.67}{10}=0.567$$
$$S_X^2=\frac{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n_X-1}=\frac{0.0558}{7}=0.00797$$
$$S_Y^2=\frac{\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2}{n_Y-1}=\frac{0.5598}{9}=0.0622$$

$$\begin{cases}H_0: s_X=s_Y\\ H_1: s_X\neq s_Y\end{cases}$$

حال با توجه به دوطرفه بودن آزمون فرض و همچنین مجهول بودن میانگینها خواهیم داشت:

$$A=\left[F_{1-\alpha/2,1-n_1,1-n_2},F_{\alpha/2,1-n_1,1-n_2}\right]=\left[F_{1-0.025,7,9},F_{0.025,7,9}\right]=[0.207,4.2]$$

$$F=\frac{S_X^2}{S_Y^2}=\frac{0.00797}{0.0622}=0.1281$$

حال از آنجا که مقدار F در داخل ناحیه پذیرش قرار ندارد پس فرض صفر $(H_0:s_X=s_Y)$ را نمی پذیریم. در نتیجه برای آزمودن فرض صفر بجای استفاده از آماره t از آماره $t'$ استفاده می کنیم، بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}H_0:m_X=m_Y\\H_1:m_X\neq m_Y\end{cases}$$

$$R^*=\frac{\left(\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_Y^2}{n_Y}\right)^2}{\frac{1}{n_X-1}\left(\frac{S_X^2}{n_X}\right)+\frac{1}{n_Y-1}\left(\frac{S_Y^2}{n_Y}\right)}=\frac{\left(\frac{0.00797}{8}+\frac{0.0622}{10}\right)^2}{\frac{1}{8-1}\left(\frac{0.00797}{8}\right)^2+\frac{1}{10-1}\left(\frac{0.0622}{10}\right)^2}\approx 13$$

$$t_{R^*}=t'=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_Y^2}{n_Y}}}=\frac{0.48-0.567}{\sqrt{\frac{0.00797}{8}+\frac{0.0622}{10}}}=-1.024$$

$$A=\left[-t_{0.05,R^*},t_{0.05,R^*}\right]=\left[-t_{0.05,13},t_{0.05,13}\right]=[-2.160,2.160]$$

حال از آنجا که مقدار $t_{R^*}=t'$ در داخل ناحیه پذیرش قرار ندارد پس فرض صفر $(H_0:m_X=m_Y)$ را نمی پذیریم. یعنی یک تحلیلگر نسبت به دیگری علاقه به ثبت مقادیر بزرگتر دارد.

در پاسخ به این سئوال توجه به نکته زیر الزامی است:

$$F_{a,n1,n2}=\frac{1}{F_{1-a,n2,n1}}$$

**21- از یک محلول حاوی نیکل، ده زوج نمونه طیف شیمیایی گرفته شده و مقادیر نیکل تعیین شده مربوط به این نمونه ها، بشرح زیر ارائه شده است. نتایج ردیف اول با یک نوع ابزار اندازه گری و نتایج ردیف دوم با نوع دیگری از آن به دست آمده است.**

| نمونه | ابزار اندازه گیری 1 | ابزار اندازه گیری 2 |
|---|---|---|
| 1 | 1/94 | 2/00 |
| 2 | 1/99 | 2/09 |
| 3 | 1/98 | 1/95 |
| 4 | 2/07 | 2/03 |
| 5 | 2/03 | 2/08 |
| 6 | 1/96 | 1/98 |
| 7 | 1/95 | 2/03 |
| 8 | 1/96 | 2/03 |
| 9 | 1/92 | 2/01 |
| 10 | 2/00 | 2/12 |

**الف) به ازای سطح معنادار بودن 5 درصد، تعیین کنید که آیا ابزارهای متفاوت نتایج متفاوتی ایجاد می کند یا نه. از آزمون رتبه با علامت استفاده کنید. ب) به ازای سطح معنادار بودن تقریبی 0/2 درصد، تعیین کنید**

**که آیا استفاده از ابزارهای متفاوت منجر به حصول نتایج متفاوتی می شود یا نه. از آزمون علامت استفاده کنید.**

**پاسخ:**

**22-در تحقیقات مربوط به خرج شلیک موشکها، که با هدف تقلیل زمان تاخیر بین آغاز جریان شلیک و انفجار صورت می گیرید، فرض بر این بود که استفاده از خرج نوع T به جای خرج متداول نوع C می تواند تاثیر مثبت داشته باشد. انحراف معیارهای تقریبی خرج متداول نوع C (و نیز نوع T) معادل 0/03 است. قرار شد تجربه ای طراحی شود که در آن n شلیک با نوع C و n شلیک با نوع T صورت گیرد. الف) یک تقلیل 0/06 ثانیه ای در تفاوت میانگینها، انجام تغییرات لازم در ساخت را توجیه می گرد. اما مهم بود که اگر واقعا هیچ بهبودی حاصل نشود، خرج نوع T نیز توصیه نشود و به این دلیل $a$ برابر 0/01 در نظر گرفته شد. مخاطره $b$، برای عدم کشف تقلیل به میزان 0/06 ثانیه نیز معادل 0/10 در نظر گرفته شد. به منظور تامین مخاطره ها فوق به چند مشاهده نیاز است؟ ب) اگر $\overline{C} = 0.261$ ثانیه، $\overline{T} = 0.261$ ثانیه، $S_C^2 = 0.0128$ و $S_T^2 = 0.0132$ باشد آیا خرج نوع T را اختیار می کنید؟ ج) اگر تمام مقادیر T جز در مورد یک مشاهده که بزرگترین مشاهدات است، از مقادیر C کوچکتر بودند، با استفاده از یک آزمون ناپارامتری، فرض برابری میانگینها را بیازمایید.**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$a = 0.01$$
$$b = 0.1$$
$$s_T = s_C \approx 0.03$$
$$\begin{cases} H_0 : m_T \geq m_C \\ H_1 : m_T < m_C \end{cases}$$

الف) از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد داریم:

$$n = \frac{(Z_a + Z_b)^2 s^2}{(m_1 - m_0)^2} = \frac{(Z_{0.01} + Z_{0.1})^2 (0.03)^2}{(0.06)^2} = 3.33 \approx 4$$

ب) اگر چنانچه فرض یکسانی انحراف معیارها یعنی $s_T = s_C \approx 0.03$ را بپذیریم خواهیم داشت:

$$S_P^2 = \frac{(n_T - 1)S_T^2 + (n_C - 1)S_B^2}{n_T + n_C - 2} = \frac{\sum_{i=1}^{3}\left(X_{T_i} - \overline{X}_T\right) + \sum_{i=1}^{3}\left(X_{C_i} - \overline{X}_C\right)}{4 + 4 - 2} = 76$$
$$A = \left[-t_{0.025,(n_A+n_B-2)}, t_{0.025,(n_A+n_B-2)}\right] = \left[-t_{0.025,6}, t_{0.025,6}\right] = [-2.447, 2.447]$$
$$t = \frac{\overline{X}_T - \overline{X}_C}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_T} + \frac{1}{n_C}}} = \frac{295 - 315}{\sqrt{76}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = -3.244$$

حال از آنجا که مقدار t در داخل ناحیه پذیرش قرار ندارد پس فرض صفر ($H_0 : m_T \geq m_C$) را نمی پذیریم.

**23- دو طرز عمل را به ازای سطح معنادار بودن 1 درصد مقایسه میکنیم. داده ها قطعا نرمال نیستند و به شرح زیرند:**

| طرز عمل A | طرز عمل B |
|---|---|
| 16/3 | 18/7 |
| 14/7 | 17/5 |
| 12/3 | 17/9 |
| 13/5 | 18/3 |
| 16/0 | 18/0 |
| 17/1 | 16/9 |
| 17/3 | |
| 15/2 | |

تعیین کنید آیا دو طرز عمل با یکدیگر تفاوت دارند یا نه.

**پاسخ:**

**24-با استفاده از داده های مسئله 16 یک آزمون ناپایداری انجام دهید. از سطح معنادار بودن 2/5 درصد استفاده کنید.**

**پاسخ:**

**25- مدتهای سوختن دو نوع ظرف دودزا در زیر ارائه شده اند.**

| نوع X | | نوع Y | |
|---|---|---|---|
| 481 | 572 | 526 | 537 |
| 506 | 561 | 511 | 582 |
| 527 | 501 | 556 | 601 |
| 661 | 487 | 542 | 558 |
| 500 | 524 | 491 | 578 |
| $\sum X^2 = 2856698$ | | $\sum Y^2 = 3015520$ | |

**الف) با فرض یکسان بودن انحراف معیارها، آیا نتیجه می گیرید که مدت سوختن یک نوع ظرف دودزا از مدت سوختن نوع دیگر متفاوت است (از سطح معنادار بودن 5 درصد استفاده کنید)؟**

**ب) تصور کنید که نمی توان فرض کرد انحراف معیارها مساوی اند. آیا نتیجه گیری شما تغییر می کند؟**

**ج) تصور کنید که قبول فرض لازم توزیع نرمال میسر نیست و با استفاده از روشهای ناپارامتری داده ها را تحلیل کنید.**

**پاسخ:**

الف) با توجه به مفروضات مسئله و همچنین فرض برابری واریانسها خواهیم داشت:

$$a = 0.05$$

$$\begin{cases} H_0 : m_X = m_Y \\ H_1 : m_X \neq m_Y \end{cases}$$

$$n_X = 10$$

$$n_Y = 10$$

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{n_X} = \frac{5320}{10} = 532$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y}{n_Y} = \frac{5482}{10} = 548.2$$

$$S_X^2 = \frac{\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n_X - 1} = \frac{26458}{9} = 2939.77$$

$$S_Y^2 = \frac{\sum \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{n_Y - 1} = \frac{10287.6}{9} = 1143.066$$

حال از آنجا که در فرضیات مسئله واریانسها را برابر فرض نموده ایم از آماره آزمون t استفاده می کنیم و خواهیم داشت:

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} = \frac{532 - 548.2}{S_P\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}}$$

حال از آنجا که مقدار متغییر $S_P$ مجهول می باشد توسط فرمول زیر آنرا محاسبه می کنیم:

$$S_P^2 = \frac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2} = \frac{(10-1)2939.77 + (10-1)1143.066}{10 + 10 - 2} = 2041.4$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} = \frac{532 - 548.2}{45.181\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = -0.801$$

$$A = \left[-t_{a/2;(n_X + n_Y - 2)}, t_{a/2;(n_X + n_Y - 2)}\right] = \left[-t_{0.025;18}, t_{0.025;18}\right] = [-2.101, 2.101]$$

حال از آنجا که مقدار آماره آزمون در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد پس فرض صفر ($H_0 : m_X = m_Y$) را می پذیریم.

ب) با توجه به مفروضات این بند از آنجا که فرض عدم تساوی واریانسها مطرح گردیده است باید از آماره آزمون $t'$ استفاده کنیم، پس خواهیم داشت:

$$a = 0.05$$
$$s_X = s_Y$$
$$n_X = 10$$
$$n_Y = 10$$
$$\overline{X} = \frac{\sum X}{n_X} = \frac{5320}{10} = 532$$
$$\overline{Y} = \frac{\sum Y}{n_Y} = \frac{5482}{10} = 548.2$$
$$S_X^2 = \frac{\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n_X - 1} = \frac{26458}{9} = 2939.77$$
$$S_Y^2 = \frac{\sum \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{n_Y - 1} = \frac{10287.6}{9} = 1143.066$$
$$\begin{cases} H_0 : m_X = m_Y \\ H_1 : m_X \neq m_Y \end{cases}$$
$$R^* = \frac{\left(\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y}\right)^2}{\frac{1}{n_X - 1}\left(\frac{S_X^2}{n_X}\right)^2 + \frac{1}{n_Y - 1}\left(\frac{S_Y^2}{n_Y}\right)^2} = \frac{\left(\frac{2939.77}{10} + \frac{1143.066}{10}\right)^2}{\frac{1}{10-1}\left(\frac{2939.77}{10}\right)^2 + \frac{1}{10-1}\left(\frac{1143.066}{10}\right)^2} \approx 17$$
$$t_{R^*} = t' = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y}}} = \frac{532 - 548.2}{\sqrt{\frac{2939.77}{10} + \frac{1143.066}{10}}} = -0.8$$
$$A = \left[-t_{\alpha/2, R^*}, t_{\alpha/2, R^*}\right] = \left[-t_{0.025,18}, t_{0.025,18}\right] = [-2.11, 2.11]$$

حال از آنجا که مقدار $t_{R^*} = t'$ در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد پس فرض صفر $(H_0 : m_X = m_Y)$ را می پذیریم. یعنی تغییری در تصمیم گیری بوجود نیامده است.

**26-تجربه ای انجام شد تا معلوم شود آیا مقدار فلز جدا شده در دو درجه حرارت مختلف حمام اسید یکسان است یا نه. داده ها به شرح زیر بودند، و هر مشاهده معرف ضخامت فلز جدا شده بر حسب 0/001 اینچ بود.**

مقدار فلز جدا شده

| دما: | $120^\circ$ | $90^\circ$ |
|---|---|---|
| | 2/2 | 2/3 |
| | 2/4 | 2/7 |
| | 2/0 | 2/9 |
| | 1/9 | 2/7 |
| | 2/1 | 2/6 |
| | 2/0 | 2/4 |

**الف) به ازای سطح معنادار بودن 5 درصد با فرض توزیع نرمال و واریانس مشترک، فرض بی اثر بودن درجه حرارت را بیازمایید. ب) به ازای سطح معنادار بودن 5 درصد، یک آزمون ناپارامتری انجام دهید.**

**پاسخ:**

الف) با توجه به مفروضات مسئله و همچنین فرض برابری واریانسها خواهیم داشت:

X: مقدار فلز جدا شده در حمام اسید در دمای 90 درجه

Y: مقدار فلز جدا شده در حمام اسید در دمای 120 درجه

$$a = 0.05$$

$$n_X = 6$$

$$n_Y = 6$$

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{n_X} = \frac{15.6}{6} = 2.6$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y}{n_Y} = \frac{12.6}{6} = 2.1$$

$$S_X^2 = \frac{\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n_X - 1} = \frac{0.24}{5} = 0.048$$

$$S_Y^2 = \frac{\sum \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{n_Y - 1} = \frac{0.16}{5} = 0.032$$

$$\begin{cases} H_0 : m_X = m_Y \\ H_1 : m_X \neq m_Y \end{cases}$$

حال از آنجا که در فرضیات مسئله واریانسها را برابر فرض نموده ایم از آماره آزمون t استفاده می کنیم و خواهیم داشت:

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} = \frac{2.6 - 2.1}{S_P \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}}$$

حال از آنجا که مقدار متغییر $S_P$ مجهول می باشد توسط فرمول زیر آنرا محاسبه می کنیم:

$$S_P^2 = \frac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2} = \frac{(6-1)0.048 + (6-1)0.032}{6+6-2} = 0.04$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} = \frac{2.6 - 2.1}{0.2\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}} = 4.3$$

$$A = \left[ -t_{a/2;(n_X + n_Y - 2)}, t_{a/2;(n_X + n_Y - 2)} \right] = \left[ -t_{0.025;10}, t_{0.025;10} \right] = \left[ -2.22, 2.22 \right]$$

حال از آنجا که مقدار آماره آزمون در داخل ناحیه پذیرش قرار ندارد پس فرض صفر $(H_0 : m_X = m_Y)$ را نمی پذیریم.

**27- جدول زیر درصد افت مقاومت کششی را در مورد نمونه های زوجی یک آلیاژ (که یک نمونه در معرض کشش است و دیگری نیست)، متعاقب غوطه ور شدن در یک محلول خورنده ارائه می کند.**

| شماره آزمایش | بدون اعمال کشش | تحت کشش |
|---|---|---|
| 1 | 6/4 | 9/2 |
| 2 | 4/6 | 7/9 |
| 3 | 4/6 | 7/3 |
| 4 | 6/4 | 8/0 |
| 5 | 3/2 | 5/7 |
| 6 | 5/2 | 7/6 |
| 7 | 6/5 | 5/7 |
| 8 | 4/9 | 4/1 |
| 9 | 4/3 | 8/1 |
| 10 | 6/5 | 5/6 |
| 11 | 3/7 | 6/9 |
| 12 | 4/6 | 6/0 |

**از این داده ها چه نتیجه گیریهایی در مورد تاثیر کشش بر افت مقاومت کششس می کنید؟ (به ازای سطح معنادار بودن 5 درصد، یک آزمون ناپارامتری انجام دهید).**

**پاسخ:**

28- **تصور کنید به منظور تعیین اینکه آیا طرز عمل معینی تاثیری (اعم از مثبت یا منفی) بر مقاومت در مقابل ساییدگی یک ماده خاص دارد یا نه، قرار است تجربه ای انجام شود. اجرا کننده تجربه به دو نمونه از اولین قطعه تحت آزمایش علامتهای 1H و 1T، به دو نمونه از دومین قطعه تحت آزمایش علامتهای 2H و 2T را می دهد و به همین ترتیب تا قطعه نمو را علامت می دهد. سپس یک سکه را 9 دفعه پرتاب می کند. اگر نتیجه اولین پرتاب شیر باشد، نمونه 1H را برای بررسی طرز عمل انتخاب می کند، اگر نتیجه خط باشد نمونه 1T را انتخاب می کند. نتیجه دفعه دوم پرتاب سکه تکلیف نمونه های 2H و2T را روشن می کند و همین طور تا آخر. سپس این طرز عمل را در مورد نه نمونه منتخب انجام می دهند و بوسیله دستگاه سنجش ساییدگی مقاومت در مقابل ساییدگی را در مورد نمونه هایی که تحت طرز عمل مزبور قرار گرفته اند و نمونه هایی که تحت این طرز عمل قرار نگرفته اند، ارزیابی می کند. نه مورد مقاومت در مقابل ساییدگی در نمونه ای که این طرز عمل در مورد آن اعمال شده است، منهای مقاومت در مقابل ساییدگی در نمونه ای که این طرز عمل در مورد آن اعمال نشده است به شرح زیرند:**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0/1 | 1/1 | 2/2 | 1/2 | 0/6 | 1/7 | -0/2 | 3/1 | 2/6 |

**الف) با استفاده از آزمون علامت و به ازای سطح معنادار بودن تقریبی 5 درصد، تعیین کنید آیا این طرز عمل تاثیری بر میانگین مقاومت در مقابل ساییدگی دارد یا نه.**

**ب) با استفاده از آزمون رتبه با علامت و به ازای سطح معنادار بودن 5 درصد، تعیین کنید آی ا این طرز عمل تاثیری بر میانگین مقاومت در مقابل ساییدگی دارد یا نه.**

**پاسخ:**

**29-تمایلی وجود دارد که معلوم شود از چه نوع صافی باید در جلو صفحه اسیلوسکپ استفاده کرد تا مسئول دستگاه رادار بتواند به سادگی به وجود آماجهای مورد نظر پی ببرد. به منظور تامین این خواسته، آزمایشی طراحی شده است. برای ایجاد اشکال در پی بردن به آماج، نوفه ای به صفحه می دهیم. علامت دومی، که نمایشگر آماج است، به صفحه می دهیم و شدت وضوح آن نسبت به صفر را آنقدر می آفزاییم که مشاهده گر آنرا کشف کند. سپس میزانی از وضوح را که مشاهده گر در آن برای اولین بار به علامت مربوط به آماج پی می برد، ثبت می کنیم. با این فرض که همه مردم دقیقا به گونه ای یکسان نمی بینند، این تجربه را توسط مشاهده گر دیگری تکرا می کنیم. پس از آنکه مجموعه ای از اطلاعات در مورد یک نوع صافی روی صفحه ثبت شد، با استفاده از مشاهده گرها مجموعه اطلاعات دیگری در مورد نوع متفاوتی از صافی به دست می آوریم. هریک از مقادیر عددی موجود در جدول داده ها با شدت وضوح آماج در اولین لحظه کشف آن توسط مشاهده گر نسبت مستقیم دارد.**

| مشاهده گر | صافی شماره 1 | صافی شماره 2 |
|---|---|---|
| 1 | 90 | 88 |
| 2 | 87 | 90 |
| 3 | 93 | 97 |
| 4 | 96 | 87 |
| 5 | 94 | 90 |
| 6 | 88 | 96 |
| 7 | 90 | 94 |
| 8 | 84 | 90 |
| 9 | 101 | 100 |
| 10 | 96 | 93 |
| 11 | 90 | 95 |
| 12 | 82 | 86 |
| 13 | 93 | 89 |
| 14 | 90 | 92 |
| 15 | 96 | 98 |
| 16 | 87 | 95 |
| 17 | 99 | 102 |
| 18 | 101 | 105 |
| 19 | 79 | 85 |
| 20 | 98 | 97 |
| 21 | 81 | 88 |

**الف) با فرض توزیع نرمال آزمون یکسان بودن صافیها را انجام دهید** ($a = 0.05$).

**ب) برای آزمایش یکسان بودن صافیها از آزمونی ناپارامتری استفاده کنید** ($a = 0.05$).

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$X$: صافی شماره 1

Y: صافی شماره 2

$$a = 0.05$$

$$\begin{cases} H_0 : m_X = m_Y \\ H_1 : m_X \neq m_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : m_X - m_Y = 0 \\ H_1 : m_X - m_Y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : m_D = 0 \\ H_1 : m_D \neq 0 \end{cases}$$

$$D_i = X_i - Y_i$$

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D_i$ | 2 | -3 | -4 | 9 | 4 | -8 | -4 | -6 | 1 | 3 | -5 |
| i | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | |
| $D_i$ | -4 | 4 | -2 | -2 | -8 | -3 | -4 | -6 | 1 | -7 | |

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{21} D_i}{21} = -2$$

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(D_i - \overline{D}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{21}\left(D_i - \overline{D}\right)^2}{20} = 20.4$$

$$A = \left[-t_{a/2;n-1}, t_{a/2;n-1}\right] = \left[-t_{0.025;20}, t_{0.025;20}\right] = \left[-2.086, 2.086\right]$$

$$t = \frac{\overline{D}\sqrt{n}}{S_D} = \frac{-2\sqrt{21}}{\sqrt{20.4}} = -2.03$$

حال از آنجا که مقدار t در داخل ناحیه پذیرش قرار ندارد پس فرض صفر $(H_0 : m_X = m_Y)$ را نمی پذیریم. بنابراین صافی ها یکسان نیستند.

**30- موتوری کوچک برای کاربرد خاصی ساخته می شود. در این کاربرد، خصیصه مهم موتور گشتاور شروع است. به منظور تعیین گشتاور شروع موتور از دو وسیله آزمایش استفاده می کنیم. این تمایل وجود دارد که تعیین شود آیا دو وسیله آزمایش نتایج معادلی به دست می دهند یا اینکه به دلیل تفاوتهای ناچیز در روش آزمایش یکی از دو وسیله همواره نتایج بزرگتری نسبت به دیگری می دهد. نتایج به شرح زیر است:**

| موتور | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 0/41 | 0/38 |
| 2 | 0/45 | 0/40 |
| 3 | 0/36 | 0/32 |
| 4 | 0/49 | 0/50 |
| 5 | 0/39 | 0/31 |
| 6 | 0/54 | 0/52 |
| 7 | 0/38 | 0/32 |
| 8 | 0/43 | 0/36 |

**الف) با استفاده از آزمون علامت تعیین کنید آیا دو وسیله آزمایش در سطح معنادار بودن 5 درصد، با هم فرق دارند یا نه. ب) با استفاده از آزمون رتبه با علامت و در سطح معنادار بودن 5 درصد تعیین کنید آیا دو وسیله از هم متفاوتند یا نه.**

**پاسخ:**

**31- نه زوج یکسان از نمونه ها، تحت دو نوع تنش قرار می گیرند. عملکرد آنها را اندازه گیری می کنیم ونتایج زیر را به دست می آوریم:**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| نوع 1: | 92 | 86 | 93 | 91 | 93 | 90 | 86 | 89 | 91 | 88 |
| نوع 2: | 88 | 85 | 82 | 90 | 81 | 93 | 87 | 92 | 86 | 85 |

**فرض عدم وجود تفاوت در عملکرد دو نوع کشش را، در سطح معنادار بودن 5 درصد به وسیله روشهای نرمال و ناپارامتری (هر دو) آزمایش کنید.**

**پاسخ:**

**روش نرمال:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

X: کشش نوع 1

Y: کشش نوع 2

$$a = 0.05$$

$$\begin{cases} H_0 : m_X = m_Y \\ H_1 : m_X \neq m_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : m_X - m_Y = 0 \\ H_1 : m_X - m_Y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : m_D = 0 \\ H_1 : m_D \neq 0 \end{cases}$$

$$D_i = X_i - Y_i$$

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D_i$ | 4 | 1 | 11 | 1 | 12 | -3 | -1 | -3 | -5 | 3 |

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{10} D_i}{10} = 3$$

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(D_i - \overline{D}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{10} \left(D_i - \overline{D}\right)^2}{9} = 27.33$$

$$A = \left[-t_{a/2;n-1}, t_{a/2;n-1}\right] = \left[-t_{0.025;9}, t_{0.025;9}\right] = [-2.262, 2.262]$$

$$t = \frac{\overline{D}\sqrt{n}}{S_D} = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{27.33}} = 1.814$$

حال از آنجا که مقدار t در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد پس فرض صفر $(H_0 : m_X = m_Y)$ را می پذیریم. بنابراین دو نوع کشش یکسان هستند.

**32- تمایلی مبنی بر تعیین این مطلب وجود دارد که آیا طرز عمل خاصی برای تهیه بتن تاثیری بر مقاومت بتن می گذارد یا نه. قرار است تجربه کوچکی بر اساس انباشته ای مفروض از مواد خام انجام گیرد. نمونه ها قرار است به طور تصلدفی به دو گروه مساوی تقسیم سوند به طوری که گروه 2 در معرض این طرز عمل خاص قرار گیرد. شیوه کار چنان است که اگر تفاوتی میان میانگینهای مقاومت دو گروه نباشد، با احتمال 0/95 این نتیجه گرفته شود. به علاوه اگر میانگینهای مقاومت تفاوتی به اندازه 12 کیلوگرم بر سانتیمتر مربع داشته باشند، با استفاده از این شیوه با احتمال 0/75 باید متفاوت بودن آنها را نتیجه بگیریم. احساس می شود که طرز عمل خاص تاثیری بر تغییرپذیری ندارد و به این ترتیب می توان فرض کرد که تغییر پذیری دو گروه یکسان است. بر اساس یک برآورد انحراف معیار 3 کیلوگرم بر سانتیمتر مربع است. الف) اندازه نمونه مورد نیاز برای هر گروه چقدر است؟ ب) تصور کنید**

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_{1i}-\overline{X}_1\right)^2 = 402 \qquad \overline{X}_1 = 295$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_{2i}-\overline{X}_2\right)^2 = 54 \qquad \overline{X}_2 = 315$$

**و n مقدار به دست آمده در بند الف باشد. آیا باید نتیجه گرفت که طرز عمل تاثیری بر مقاومت ندارد؟ ج) آیا داده های بالا دال بر صحت رابطه $s_1 = s_2$ است؟**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$X_1$ : گروهی که در معرض عمل خاص نیست.

$X_2$ : گروهی که در معرض عمل خاص است.

$$1-a = 0.95 \Rightarrow a = 0.05$$

$$1-b = 0.75 \Rightarrow b = 0.25$$

$$s_{X1} = s_{X2} = 3$$

$$\begin{cases} H_0 : m_{X1} = m_{X2} \\ H_1 : m_{X1} - m_{X2} = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : m_{X1} - m_{X2} = 0 \\ H_1 : m_{X1} - m_{X2} \neq 0 \end{cases}$$

لازم بذکر است فرض $H_0$ حاصل احتمال $a$ و فرض $H_1$ حاصل احتمال $b$ می باشد.

الف) از آنجا که آزمون فوق دو طرفه است خواهیم داشت:

$$n = n_{X1} = n_{X2} = \frac{\left(Z_{a/2} + Z_b\right)^2\left(s_{X1}^2 + s_{X2}^2\right)}{\left(m_{X1}-m_{X2}\right)^2} = \frac{(1.96+0.67)^2(9+9)}{(12)^2} \approx 1$$

ب) با توجه به دوطرفه بودن آمزمون فرض خواهیم داشت:

$$A = \left[-t_{a/2, n_{X1}+n_{X1}-2}, t_{a/2, n_{X1}+n_{X1}-2}\right] = \left[-t_{0.025, n_{X1}+n_{X1}-2}, t_{0.025, n_{X1}+n_{X1}-2}\right] = ???$$

از آنجا که واریانسها با هم برابرند خواهیم داشت:

$$S_{X1}^2=\frac{1}{n_{X1}-1}\sum\left(X_{1i}-\overline{X}_1\right)=\frac{1}{n-1}(402)=???$$

$$S_{X2}^2=\frac{1}{n_{X2}-1}\sum\left(X_{2i}-\overline{X}_2\right)=\frac{1}{n-1}(54)=???$$

$$S_P^2=\sqrt{\frac{(n_{X1}-1)S_{X1}^2+(n_{X2}-1)S_{X2}^2}{n_{X1}+n_{X2}-2}}=???$$

$$t=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_{X1}}+\frac{1}{n_{X2}}}}=???$$

ج) برای آزمایش این مورد خواهیم داشت:

$$\begin{cases}H_0: s_{X1}=s_{X2}\\ H_1: s_{X1}\neq s_{X2}\end{cases}$$

با توجه به دوطرفه بودن آزمون فرض بالا خواهیم داشت:

$$A=\left[F_{1-\alpha/2,n_{X1}-1,n_{X2}-1},F_{\alpha/2,n_{X1}-1,n_{X2}-1}\right]=???$$

$$F=\frac{S_{X2}^2}{S_{X1}^2}=???$$

در بند ج توجه داشته باشید بدلیل آنکه در فرض صفر $\frac{s_{X1}}{s_{X2}}=1$ منظور گردیده است بنابراین در محاسبه مقدار آماره آزمون رابطه قرار گیری عکس فرض صفر است یعنی $\frac{S_{X2}^2}{S_{X1}^2}$.

**33- نوع تازه مغزه،A برای مقاومتهای برقی بر این اساس که خصیصه معینی را بهبود می بخشد ارائه شده است. کاهش در خصیصه مورد بحث نوعی بهبود شمرده می شود. قصد تعیین این مطلب وجود دارد که آیا مغزه A نسبت به مغزه نوع استاندارد، B، بهبودی در بر دارد یا نه، نه مقاومت را از هر نوع مغزه را انتخاب می کنیم. یک مقاومت با مغزه A و یک مقاومت با مغزه B در سطح شماره یک قدرت الکتریکی مورد آزمایش قرار می گیرند و خصیصه هر دو مقاومت در این قدرت آندازه گیری می شود. در سطح 2ی قدرت نیز یک مقاومت با مغزه A و یک مقاومت با مغزه B را آزمایش می کنیم. زوج دیگری را در سطح 3 و زوج بعدی را در سطح 4،... و زوج آخر را در سطح 9 اندازه گیری می کنیم. X را معرف متغیر تصادفی نظیر ویژگی مربوط به مقاومت مغزهA و Y را معرف متغیر تصادفی نظیر ویژگی مربوط به مقاومت مغزه B می گیریم. فرض می کنیم $X_i$ به ازای $i=1,2,...,9$، مقدار ویژگی در سطح i قدرت برای مقاومت مغزه A باشد. $Y_i$را نیز به ازای $i=1,2,...,9$، به طریق مشابهی تفسیر می کنیم. فرض می کنیم داده ها بصورت:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X_1=1$ | $Y_1=2$ | $X_6=2$ | $Y_6=3$ |
| $X_2=2$ | $Y_2=3$ | $X_7=3$ | $Y_7=1$ |
| $X_3=3$ | $Y_3=1$ | $X_8=1$ | $Y_8=2$ |
| $X_4=2$ | $Y_4=4$ | $X_9=1$ | $Y_9=2$ |
| $X_5=2$ | $Y_5=3$ | | |

**باشند. الف) تنها با این فرض که توزیعهای X و Y متقارن و پیوسته اند، فرض زیر را در سطح معنادار بودن 2/5 درصد آزمایش کنید (از دو آزمون استفاده کنید)**

$$H: m_X \geq m_Y$$
$$A: m_X < m_Y$$

**ب) فرض زیر را با این شرط که X و Y توزیع نرمال با واریانس 2 دارند، در سطح معنادار بودن 2/5 درصد آزمایش کنید (از داده های فوق استفاده کنید)**

$$H: m_X \geq m_Y$$
$$A: m_X < m_Y$$

**پاسخ:**

ب)با توجه به مفروضات این بند خواهیم داشت:

$$a = 0.025$$
$$s_X^2 = s_Y^2 = 2$$
$$\begin{cases} H_0: m_X \geq m_Y \\ H_1: m_X < m_Y \end{cases}$$
$$n_X = n_Y = 9$$

حال با توجه به یکطرفه بودن آزمون فرض، ناحیه پذیرش و آماره آزمون برابر است با:

$$A = [-t_a, +\infty) = [-t_{0.025}, +\infty) = [-2.120, +\infty)$$
$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y}}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{2}{9} + \frac{2}{9}}}$$

حال برای محاسبه مقدار آماره آزمون مقادیر $\overline{X}$ و $\overline{Y}$ را محاسبه می نماییم:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{9} X_i}{9} = 1.88$$
$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{9} Y_i}{9} = 2.33$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$A = [-t_a, +\infty) = [-t_{0.025}, +\infty) = [-2.120, +\infty)$$
$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y}}} = \frac{1.88 - 2.33}{\sqrt{\frac{2}{9} + \frac{2}{9}}} = -0.675$$

حال از آنجا که مقدار t در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد پس فرض صفر ($H_0: m_X \geq m_Y$) را می پذیریم.

**34- معلمان یک مدرسه مایل به مقایسه یک روش نوین آموزشی با روش متداولند. به منظور اینکه تاثیرات ناشی از تغییر پذیری در توان دانش آموزان تا حد ممکن کنترل شود، تعداد n مجموعه دوقلوی همانند را از**

**میان دانش آموزان انتخاب می کنیم. یکی از دوقلوها از هر مجموعه را به روش جدید و کودک همزادش را به روش متداول آموزش می دهیم. در پایان یک سال امتحان برگزار می کنیم. $X_i$ را معرف نمرات امتحان یکی از دو قلوهای مجموعه $i$ام می گیریم، که با استفاده از روش جدید آموزش می بینید و $Y_i$ را معرف نمره امتحان همزاد دیگر مجموعه $i$ام می گیریمفرض می کنیم نمره امتحان مجموعه های مختلف دوقلوها مستقل است. همچنین فرض می کنیم $X_1,...,X_n$ و $Y_1,...,Y_n$، متغییرهای تصادفی با توزیع نرمالند و به ازای $i=1,...,n$، $\mathrm{E}(X_i)-\mathrm{E}(Y_i)=m$ است. برای هر تفاوت $X_i-Y_i$، انحراف معیار $s$ را فرض، و تصور می کنیم نزدیک 10 باشد. الف)هدف تعیین اینکه آیا تفاوتی در کارایی دو روش وجود دارد یا نه را دنبال می کنیم. اگر تفاوتی وجود نداشته باشد، باید با احتمال 0/95 به این نتیجه رسید. اگر تفاوتی معادل 10 در کارایی وجود داشته باشد، به این نتیجه نیز باید با احتمال 0/95 رسید. نحوه انجام آزمایش و اندازه نمونه مورد نیاز را توضیح دهید. ب) اگر $\overline{X}=90$ و $\overline{Y}=95$ و $\sum_{i=1}^{n}(X_i-Y_i)^2=2400$ باشد، به چه نتیجه ای می توان رسید؟ ج) تصور کنید تمام $Y_i$ها به استثنا 6 تا از آنها از $X_i$ بزرگترند. به ازای سطح معنادار بودن 5 درصد و با استفاده از شیوه ناپارامتری فرض مورد نظر را آزمایش کنید؟**

**پاسخ:**

**35- یک دونده سرعت از یک دانشگاه معروف در هر یک از فصلهای مسابقه سالهای 1969و 1970 در ده مسابقه شرکت می کند. مشاهدات سال 1969 را با $X_1, X_2,...,X_{10}$ و مشاهدات سال 1970 را با $Y_1, Y_2,...,Y_{10}$ معرفی کنید. بین دو فصل مسابقات، دونده به یک بیماری نادر استوایی مبتلا شده و تمام موی انبوه سر خود را از دست می دهد. اولیای مدرسه معتقدند که، به علت کاهش مقاومت باد، دونده در سال 1970 بسیار سریعتر از سال 1969 می دود یعنی $m_Y < m_X$ است.**

| 1969 | 1970 |
|---|---|
| 9/6 | 9/7 |
| 9/9 | 9/7 |
| 10/1 | 9/9 |
| 9/8 | 10/0 |
| 9/8 | 9/9 |
| 9/9 | 10/0 |
| 10/1 | 9/8 |
| 9/9 | 9/8 |
| 10/0 | 9/7 |
| 9/9 | 9/5 |

$\overline{X}=9.9$ $\quad \sum X_i^2=980.30$ $\quad \overline{Y}=9.8$ $\quad \sum Y_i^2=960.62$

**الف) در سطح معنادار بودن 5 درصد، فرض $s_X^2=s_Y^2$ را آزمایش کنید. ب) با استفاده از نتیجه گیری بند الف، فرض $m_Y=m_X$ را در برابر گزینه دوم $m_Y < m_X$ را در سطح مهنادار بودن 5 درصد آزمایش کنید.**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$a = 0.05$$
$$n_X = n_Y = 10$$
$$\overline{X} = \frac{\sum X}{n_X} = \frac{99}{10} = 9.9$$
$$\overline{Y} = \frac{\sum Y}{n_Y} = \frac{98}{10} = 9.8$$
$$S_X^2 = \frac{\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n_X - 1} = \frac{0.2}{9} = 0.022$$
$$S_Y^2 = \frac{\sum \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{n_Y - 1} = \frac{0.22}{9} = 0.024$$

$$\begin{cases} H_0 : s_X^2 = s_Y^2 \\ H_1 : s_X^2 \neq s_Y^2 \end{cases}$$

الف) حال با توجه به دوطرفه بودن آزمون فرض و همچنین مجهول بودن میانگینها خواهیم داشت:

$$A = \left[F_{1-a/2,1-n_1,1-n_2}, F_{a/2,1-n_1,1-n_2}\right] = \left[F_{1-0.025,9,9}, F_{0.025,9,9}\right] = [0.248,4.03]$$
$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{0.022}{0.024} = 0.916$$

حال از آنجا که مقدار F در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد پس فرض صفر $(H_0 : s_X = s_Y)$ را می پذیریم.

ب) حال از آنجا که در بند الف مسئله فرض برابری واریانسها را بررسی و تایید نموده ایم از آماره آزمون t استفاده می کنیم و خواهیم داشت:

توجه داشته باشید آزمون فرض زیر مورد نظر این بند می باشد:

$$\begin{cases} H_0 : m_X = m_Y \\ H_1 : m_X > m_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : m_X \leq m_Y \\ H_1 : m_X > m_Y \end{cases}$$

حال داریم:

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} = \frac{9.9 - 9.8}{S_P\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}}$$

حال از آنجا که مقدار متغییر $S_P$ مجهول می باشد توسط فرمول زیر آنرا محاسبه می کنیم:

$$S_P^2 = \frac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2} = \frac{(10-1)0.022 + (10-1)0.024}{10+10-2} = 0.023$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} = \frac{9.9 - 9.8}{0.1516\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = 1.47$$
$$A = \left(-\infty, t_{a;(n_X + n_Y - 2)}\right] = \left(-\infty, t_{0.05;(10+10-2)}\right] = (-\infty, 1.734]$$

حال از آنجا که مقدار آماره آزمون در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد پس فرض صفر $(H_0 : m_X \le m_Y)$ یعنی همان$(H_0 : m_X = m_Y)$ را می پذیریم.

در حل این سئوال توجه به دو نکته زیر الزامی است:

$$1-\begin{cases} H_0 : q = 10 \\ H_1 : q = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : q \ge 10 \\ H_1 : q < 10 \end{cases}$$

$$2-\begin{cases} H_0 : q = 8 \\ H_1 : q = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : q \le 8 \\ H_1 : q > 8 \end{cases}$$

**36- در مورد مسئله 4 تصمیم گرفتیم که تساوی واریانسهای مورد آزمایش قرار گیرد. اگر $S_X^2 = 960$ و $S_Y^2 = 1330$ باشد، در سطح معنادار بودن 1 درصد، در مورد صحت این فرض تحقیق کنید.**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله 4 و همچنین خروجی های بندهای سه گانه آن خواهیم داشت:

X: تنش ماده خشک شده در معرض هوا

Y: تنش ماده خشک شده در کوره

$$a = 0.01$$
$$n_X = 5$$
$$n_Y = 5$$
$$S_X^2 = 960$$
$$S_Y^2 = 1330$$
$$\begin{cases} H_0 : s_X = s_Y \\ H_1 : s_X \ne s_Y \end{cases}$$

حال با توجه به دوطرفه بودن آزمون فرض و همچنین مجهول بودن میانگینها خواهیم داشت:

$$A = \left[F_{1-a/2,1-n_1,1-n_2}, F_{a/2,1-n_1,1-n_2}\right] = \left[F_{1-0.005,4,4}, F_{0.005,4,4}\right] = [0.0432, 23.15]$$

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{960}{1330} = 0.72$$

حال از آنجا که مقدار F در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد پس فرض صفر $(H_0 : s_X = s_Y)$ را می پذیریم.

در پاسخ به این سئوال توجه به نکته زیر الزامی است:

$$F_{a,n1,n2} = \frac{1}{F_{1-a,n2,n1}}$$

**37- در مورد مسئله 22، در مورد فرض تستوی واریانسها تحقیق کنید. به منظور تامین احتمال 0/8 برای کشف تفاوت در واریانسها، نسبت $s_C / s_T$ چقدر باید باشد؟**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله 22 و همچنین خروجی های دو بند آن خواهیم داشت:

$$a = 0.01$$
$$1-b = 0.8 \Rightarrow b = 0.2$$
$$n_T = n_C = 4$$
$$S_T^2 = 0.0132$$
$$S_C^2 = 0.0128$$
$$\begin{cases} H_0 : s_T = s_C \\ H_1 : s_T \neq s_C \end{cases}$$

حال با توجه به دوطرفه بودن آزمون فرض و همچنین مجهول بودن میانگینها خواهیم داشت:

$$A = \left[F_{1-a/2,1-n_1,1-n_2}, F_{a/2,1-n_1,1-n_2}\right] = \left[F_{1-0.005,3,3}, F_{0.005,3,3}\right] = [0.021,47.47]$$
$$F = \frac{S_C^2}{S_T^2} = \frac{0.0128}{0.0132} = 0.96$$

حال از آنجا که مقدار F در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد پس فرض صفر ($H_0 : s_X = s_Y$) را می پذیریم.

$$\frac{c^2_{b,n-1}}{c^2_{1-a/2,n-1}} = \frac{s_T^2}{s_C^2} \Rightarrow \frac{c^2_{0.2,3}}{c^2_{1-0.005,3}} = \frac{s_T^2}{s_C^2} \Rightarrow \frac{c^2_{0.2,3}}{c^2_{1-0.005,3}} \approx 60$$
$$\frac{s_C}{s_T} \approx 0.13$$

در پاسخ به این سئوال توجه به نکته زیر الزامی است:

$$F_{a,n1,n2} = \frac{1}{F_{1-a,n2,n1}}$$

**38- تمایلی مبنی بر تعیین این مطلب وجود دارد که آیا کارگر B کالایی ارائه می کند که (برحسب انحراف معیار) تغییر پذیرتر از کالای ارائه شده کارگر A است یا نه. آمادگی پذیرش مخاطره ای حداکثر به میزان 5 درصد برای تغییر پذیرتر اعلام کردن کالای B نسبت به کالای A، هرگاه عملا این طور نباشد وجود دارد. از سوی دیگر، هر گاه تغییرپذیری کالای B عملا یک ونیم برابر تغییرپذیری کالای A باشد، آمادگی پذیرش مخاطره ای بیش از 0/30 برای اظهار این مطلب که تغییرپذیری کالای B معادل تغییرپذیری کالای A یا کمتر از آن است وجود ندارد. اندازه های نمونه و حد پذیرشی که در آزمایش خود بکار می برید، را تعیین کنید.**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$a = 0.05$$
$$b = 0.3$$
$$\begin{cases} H_0 : s_A \geq s_B \\ H_1 : s_A < s_B \end{cases}$$

با توجه به یکطرفه بودن آزمون فرض داریم:

$$\frac{c^2_{1-b;n-1}}{c^2_{a;n-1}} = \frac{s_A^2}{s_B^2} \Rightarrow \frac{c^2_{0.7;n-1}}{c^2_{0.05;n-1}} = \left(\frac{1}{1.5}\right)^2 \Rightarrow n = n_A = n_B \approx 50$$

از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A = \left[0, F_{a, n_A - 1, n_B - 1}\right] = \left[0, F_{0.05,49,49}\right] = [0,1.53]$$

**39- مقدار موم موجود بر سطح هر طرف از پاکتهای ساخته شده از کاغذ موم اندود متغیری تصادفی است. شواهد موجود این اعتقاد را تقویت می کند که تغییر پذیری مقدار موم سطح داخلی کاغذ از تغییرپذیری مقدار موم موجود بر سطح خارجی آن بیشتر است. یک نمونه از 75 مشاهده از مقدار موم موجود بر هر طرف این پاکتها فراهم شده و داده های زیر ثبت شده است:**

موم برحسب پوند در واحد سطح

| سطح داخلی | سطح خارجی |
| --- | --- |
| $\overline{Y} = 0.652$ | $\overline{X} = 0.948$ |
| $\sum Y_i^2 = 84$ | $\sum X_i^2 = 91$ |

**به منظور تعیین اینکه آیا تغییرپذیری مقدار موم سطح داخلی بیش از تغییرپذیری مقدار موم سطح خارجی است یک آزمایش انجام دهید ($a = 0.01$).**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

X: موم در سطح داخلی

Y: موم در سطح خارجی

$$a = 0.01$$
$$n_X = 75$$
$$n_Y = 75$$
$$\begin{cases} H_0 : s_X \geq s_Y \\ H_1 : s_X < s_Y \end{cases}$$

از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش و آماره آزمون عبارت خواهند بود از:

$$A = \left[0, F_{a, n_X - 1, n_Y - 1}\right] = \left[0, F_{0.01,74,74}\right] = [0,1.53]$$

$$F = \frac{S_Y^2}{S_X^2}$$

حال برای محاسبه میزان آماره آزمون نیاز به محاسبه مقادیر واریانس سطح داخلی و خارجی می باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$S_X^2 = \frac{\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n_X - 1}$$
$$S_Y^2 = \frac{\sum \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{n_Y - 1}$$

توجه داشته باشید:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(X_i-\overline{X}\right)-\left(\overline{X}-m\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2-n\left(\overline{X}-m\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i\right)^2-n\left(\overline{X}\right)^2$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$S_X^2=\frac{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n_X-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i\right)^2-n\left(\overline{X}\right)^2}{n_X-1}=\frac{\sum_{i=1}^{75}\left(X_i\right)^2-75\left(\overline{X}\right)^2}{75-1}=\frac{91-75(0.948)^2}{75-1}=0.32$$

$$S_Y^2=\frac{\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2}{n_Y-1}=\frac{\sum_{J=1}^{n}\left(Y_J\right)^2-n\left(\overline{Y}\right)^2}{n_Y-1}=\frac{\sum_{J=1}^{75}\left(Y_J\right)^2-75\left(\overline{Y}\right)^2}{75-1}=\frac{84-75(0.652)^2}{75-1}=0.7$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$F=\frac{S_Y^2}{S_X^2}=\frac{0.7}{0.32}=2.18$$

حال از آنجا که مقدار آماره آزمون در داخل ناحیه پذیرش قرار ندارد پس فرض صفر $(H_0: s_X=s_Y)$ را نمی پذیریم.

**40- در مورد آزمایش برابری دو واریانس ، طوری اندازه های نمونه و ناحیه پذیرش مورد نیاز را تعیین کنید که هرگاه واریانسها مساوی باشند، مخاطره ماکسیمم 0/05 برای اعلام اینکه یک واریانس بزرگتر از دیگری است وجود داشته باشد و هرگاه یک واریانس چهار برابر دیگری باشد مخاطره ای معادل 0/01 برای مساوی اعلام کردن آنها موجود باشد.**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$a=0.05$$

$$b=0.01$$

$$\begin{cases}H_0: s_1^2=s_2^2\\ H_1: s_1^2<s_2^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}H_0: s_1^2\geq s_2^2\\ H_1: s_1^2<s_2^2\end{cases}$$

$$\frac{s_2^2}{s_1^2}=4$$

حال از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا تعداد نمونه مورد نیاز وناحیه پذیرش برابر است با:

$$\frac{c_{1-b,n-1}^2}{c_{a,n-1}^2}=\frac{s_1^2}{s_2^2}\Rightarrow\frac{c_{1-0.1,n-1}^2}{c_{0.05,n-1}^2}=\frac{1}{4}\Rightarrow n=n_1=n_2\approx 20$$

$$A=\left[0,F_{a,n_X-1,n_Y-1}\right]=\left[0,F_{0.05,19,19}\right]=[0,2.51]$$

درسئوال بالا توجه داشته باشید $s_2^2$ معادل $s^2$ در فرمولهای موجود در کتاب می باشد.

**41- در مورد آزمایش برابری دو واریانس، اندازه های نمونه و ناحیه پذیرش مورد نیاز را طوری تعیین کنید که مخاطره ماکسیمم 0/05 در زمینه اعلام بزرگتر بودن یک واریانس از دیگری علی رغم تساوی آنها و مخاطره 0/10 در زمینه اعلام تساوی آنها علی رغم اینکه یکی 0/36 برابر دیگری باشد را تامین کند.**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$a = 0.05$$
$$b = 0.1$$
$$\begin{cases} H_0 : s_1^2 = s_2^2 \\ H_1 : s_1^2 < s_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : s_1^2 \geq s_2^2 \\ H_1 : s_1^2 < s_2^2 \end{cases}$$
$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = 0.36$$

حال از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا تعداد نمونه مورد نیاز وناحیه پذیرش برابر است با:

$$\frac{c_{1-b,n-1}^2}{c_{a,n-1}^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \Rightarrow \frac{c_{1-0.1,n-1}^2}{c_{0.05,n-1}^2} = 0.36 \Rightarrow n = n_1 = n_2 \approx 16$$

$$A = [0, F_{a,n_X-1,n_Y-1}] = [0, F_{0.05,15,15}] = [0,2.86]$$

حال چنانچه مقدار آماره آزمون $F = \frac{S_2^2}{S_1^2}$ در داخل ناحیه پذیرش باشد فرض صفر را می پذیریم و درغیر اینصورت رد می کنیم.

درسئوال بالا توجه داشته باشید $s_2^2$ معادل $s^2$ در فرمولهای موجود در کتاب می باشد.

**42-نتایج زیر برای دو نمونه محاسبه شده اند که هر یک از مشاهدات آنها توزیع نرمال دارد:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| X: | $n_X = 8$ | $\sum X = 12$ | $\sum X^2 = 48$ |
| Y: | $n_Y = 11$ | $\sum Y = 22$ | $\sum Y^2 = 80$ |

**فرض $s_X = s_Y$ را به ازای سطح معنادار بودن 1 درصد در برابر گزینه $s_X > s_Y$ آزمایش کنید.**

**پاسخ:**

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$a = 0.01$$
$$\begin{cases} H_0 : s_X = s_Y \\ H_1 : s_X > s_Y \end{cases}$$

از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش و آماره آزمون عبارت خواهند بود از:

$$A = [0, F_{a,n_X-1,n_Y-1}] = [0, F_{0.01,7,10}] = [0,5.20]$$

$$F = \frac{S_Y^2}{S_X^2}$$

حال برای محاسبه میزان آماره آزمون نیاز به محاسبه مقادیر واریانس سطح داخلی و خارجی می باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$S_X^2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n_X - 1}$$

$$S_Y^2 = \frac{\sum (Y_i - \overline{Y})^2}{n_Y - 1}$$

توجه داشته باشید:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} ((X_i - \overline{X}) - (\overline{X} - m)) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 - n(\overline{X} - m)^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i)^2 - n(\overline{X})^2$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$S_X^2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n_X - 1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i)^2 - n(\overline{X})^2}{n_X - 1} = \frac{\sum_{i=1}^{8} (X_i)^2 - 8(\overline{X})^2}{8 - 1} = \frac{48 - 8(2)^2}{8 - 1} = 4.29$$

$$S_Y^2 = \frac{\sum (Y_i - \overline{Y})^2}{n_Y - 1} = \frac{\sum_{J=1}^{n} (Y_J)^2 - n(\overline{Y})^2}{n_Y - 1} = \frac{\sum_{J=1}^{11} (Y_J)^2 - 11(\overline{Y})^2}{11 - 1} = \frac{80 - 11(22)^2}{11 - 1} = 3.6$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$F = \frac{S_Y^2}{S_X^2} = \frac{3.6}{4.29} = 0.84$$

حال از آنجا که مقدار آماره آزمون در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد پس فرض صفر ($H_0 : s_X = s_Y$) را می پذیریم.

**43- فرض کنید X و Y متغییرهای تصادفی با توزیع نرمال اند. تصور کنید نمونه ای متشکل از 25 مشاهده از هریک گرفته ایم و در سطح معنادار بودن 1 درصد آزمون فرض $s_X = s_Y$ را برگزار می کنیم. ضابطه رد فرض را ارائه و منحنی OC آزمون را برای سه حالت زیر رسم کنید: الف) فقط وقتی $s_X > s_Y$ رد کردن مطلوب باشد. ب) فقط وقتی $s_X < s_Y$ است رد کردن مطلوب باشد. ج) هرگاه $s_X \neq s_Y$ است، رد کردن مطلوب باشد.**

**پاسخ:**

**44- تصور کنید برای هریک از سه شیوه عمل، 10 آزمایش صورت گرفته و مقادیر زیر برای واریانسهای نمونه به دست آمده است: 1/8، 2/1 و 6/4 در سطح معنادار بودن 1 درصد، تساوی واریانسها را آزمایش کنید.**

**پاسخ:**

**45- تغییر پذیری شش ماشین مورد آزمایش قرار می گیرد. از هر ماشین پنج مشاهده فراهم شده و واریانسهای نمونه محاسبه می شوند. نتایج عبارتند از:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 16/0 | 16/5 | 11/8 | 14/6 | 13/8 | 16/2 |

**آیا همه ماشینها واریانسی یکسان دارند ($a = 0.05$ را بکار ببرید)؟**

**پاسخ:**

**46-در مورد آزمون فرض $m_X = m_Y$ هر گاه دو انحراف معیار معلوم باشند، رابطه مربوط به تعیین اندازه نمونه را برای شیوه یک طرفه پیدا کنید.**

**پاسخ:**

با توجه به فرض سئوال مبنی بر یکطرفه بودن آزمون خواهیم داشت:

$$A = [-Z_a, +\infty)$$

$$b = P\left(\frac{\overline{X} - m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < -Z_a\right) \Rightarrow b = P\left(\frac{\overline{X} - m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > Z_a\right) \Rightarrow Z_{a+b} = \frac{\overline{X} - m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \Rightarrow Z_a + Z_b = \frac{\overline{X} - m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$$\Rightarrow (Z_a + Z_b)^2 = \frac{(\overline{X} - m_0)^2}{\frac{s^2}{n}} \Rightarrow n = \frac{(Z_a + Z_b)^2 s^2}{(\overline{X} - m_0)^2} \approx n = \frac{(Z_a + Z_b)^2 s^2}{(m_1 - m_0)^2}$$

**47- در مورد آزمون فرض $m_X = m_Y$ هر گاه دو انحراف معیار معلوم باشند، رابطه مربوط به تعیین اندازه نمونه را برای شیوه دو طرفه پیدا کنید.**

**پاسخ:**

با توجه به فرض سئوال مبنی بر دوطرفه بودن آزمون خواهیم داشت:

$$A = \left[-Z_{a/2}, Z_{a/2}\right]$$

$$b = P\left(\frac{\overline{X} - m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < -Z_{a/2}\right) + P\left(\frac{\overline{X} - m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > Z_{a/2}\right) \Rightarrow b = P\left(\frac{\overline{X} - m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > Z_{a/2}\right) \Rightarrow Z_{a/2+b} = \frac{\overline{X} - m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$$\Rightarrow Z_{a/2} + Z_b = \frac{\overline{X} - m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \Rightarrow \left(Z_{a/2} + Z_b\right)^2 = \frac{(\overline{X} - m_0)^2}{\frac{s^2}{n}} \Rightarrow n = \frac{\left(Z_{a/2} + Z_b\right)^2 s^2}{(\overline{X} - m_0)^2} \approx n = \frac{\left(Z_{a/2} + Z_b\right)^2 s^2}{(m_1 - m_0)^2}$$

توجه داشته باشید مقدار حد بالایی $P\left(\frac{\overline{X} - m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > Z_{a/2}\right)$ بدلیل کوچک بودن صفر فرض گردید و از محاسبات کنار گذاشته شد.

**48- در مورد آزمون فرض $s_X = s_Y$ رابطه مربوط به تعیین اندازه نمونه را برای شیوه دو طرفه پیدا کنید.**

**پاسخ:**

$a$ = خطای نوع اول = احتمال رد فرض صفر در حالی که این فرض درست است.

$b$ = خطای نوع دوم = احتمال پذیرش فرض صفر در حالی که این فرض غلط است.

$\left[c^2_{1-\frac{a}{2};n-1}, c^2_{\frac{a}{2};n-1}\right]$ = ناحیه پذیرش در حالت دوطرفه در مورد آزمون فرض $s_X = s_Y$ است.

بنابراین داریم:

$$b = P\left( c^2_{1-\frac{a}{2};n-1} \le \frac{(n-1)S^2}{s_0^{\ 2}} \le c^2_{\frac{a}{2};n-1} \middle| s = s_X \ne s_Y \right) = P\left( c^2_{1-\frac{a}{2};n-1} * \frac{s_Y^{\ 2}}{s_X^{\ 2}} \le c^2_{n-1} \le c^2_{\frac{a}{2};n-1} * \frac{s_Y^{\ 2}}{s_X^{\ 2}} \right)$$

اگر نسبت $\frac{s_X^{\ 2}}{s_Y^{\ 2}}$ مقداری کوچکتر از 1 داشته باشد، خواهیم دید ناحیه سمت چپ بسیار کوچک می باشد و می توان از آن صرف نظر نمود $P\left( c^2_{1-\frac{a}{2};n-1} * \frac{s_Y^{\ 2}}{s_X^{\ 2}} \le c^2_{n-1} \right) \approx 0$،

حال خواهیم داشت:

$$b = P\left( c^2_{n-1} \le c^2_{\frac{a}{2};n-1} * \frac{s_Y^{\ 2}}{s_X^{\ 2}} \right) \Rightarrow c^2_{1-b;n-1} = c^2_{\frac{a}{2};n-1} * \frac{s_Y^{\ 2}}{s_X^{\ 2}} \Rightarrow \frac{s_Y^{\ 2}}{s_X^{\ 2}} = \frac{c^2_{1-b;n-1}}{c^2_{\frac{a}{2};n-1}}$$

حال اگر نسبت $\frac{s_Y^{\ 2}}{s_X^{\ 2}}$ مقداری بزرگتر از 1 داشته باشد، خواهیم دید ناحیه سمت راست بسیار کوچک می باشد و می توان از آن صرف نظر نمود $P\left( c^2_{n-1} \le c^2_{\frac{a}{2};n-1} * \frac{s_Y^{\ 2}}{s_X^{\ 2}} \right) \approx 0$،

حال خواهیم داشت:

$$b = P\left( c^2_{1-\frac{a}{2};n-1} * \frac{s_Y^{\ 2}}{s_X^{\ 2}} \le c^2_{n-1} \right) \Rightarrow c^2_{b;n-1} = c^2_{1-\frac{a}{2};n-1} * \frac{s_Y^{\ 2}}{s_X^{\ 2}} \Rightarrow \frac{s_Y^{\ 2}}{s_X^{\ 2}} = \frac{c^2_{b;n-1}}{c^2_{1-\frac{a}{2};n-1}}$$