مسائل فصل هشتم

در مسائل زیر می توان فرض کرد که یک نمونه تصادفی گرفته می شود و هر متغیر تصادفی تقریبا توزیع نرمال دارد. (مگر خلاف آن تصریح شود). هر گاه دو نمونه تصادفی مورد نیاز باشد، می توان فرض کرد که نمونه تصادفی دوم مستقل از اولی است و هر متغیر تصادفی نیز تقریبا توزیع نرمال دارد.

۸-۱) تصور کنید $T_۱$ و $T_۲$ براوردهای کننده های θ هستند، به طوری که $E(T_۱)=\theta, E(T_۲)=\theta/۲$، $Var(T_۱)=۶, Var(T_۲)=۲$ است. کدام یک از آنها براورد کننده بهتری برای θ است؟ چرا؟

پاسخ:

$$\begin{cases} E(T_۱)=\theta \\ E(T_۲)=\dfrac{\theta}{۲} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{var}(T_۱)=۶ \\ \mathrm{var}(T_۲)=۲ \end{cases}$$

کارایی $T_۱$ نسبت به $T_۲$: $\dfrac{E(T_۲-\theta)^۲}{E(T_۱-\theta)^۲}=\dfrac{E\left((T_۲-\frac{\theta}{۲})-\frac{\theta}{۲}\right)^۲}{\mathrm{var}(T_۱)}=\dfrac{\mathrm{var}(T_۲)+\frac{\theta^۲}{۴}}{۶}$

$$\frac{۸+\theta^۲}{۲۴}<۱ \quad \Rightarrow \theta^۲<۱۶ \quad \Rightarrow \ |\theta|<۴$$

هر گاه $|\theta|<۴$ باشد، آنگاه، $T_۲$ برآورد کننده ای بهتر از $T_۱$ است.

۸-۲) در نمونه گیری از یک توزیع دوجمله ای، نشان دهید که درصد پیشامدهای مشاهده شده دریک نمونه، براورد کننده نااریبی است برای این احتمال که پیشامدی معین روی خواهد داد. واریانس درصد مشاهده شده چیست؟

پاسخ:

احتمال روی دادن k بار از یک مشاهده در n بار نمونه گیری

$$P(x=k)=\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}$$

$$E(x)=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}P^k(1-P)^{n-k}$$

$$\Rightarrow E(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}P(P)^{k-1}(1-P)^{n-k}=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}P(P)^{k-1}(1-P)^{n-k}$$

حال فرض کنید تعداد دفعات نمونه گیری بسیار بزرگ باشد، یعنی $n\to+\infty$

$$E(x)=nP\sum_{k=1}^{\infty}\binom{n-1}{k-1}(P)^{k-1}(1-P)^{n-k}=nP\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}P^k(1-P)^{n-k}$$

$$E(x)=np\Rightarrow E(\frac{x}{n})=\frac{1}{n}E(x)=p$$

$$\sigma_x^2=np(1-p)\overset{\bar{x}=\frac{x}{n}}{\Rightarrow}\sigma_{\frac{x}{n}}^2=\frac{\sigma_x^2}{n^2}=\frac{p(1-p)}{n}$$

با توجه به اینکه $\hat{p}=p$، بنابراین براوردکننده $\hat{p}$ ناریب است. حال با استفاده از حد پایین کریمر-رائو کمترین مقدار واریانس ناریبی را بدست می آوریم:

$$\operatorname{var}\hat{\theta}\geq\frac{1}{nE\left\{\left[\frac{d}{d\theta}Lnf_x(x,\lambda)\right]^2\right\}}$$

$$f_X(x,p)=\binom{n}{x}P^x(1-P)^{n-x}\Rightarrow Lnf_X(x,p)=Ln\binom{n}{x}+xLnP+(n-x)Ln(1-P)$$

$$\frac{d}{dp}Lnf_X(x,p)=\frac{x}{p}-\frac{n-x}{1-p}=\frac{x-np}{p(1-p)}$$

$$E\left\{\left[\frac{d}{dp}Lnf_x(x,p)\right]^2\right\}=E\left[\frac{x-np}{p(1-p)}\right]^2=\frac{E(x-np)^2}{p^2(1-p)^2}=\frac{\sigma_x^2}{p^2(1-p)^2}=\frac{np(1-p)}{p^2(1-p)^2}$$

$$Var\hat{\theta} \geq \frac{p(1-p)}{n^2}$$

۸-۳) تصور کنید T_1 و T_2 براورد کننده های θ هستند. $E(T_2) > \theta, E(T_1) = \theta$،

واریانس T_1 مساوی ٤، واریانس T_2 مساوی ۲ و $E(T_2 - \theta)^2 = 7$ است. کدام از آنها

براورد کننده «بهتری» برای θ است؟ چرا؟

پاسخ:

$$\begin{cases} E(T_1) = \theta \\ E(T_2) > \theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{var}(T_1) = 4 \\ \text{var}(T_2) = 2 \end{cases} \qquad E(T_2 - \theta)^2 = 7$$

کارایی T_1 نسبت به T_2: $\frac{E(T_2 - \theta)^2}{E(T_1 - \theta)^2} = \frac{7}{4} > 1$

T_1 براورد کننده بهتری نسبت به T_2 است.

۸-٤) تصور کنید T براساس یک نمونه تصادفی n تایی براورد کننده ای برای θ است. اگر $T = \sum a_i X_i, E(X_i) = \theta$ باشد، a_i ها چه محدودیتی باید داشته باشند که T براورد کننده های نااریب برای θ شود؟

پاسخ:

$$E(x_i) = \theta$$

$$E(T) = E(\sum a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \theta$$

از آنجا که T برآورد کننده نااریبی برای θ باید باشد بنابراین

$$E(T) = \theta \Rightarrow \sum a_i \theta = \theta \Rightarrow \sum a_i = 1$$

۸-٥) ثابت کنید $S'^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 / n$ براورد کننده ای اریب برای σ^2 است.

پاسخ:

$$S'^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{n-1}{n}.\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{n-1}{n}.S^2$$

براساس مطالب فصل چهارم کتاب می دانیم $E(S^2)=\sigma^2$، بنابراین:

$$E(S'^2)=\frac{n-1}{n}.E(S^2)=\frac{n-1}{n}.\sigma^2 \neq \sigma^2 \Rightarrow E(\underset{S'^2}{\hat{\sigma}^2}) \neq \sigma^2 \rightarrow \text{اریب}$$

بنابراین S'^2 براوردکننده ی اریب σ^2 است.

۸-٦) می توان تعداد میخ پرچهای ناقص، D به کار رفته در ساخت بال هواپیما را دارای توزیع پواسون با پارامتر λ، یعنی

$$P_D(k,\lambda)=P\{D=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=0,1,2,....$$

فرض کرد. یک نمونه تصادفی متشکل از n بال را مورد مشاهده قرار می دهیم. الف) $\hat{\lambda}$، یعنی MLE مربوط به λ را پیدا کنید؛ ب) آیا براورد کننده نااریب است؟ ج) حد پایین کریمو- رائو را در مورد واریانس براورد کننده های نااریب پیدا کنید. توجه کنید که $E(D)=\lambda$ و $E(D)^2=\lambda^2+\lambda$ است؛ د) آیا $\hat{\lambda}$ براورد کننده نااریب با کمترین واریانس λاست؟ درست بودن پاسخ خود را ثابت کنید؛ هـ) براورد کننده λ را با استفاده از روش گشتاورها پیدا کنید.

پاسخ:

$$MLE=L=P_D(0,\lambda).P_D(1,\lambda)...P_D(n,\lambda)=\prod_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k.e^{-\lambda}}{k!}$$

$$l=LnL=\sum_{k=0}^{n}(kLn\lambda-\lambda-Ln(k!))$$

$$\text{الف)}\ \frac{\partial l}{\partial \lambda}=\cdot \Rightarrow \sum_{k=\cdot}^{n}(\frac{k}{\lambda}-۱)=\cdot \Rightarrow \frac{۱}{\lambda}\sum_{k=\cdot}^{n}k-n=\cdot \Rightarrow$$

$$\hat{\lambda}=\bar{x}=\frac{\sum_{k=\cdot}^{n}k}{n}=\lambda$$

برآورد کننده $\hat{\lambda}$ ناریب است.

ب) برآورد کننده $\hat{\lambda}$ ناریب است.

$$\text{ج)}\ \operatorname{var}\hat{\theta}\geq \frac{۱}{nE\left\{\left[\frac{d}{d\theta}Lnf_x(x,\lambda)\right]^{۲}\right\}}=\frac{۱}{nE\left\{(\frac{k}{\lambda}-۱)^{۲}\right\}}$$

$$\operatorname{var}\hat{\theta}\geq \frac{۱}{nE\left[\frac{k^{۲}}{\lambda^{۲}}-\frac{۲k}{\lambda}+۱\right]}=\frac{۱}{n\left[\frac{۱}{\lambda^{۲}}(\lambda^{۲}+\lambda)-\frac{۲\lambda}{\lambda}+۱\right]}=\frac{۱}{n(\frac{۱}{\lambda})}$$

$$\operatorname{var}\hat{\theta}\geq \frac{\lambda}{n}$$

$$\text{د)}\ E(\bar{x})=\lambda$$

$$\operatorname{var}(\bar{x})=\operatorname{var}(\hat{\lambda})=E\left[(\bar{x}-\lambda)^{۲}\right]=\operatorname{var}(\frac{\sum x_i}{n})=\frac{۱}{n^{۲}}\sum \operatorname{var}(x_i)=\frac{n}{n^{۲}}(\lambda^{۲}+\lambda-\lambda^{۲})$$

$$=\operatorname{var}(\bar{x})=\frac{\lambda}{n}$$

$$\text{د)}\ \hat{\lambda}=M_۱=\frac{\sum x_i}{n}=\bar{x}$$

۸-۷) عمر لامپهای خلا از توزیع نمایی پیروی می کند، یعنی تابع چگالی به شرح زیر است:

$$f_X(z,\theta)=\begin{cases}\frac{۱}{\theta}e^{-z/\theta}, & z\geq \cdot\\ \cdot, & z<\cdot\end{cases}$$

یک نمونه تصادفی n تایی گرفته می شود. الف) با استفاده از روش گشتاورها براورد کننده ای برای θ پیدا کنید؛ ب) MLE مربوط به θ، یعنی $\hat{\theta}$ را پیدا کنید؛ ج) MLE مربوط به $\eta = ۱/\theta$ را پیدا کنید؛ د) پایایی یک لامپ خلا در زمان $\tau_{\circ}$ طبق رابطه

$$R(\tau_{\circ}) = P\{X > \tau_{\circ}\} = e^{-\tau_{\circ}/\theta}$$

تعریف می شود. MLE مربوط به $R(\tau_{.})$، یعنی $\hat{R}(\tau_{.})$، را پیدا کنید.

پاسخ:

الف) $\theta = \dfrac{\sum_{i=۱}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$

ب) $MLE = L = \prod_{z=۰}^{\infty} \dfrac{۱}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} \Rightarrow LnL = l = nLn\dfrac{۱}{\theta} + \sum_{i=۱}^{n}(-\dfrac{x_i}{\theta})$

$$\frac{\partial(LnL)}{\partial\theta} = ۰ \Rightarrow -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i}{\theta^{۲}} = ۰$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

ج) $\theta = \dfrac{۱}{\eta} \Rightarrow \hat{\eta} = \dfrac{۱}{\hat{\theta}} = \dfrac{۱}{\bar{x}}$

د) $R(\tau_{.}) = P\{x > \tau_{.}\} = e^{-\frac{\tau_{.}}{\theta}} \Rightarrow \hat{R}(\tau_{.}) = e^{-\frac{\tau_{.}}{\hat{\theta}}} = e^{-\frac{\tau_{.}}{\bar{x}}}$

۸-۸) در مساله ۷، حد پایین کریمر-رائو برای واریانس براورد کننده های ناریب را پیدا کنید. آیا MLE بر براورد کننده ناریب با کمترین واریانس θ منطبق می شود؟

پاسخ:

$$\operatorname{var}\hat{\theta} \geq \frac{1}{nE\left\{\left[\frac{d}{d\theta}Lnf_x(x,\theta)\right]^2\right\}}$$

$$\operatorname{var}\hat{\theta} \geq \frac{1}{nE\left\{\left[\frac{d}{d\theta}(Ln\frac{1}{\theta}-\frac{z}{\theta})\right]^2\right\}} = \frac{1}{nE\left\{\left[(-\frac{1}{\theta}+\frac{z}{\theta^2})\right]^2\right\}}$$

$$\operatorname{var}\hat{\theta} \geq \frac{1}{nE\left\{(\frac{z-\theta}{\theta^2})^2\right\}} = \frac{1}{n\frac{1}{\theta^4}E\left\{(z-\theta)^2\right\}} = \frac{\theta^4}{n\theta^2}$$

توزیع نمایی است $\Rightarrow E(x)=\sigma_x=\theta$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n} = \frac{\theta^2}{n}$$

بلی، MLE بر براورد کننده ناریب منطبق نمی باشد.

۸-۹) می دانیم که مقاومت کششی لاستیک، توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و انحراف معیار معلوم ۸۰psi دارد. حد پایین مشخصات طراحی، L برای این ماده ۲۸۴۰psi است. به این ترتیب، درصد ضایعات، p به صورت درصد اقلامی که زیر این حد پایین قرار می گیرند تعریف می شود. قرار است یک نمونه تصادفی ۲۵ تایی گرفته شود. عبارت MLE مربوط به p را پیدا کنید. (راهنمایی: ابتدا MLE مربوط به μ را پیدا کنید).

پاسخ:

$$\begin{cases}\mu=\mu_x\\ \sigma=80\,psi\end{cases}$$

در ابتدا، مقدار MLE مربوط به μ را پیدا می کنیم، فرض می کنیم برای بدست آوردن آن یک نمونه n تایی می گیریم:

$$L = f_x(x_1,\mu), f_x(x_2,\mu), \dots, f_x(x_n,\mu)$$

$$\ell = LnL = Ln(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n - \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} = Ln(\frac{1}{80\sqrt{2\pi}})^n - \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{12800}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \ell}{\partial \mu} = \frac{2}{12800}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \Rightarrow \mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

حال MLE مربوط به p را بدست می آوریم، احتمال اینکه از ۲۵ نمونه، k نمونه بالای حد پایین مشخصات طراحی قرار بگیرد، برابر است با:

$$P(D=k) = \binom{25}{k} P^k (1-P)^{25-k}$$

احتمال اینکه یک نمونه پایین حد پایین مشخصات طراحی قرار بگیرد، برابر است با:

$$P\{d=1\} = P\{x < 2840\} = P\left\{z < \frac{2840-\mu}{80}\right\}$$

$$MLE = L = P\{D=x_1\}.P\{D=x_2\}.P\{D=x_3\},\dots,P\{D=x_{25}\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\binom{25}{x_i} P^{x_i-1}(1-P)^{25-x_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial P} = 0 \Rightarrow \ell = LnL = \sum_{i=1}^{25}\binom{25}{x_i} + x_i Lnp + (25-x_i)Ln(1-p)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial p} = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{25} x_i}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{25}(25-x_i)}{1-p} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{25\bar{x}}{p} = \frac{25^2 - 25\bar{x}}{1-p} \Rightarrow \hat{p} = \frac{\bar{x}}{25}$$

۸-۱۰) در زیر بخش ۵.۲.۸ براساس یک نمونه تصادفی n تایی MLE، $\hat{p}$، برای پارامتر متغیر تصادفی برنویی، p به دست آمد. همچنین می دانیم که جمع n متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع برنویی، T با پارامتر p توزیع دو جمله ای با پارامترهای n و p دارد، یعنی

$$P(T=k)=\binom{n}{k}p^{k}(۱-p)^{n-k}, k=۰,۱,\ldots,n$$

MLE مربوط به p را براساس تنها یک مشاهده از متغیر تصادفی T پیدا کنید. آیا این پاسخ بر $\hat{p}$ منطبق است؟

پاسخ:

$$L=P\{x=x\}=p^{x}(۱-p)^{x} = p^{x}(۱-p)^{۱-x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial P}=xp^{x-۱}(۱-p)^{۱-x}-(۱-x)p^{x}(۱-p)^{-x}=۰$$

$$\left[x(۱-p)-(۱-x)p\right]p^{x-۱}(۱-p)^{-x}=۰ \Rightarrow x-xp-p+xp=۰$$

$\hat{p}=x$ این پاسخ بر $\hat{P}$ منطبق است.

۸-۱۱) فرض می شود عمر، T، ترانزیستورها توزیع ویبول دارد، یعنی تابع چگالی به صورت

$$f_{T}(z)=\begin{cases}\frac{\beta}{\eta}z^{\beta-۱}e^{\frac{-z^{\beta}}{\eta}} & z\geq ۰\\ ۰ & z<۰\end{cases}$$

است که $\beta,\eta>0$ است. یک نمونه تصادفی n تایی مشاهده می شود. اگر β ثابت و معلوم باشد، الف) MLE مربوط به η را پیدا کنید؛ ب) پایایی یک ترانزیستور در زمان $\tau_\circ$ طبق رابطه

$$R(\tau_\circ)=P\{\tau_\circ<T\}=e^{-\tau_\circ^{\beta}/\eta}$$

تعریف می شود. MLE مربوط به $R(\tau_\circ)$، یعنی $\hat{R}(\tau_\circ)$ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$f_T(z)=\begin{cases}\frac{\beta}{\eta}z^{\beta-1}e^{\frac{-z^{\beta}}{\eta}} & z\geq 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

$$MLE=L=\prod_{z=0}^{\infty}\frac{\beta}{\eta}x_i^{\beta-1}e^{-\frac{z^{\beta}}{\eta}}\Rightarrow LnL=l=\sum_{i=1}^{n}\left(Ln\frac{\beta}{\eta}+(\beta-1)Lnx_i-\frac{x_i^{\beta}}{\eta}\right)$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial P}=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{\eta}+\frac{x_i^{\beta}}{\eta^2}\right)=0\Rightarrow\frac{n}{\eta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta}}{\eta^2}$$

$$\hat{\eta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta}}{n}$$

$$\hat{R}(\tau_\circ)=e^{-\frac{\tau_\circ^{\beta}}{\hat{\eta}}}=e^{-\frac{\tau_\circ^{\beta}}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta}}{n}\right)}}$$

۸-۱۲) در مثال «کنترل فرایند» که در زیر بخش ۵.۲.۸ معرفی شد، MLE پارامتر p، یک متغیر تصادفی برنویی را براساس یک نمونه تصادفی n تایی به دست آوردیم.

الف) حد پایین کریمر-رائو برای واریانس تمام براورد کننده های ناااریب را پیدا کنید؛

ب) آیا MLE بر براورد کننده ناارب با کمترین واریـانس p منطبـق اسـت؟ ج) بـراورد کننده p را با استفاده از روش گشتاورها پیدا کنید.

پاسخ:

$$\operatorname{var}\hat{\theta} \geq \frac{۱}{nE\left\{\left[\frac{d}{dp}Lnf_x(x,p)\right]^۲\right\}}$$

$$\operatorname{var}\hat{P} \geq \frac{۱}{nE\left\{\left[\frac{d}{dp}Lnp^x(۱-p)^{۱-x}\right]^۲\right\}} = \frac{۱}{nE\left\{\left[\frac{d}{dp}[xLnp+(۱-x)Ln(۱-p)]\right]^۲\right\}}$$

$$\operatorname{var}\hat{P} \geq \frac{۱}{nE\left\{\left[\frac{x}{p}+\frac{(۱-x)(-۱)}{۱-p}\right]^۲\right\}} = \frac{۱}{nE\left\{\frac{(x-np)^۲}{p^۲(۱-p)^۲}\right\}} = \frac{p(۱-p)}{n}$$

ب) $f_X(x,p)=\binom{n}{x}p^x(۱-p)^{n-x}$

$$MLE = L == \prod_{i=۱}^{n} p^{x_i}(۱-p)^{۱-x_i} \Rightarrow \ell = LnL = \sum_{i=۱}^{n}\left(x_iLnp+(۱-x_i)Ln(۱-p)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\ell}{\partial p} = ۰ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{n}\left(\frac{x_i}{p}-\frac{۱-x_i}{۱-p}\right) = ۰ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{n}\left(\frac{x_i-p}{p(۱-p)}\right) = ۰$$

$$\Rightarrow \hat{p} = \frac{\sum_{i=۱}^{n}x_i}{n} = \overline{x}$$

بلی، MLE بر کمترین واریانس p منطبق است.

ج) $p = \frac{\sum_{i=۱}^{n}x_i}{n} = \overline{x}$

۸-۱۳) در مساله ٦، براورد کننده بیز λ را با استفاده از میانگین مربع خطا به عنوان تابع زیان با فرض وجود تابع چگالی پیشین یکنواخت (در محدوده $[-\infty,+\infty]$) پیدا کنید. (راهنمایی: در جدول ۱۸ این توزیع پیشین حالت خاصی از توزیع گاما به شرط $C=۱$ است، هر گاه D به سمت بینهایت میل کند.)

پاسخ:

$$P_D(k,\lambda)=P\{D=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad k=۰,۱,۲,\ldots$$

$$\text{بنابر جدول ۱۸} \Rightarrow \hat{\lambda}=\frac{(\sum x_i+C)D}{nD+۱}$$

$$\hat{\lambda}=\frac{(\sum x_i+۱)D}{nD+۱} \Rightarrow \hat{\lambda}=\lim_{D\to+\infty}\frac{D(\sum x_i+۱)}{nD+۱}=\frac{\sum x_i}{n}$$

۸-۱٤) در مساله ٦، براورد کننده بیز λ را با استفاده از میانگین مربع خطا به عنوان تابع زیان و با این فرض که توزیع پیشین λ به ازای $\lambda\geq ۰$، به صورت $e^{-\lambda}$ باشد، پیدا کنید. (راهنمایی: نتایج ارائه شده در جدول ۱۸ را به کار ببرید.)

پاسخ:

$$P_D(k,\lambda)=P\{D=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad \lambda\geq ۰$$

$$\text{توزیع پیشین پارامتر } \lambda=\frac{۱}{\Gamma(C)D^C}\lambda^{(C-۱)}e^{-\frac{\lambda}{D}}=e^{-\lambda}\Rightarrow C=۱,D=۱$$

$$\hat{\lambda}=\frac{(\sum x_i+C)}{nD+۱}=\frac{\sum x_i+۱}{n+۱}$$

۸-۱٥) در مساله ۷، براورد کننده بیز $\eta=۱/\theta$ را با استفاده از میانگین مربع خطا به عنوان تابع زیان و با فرض وجود تابع چگالی پیشین یکنواخت (در محدوده

$[-\infty,+\infty]$) پیدا کنید. (راهنمایی: در جدول ۱.۸ این توزیع پیشین حالت خاصی از توزیع گاما با شرایط $C=1$ است، هر گاه D به سمت بینهایت میل کند.)

پاسخ:

$$R(\hat{\eta},\eta)=(\hat{\eta}-\eta)^2=(\frac{1}{\hat{\theta}}-\frac{1}{\theta})^2$$

$$f_x(z,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{z}{\theta}} & z\geq 0\\ 0 & z<0\end{cases}\Rightarrow f_x(z,\eta)=\begin{cases}\eta e^{-\eta z} & z\geq 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}C=1\\ D\to+\infty\end{cases}$$

$$\eta \text{ توزیع پیشین پارامتر}=\frac{1}{\Gamma(C)D^C}\lambda^{(C-1)}e^{-\frac{\lambda}{D}}=\eta e^{-\eta z}$$

$$\hat{\eta}=\frac{(n+C)D}{D(\sum x_i+1)}\Rightarrow \hat{\eta}=\lim_{D\to+\infty}\frac{(n+C)}{(\sum x_i+\frac{1}{D})}=\frac{n+1}{\sum x_i}$$

۸-۱۶) در مساله ۷، براورد کننده بیز $\eta=1/\theta$ را با استفاده از میانگین مربع خطا به عنوان تابع زیان و با این فرض که توزیع پیشین η به ازای $\eta\geq 0$، به صورت $e^{-\eta}$ است، پیدا کنید. (راهنمایی: نتایج ارائه شده در جدول ۱.۸ را به کار ببرید)

پاسخ:

$$\eta \text{ توزیع پیشین پارامتر}=e^{-\eta}\Rightarrow C=1,D=1$$

$$\text{بنابراین داریم}\Rightarrow \hat{\eta}=\frac{1+n}{(\sum x_i+1)}$$

۸-۱۷) در مثال «کنترل فرایند» که در زیر بخش ۵.۲.۸ معرفی شد، بر اساس یک نمونه تصادفی n تایی، MLE پارامتر، p یک متغیر تصادفی برنولیی را به دست آوردیم. با

استفاده از میانگین مربع خطا به عنوان تابع زیان و با این فرض کـه توزیـع پیشـین p در فاصله $[\cdot,١]$ یکنواخت است، براورد کننده بیز p را پیدا کنید. با این فرض که توزیـع پیشین p در فاصله $[\cdot,١]$ به صورت $٦p(١-p)$ است براورد کننده بیـز p را پیـدا کنیـد. (راهنمایی: نتایج ارائه شده در جدول ۱.۸ را به کار ببرید.)

پاسخ:

$$\frac{\Gamma(C+D)}{\Gamma(C)\Gamma(D)}p^{(C-١)}(١-p)^{D-١}=٦p(١-p)\Rightarrow ٦p(١-p)= \text{توزیع پیشین P در فاصله } [\cdot,١]$$

$$\Rightarrow C=٢,D=٢\Rightarrow \hat{P}=\frac{C+\sum x_i}{C+D+n}=\frac{٢+\sum x_i}{٢+٢+n}=\frac{\sum x_i+٢}{n+٤}$$

۸-۱۸) قرار است در مورد میانگین عمر پوتینها یک فاصله اطمینان یک طرفه پایین ۹۹ درصدی ارائه شود. به منظور اینکه حـد پـایین بـا احتمـال ۰/۹۵ بـیش از نـیم مـاه از میانگین واقعی فاصله نداشته باشد، به چند مشاهده نیاز اسـت؟ فـرض کنیـد انحـراف معیار عمر پوتینها مساوی $\frac{٣}{٢}$ ماه است.

پاسخ:

$$\sigma=\frac{٣}{٢}month\Rightarrow (d=\frac{\mu-\mu_\cdot}{\sigma},\beta)=(d=\frac{\cdot/٥}{\frac{٣}{٢}}=\frac{١}{٣},\beta=\cdot/٩٥)\Rightarrow n=٥$$

۸-۱۹) می توان نشان داد که توزیع نتایج مشاهده های مربوط به محموله هـای مـاده شیمیایی مفروضی، حول میـانگین واقعـی تـراکم یـک محمولـه مفـروض از آن مـاده، توزیع نرمال بـا انحـراف معیـار $\cdot/\cdot\cdot٥g/cc$ دارد. بـرای ارائـه بـراوردی بـر اسـاس میانگین n نمونه، که در ۹۵ درصد از موارد در فاصله $\cdot/\cdot\cdot٢g/cc$ از میـانگین واقعـی تراکم محموله باشد، باید از چه اندازه نمونه ای استفاده کرد؟

پاسخ:

$$\sigma = ٠/٠٠٥ g/cc$$

$$U - L = ٢K_{\frac{\alpha}{٢}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow ٢ \times ٠/٠٠٢ = ٢ \times ١/٩٦ \times \frac{٠/٠٠٥}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = ٤/٩ \Rightarrow n = ٢٤$$

۸-۲۰) مقاومت پارگی نوع خاصی پارچه در مورد چهار نمونه محاسبه شد و نتایج (بر حسب psi) ۱۸۲،۱۷۲،۱۷۶،۱۷۸ بود. براساس تجربه قبلی، انحراف معیار ۵psi است. فاصله اطمینانی ۹۹ درصدی برای مقدار متوسط مقاومت پارگی محموله پارچه را پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=١}^{٤} x_i}{٤} = ١٧٧ psi \\ \sigma = ٥ psi \end{cases} \Rightarrow [L, U] = [\bar{x} - k_{٠/٠١} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty)$$

$$= [١٧٧ - ٢/٣٢ \times \frac{٥}{٢}, +\infty) = [١٧١/٢, +\infty)$$

۸-۲۱) تراکم ۲۷ چاشنی انفجاری را تعیین کردیم و میانگین تراکم نمونه، ۱/۵۳، محاسبه شد. انحراف معیار، معلوم و مساوی ۰/۰۳ است. یک فاصله اطمینان ۹۵ درصد پایین برای تراکم پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} \bar{x} = ١/٥٣ \\ \sigma = ٠/٠٣ \\ ١ - \alpha = ٠/٩٥ \end{cases}$$

$$[L, U] = [\bar{x} - k_{٠/٠٥} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty)$$

$$=[۱/۵۳-۱/۶۴۵\times\frac{۰/۰۳}{\sqrt{۲۷}},+\infty)=[۱/۵۲,+\infty)$$

۸-۲۲) میانگین نمونه برد یک نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی از موشکهای انبار شده ۲۲۰۸ یارد محاسبه شده است. انحراف معیار، معلوم و مساوی ۴۰ یارد است. برای میانگین واقعی برد، فاصله اطمینانی ۹۹ درصدی پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} n=۱۰۰ \\ \bar{x}=۲۲۰۸ \\ \sigma=۴۰ \\ ۱-\alpha=۰/۹۹ \end{cases}$$

$$[L,U]=\left[\bar{x}-k_{۰/۰۰۵}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+k_{۰/۰۰۵}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$=\left[۲۲۰۸-۲/۵۷۵\times\frac{۴۰}{\sqrt{۱۰۰}},۲۲۰۸+۲/۵۷۵\times\frac{۴۰}{\sqrt{۱۰۰}}\right]=[۲۱۹۷/۷,۲۲۱۸/۳]$$

۸-۲۳) در مساله ۲۲، چند مشاهده مورد نیاز خواهد بود تا طول فاصله اطمینان ۲۰ یارد، ۵ یارد و یک یارد به دست آید؟

پاسخ:

الف) $L-U=۲k_{۰/۰۰۵}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=۲۰\Rightarrow ۲\times۲/۵۷۵\times\frac{۴۰}{\sqrt{n}}=۲۰\Rightarrow\sqrt{n}=۱۰/۳\Rightarrow n=۱۰۶$

ب) $L-U=۲k_{۰/۰۰۵}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=۵\Rightarrow ۲\times۲/۵۷۵\times\frac{۴۰}{\sqrt{n}}=۵\Rightarrow\sqrt{n}=۴۱/۲\Rightarrow n=۱۶۹۷$

ج) $L-U=۲k_{۰/۰۰۵}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=۱\Rightarrow ۲\times۲/۵۷۵\times\frac{۴۰}{\sqrt{n}}=۱\Rightarrow\sqrt{n}=۲۰۶\Rightarrow n=۴۲۴۳۶$

۸-۲٤) داده های زیر معرف اندازه گیریهای تخلخل یک نمونه از محموله زغـال اسـت.

فاصله اطمینانی ۹۵ درصدی برای میانگین واقعی پیدا کنید. فرض کنید $\sigma = \frac{1}{4}$ است.

۱/۹۰	۱/۹۷	۱/۹۷	۲/۳٤	۲/۰۷	۲/۱٦
۱/۹٤	۲/۳۱	۲/٤۷	۲/۱٥	۲/۳۲	۲/۱۹
۲/۱٦	۲/۱٥	۲/۱٤	۲/۲٥	۱/۸٦	۲/۳۱
۲/۰٤	۲/۲٤	۲/۱٥	۲/۱۱	۲/٤۸	۲/۳۰
۲/۲٥	۲/۰۷	۲/۰۹	۲/۰۱	۱/۹۱	۲/۲۱

پاسخ:

$$\begin{cases} \sigma = \frac{۱}{٤} \\ n = ۳۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum x_i = ٦٤/٤۳ \\ \bar{x} = ۲/۱٥ \\ ۱-\alpha = ۰/۹٥ \end{cases}$$

$$[L,U] = \left[\bar{x} - k_{۰/۰۲٥}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + k_{۰/۰۲٥}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[۲/۱٥ - ۱/۹٦ \times \frac{\frac{۱}{٤}}{\sqrt{۳۰}}, ۲/۱٥ + ۱/۹٦ \times \frac{\frac{۱}{٤}}{\sqrt{۳۰}}\right] = [۲/۰٦, ۲/۲٤]$$

۸-۲٥) بدون فرض $\sigma = \frac{۱}{٤}$، مساله ۲٤ را حل کنید. (توجه کنید که $S = ۰/۱٥۳$است).

پاسخ:

$$[L,U] = \left[\bar{x} - t_{۰/۰۲٥,۲۹}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{۰/۰۲٥,۲۹}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$=\left[۲/۱۵-۲/۰٤٥\times\frac{۰/۱۵۳}{\sqrt{۳۰}},۲/۱۵+۲/۰٤٥\times\frac{۰/۱۵۳}{\sqrt{۳۰}}\right]=[۲/۰۹,۲/۲۱]$$

۸-۲٦) با این فرض که براورد σ براساس نمونه ٤۰ یارد است. مساله ۲۳ را حل کنید. پاسخ شما چقدر تغییر می کند؟

پاسخ:

$$S=٤۰$$

الف) $L-U=۲t_{۰/۰۰۵,n-۱}\frac{S}{\sqrt{n}}=۲۰\Rightarrow t_{۰/۰۰۵,n-۱}\times\frac{٤۰}{\sqrt{n}}=۱۰\Rightarrow t_{۰/۰۰۵;n-۱}=۰/۲۵\sqrt{n}\Rightarrow n=۱۱٤$

ب) $L-U=۲t_{۰/۰۰۵,n-۱}\frac{S}{\sqrt{n}}=۵\Rightarrow\frac{t_{۰/۰۰۵,n-۱}}{\sqrt{n}}=\frac{۱}{۱٦}=۰/۰٦۲۵\Rightarrow n=۲۲٤$

ج) $L-U=۲t_{۰/۰۰۵,n-۱}\times\frac{٤۰}{\sqrt{n}}=۱\Rightarrow\frac{t_{۰/۰۰۵,n-۱}}{\sqrt{n}}=\frac{۱}{۸۰}=۰/۰۱۲۵\Rightarrow n=۲۵۳$

۸-۲۷) بدون فرض $\sigma=5$ مساله ۲۰ را حل کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}\bar{x}=۱۷۷\\ S^{۲}=۱۷/۳۳\Rightarrow S=٤/۱٦psi\end{cases}\qquad\begin{cases}n=٤\\ ۱-\alpha=۰/۹۹\end{cases}$$

$$[L,U]=\left[\bar{x}-t_{۰/۰۰۵,۳}\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{۰/۰۰۵,۳}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$=\left[۱۷۷-۵/۸٤۱\times\frac{٤/۱٦}{\sqrt{٤}},۱۷۷+۵/۸٤۱\times\frac{٤/۱٦}{\sqrt{٤}}\right]=[۱٦٤/۸۵,۱۸۹/۱۵]$$

۸-۲۸) مساله ۲۱ را با فرض $S=۰/۰٤$ (براساس نمونه) حل کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}S=۰/۰٤\\ n=۲۷\\ \bar{x}=۱/۵۳\end{cases}\qquad\{۱-\alpha=۰/۹۵$$

$$[L,U]=[\bar{x}-t_{۰/۰۵,۲۶}\frac{S}{\sqrt{۲۷}},+\infty)$$

$$=[۱/۵۳-۱/۷۰۶\times\frac{۰/۰۴}{\sqrt{۲۷}},+\infty)=[۱/۵۱۷,+\infty)$$

۸-۲۹) براساس داده های زیر، یک فاصله اطمینان ۹۹ درصدی بـرای قطـر مـیخ پـرچ ارائه کنید:

۶/۷۲	۶/۶۲	۶/۶۶	۶/۶۸
۶/۷۲	۶/۷۰	۶/۶۷	۶/۷۶
۶/۷۲	۶/۷۶	۶/۶۶	۶/۷۸
۶/۷۶	۶/۷۶	۶/۷۰	۶/۷۶
۶/۶۶	۶/۸۱	۶/۷۴	۶/۷۴
۶/۸۲	۶/۷۲	۶/۷۹	۶/۶۴
۶/۷۲	۶/۶۰	۶/۷۷	۶/۸۱
۶/۷۸	۶/۶۴	۶/۷۰	۶/۷۴
۶/۷۹	۶/۷۵	۶/۷۰	۶/۷۰

$\sum X^{۲}=۱۶۲۷/۵۵۹۵$ $\bar{X}=۶/۷۲۳۶$

پاسخ:

$$\begin{cases}\bar{x}=۶/۷۲۳۶\\ \sum x^{۲}=۱۶۲۷/۵۵۹۵\end{cases}\qquad \begin{cases}S^{۲}=\dfrac{\sum x^{۲}-n\bar{x}^{۲}}{n-۱}=\dfrac{۱۶۲۷/۵۵۹۵-۳۶\times(۶/۷۲۳۶)^{۲}}{۳۵}\\ S^{۲}=۳/۲۸\times۱۰^{-۳}\quad\Rightarrow S=۰/۰۵۷\end{cases}$$

$$[L,U]=\left[\bar{x}-t_{\cdot/\cdot\cdot\text{٥},\text{٣٥}}\frac{S}{\sqrt{\text{٣٦}}},\bar{x}+t_{\cdot/\cdot\cdot\text{٥},\text{٣٥}}\frac{S}{\sqrt{\text{٣٦}}}\right]$$

$$=\left[\text{٦/٧٢٣٦}-\text{٢/٧٢٧}\times\frac{\cdot/\cdot\text{٥٧}}{\text{٦}},\text{٦/٧٢٣٦}+\text{٢/٧٢٧}\times\frac{\cdot/\cdot\text{٥٧}}{\text{٦}}\right]$$

$$=[\text{٦/٦٩٧٧},\text{٦/٧٤٩٥}]$$

۸-۳۰) براساس یک نمونه متشکل از ۲۷ چاشنی ، اگر $S=\cdot/\cdot\text{٤}$ باشد، فاصله اطمینانی ۹۰ درصدی برای σ پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}n=\text{٢٧}\\ S=\cdot/\cdot\text{٤}\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha=\cdot/\text{١}\cdot\end{cases}$$

$$[L,U]=\left[S\sqrt{\frac{n-\text{١}}{x^{\text{٢}}_{\cdot/\cdot\text{٥};\text{٢٦}}}};S\sqrt{\frac{n-\text{١}}{x^{\text{٢}}_{\cdot/\text{٩٥};\text{٢٦}}}}\right]=\left[\cdot/\cdot\text{٤}\sqrt{\frac{\text{٢٦}}{\text{٣٨/٨٨٥}}};\cdot/\cdot\text{٤}\sqrt{\frac{\text{٢٦}}{\text{١٥/٣٧٩}}}\right]$$

$$[L,U]=[\cdot/\cdot\text{٣٢٧};\cdot/\cdot\text{٥٢}]$$

۸-۳۱) براساس داده های مساله ۲۹، فاصله اطمینانی ۹۵ درصدی برای σ پیدا کنید.

پاسخ:

$$[L,U]=\left[S\sqrt{\frac{n-\text{١}}{x^{\text{٢}}_{\cdot/\cdot\text{٢٥};\text{٣٥}}}};S\sqrt{\frac{n-\text{١}}{x^{\text{٢}}_{\cdot/\text{٩٧٥};\text{٣٥}}}}\right]$$

$$\begin{cases}n=\text{٣٦}\\ S=\cdot/\cdot\text{٥٧}\end{cases}\qquad\Rightarrow[L,U]=\left[\cdot/\cdot\text{٥٧}\sqrt{\frac{\text{٣٥}}{\text{٥٣/١٦}}},\cdot/\cdot\text{٥٧}\sqrt{\frac{\text{٣٥}}{\text{٢٠/٦١٢}}}\right]$$

$$=[\cdot/\cdot\text{٤٦};\cdot/\cdot\text{٧٤}].$$

۸-۳۲) قطر کامل شده کابل مسلح برق دارای توزیع نرمال است. نمونه ای ۲۰ تایی دارای میانگین ۰/۷۹۰ و انحراف معیار ۰/۰۱ است. برای σ,μ (به طور انفرادی) فواصل اطمینانی ۹۵ درصدی پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} n=۲۰ \\ ۱-\alpha=۰/۹۵ \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x}=۰/۷۹۰ \\ S=۰/۰۱ \end{cases}$$

فواصل اطمینان برای μ: $[L,U]=\left[\bar{x}-t_{۰/۰۲۵,۱۹}\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{۰/۰۲۵,۱۹}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$

$$=\left[۰/۷۹۰-۲/۰۹۳\times\frac{۰/۰۱}{\sqrt{۲۰}},۰/۷۹۰+۲/۰۹۳\times\frac{۰/۰۱}{\sqrt{۲۰}}\right]$$

$$=[۰/۷۸۵,۰/۷۹۵]$$

فاصله اطمینان برای σ:

$$[L,U]=\left[S\sqrt{\frac{n-۱}{x^۲_{۰/۰۲۵;۱۹}}};S\sqrt{\frac{n-۱}{x^۲_{۰/۹۷۵;۱۹}}}\right]=\left[۰/۰۱\sqrt{\frac{۱۹}{۳۲/۸۵۲}},۰/۰۱\sqrt{\frac{۱۹}{۸/۹۰۷}}\right]$$

$$=[۰/۰۰۷۶,۰/۰۱۴۶]$$

۸-۳۳) در مورد نمونه ای ۱۵ تایی داریم: $\sum(X_i-\bar{X})^۲=۱۷/۸$. برای σ، فواصل اطمینان ۹۵ درصدی پایین، بالا، و دوطرفه پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} n=۱۵ \\ \sum(x_i-\bar{x})^۲=۱۷/۸ \end{cases} \qquad \begin{cases} S^۲=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲}{n-۱}=\frac{۱۷/۸}{۱۴}=۱/۲۷ \\ S=۱/۱۲۷ \end{cases}$$

فاصله اطمینان ۹۵ درصدی پایین $=[L,U]=\left[S\sqrt{\frac{n-۱}{x^۲_{۰/۰۵,۱۴}}};+\infty\right]=\left[۱/۱۲۷\sqrt{\frac{۱۴}{۲۳/۶۸۵}},+\infty\right]$

$$=[\cdot/\text{٨٦٦},+\infty]$$

فاصله اطمینان ۹۵ درصدی بالا $=[L,U]=\left[\cdot,S\sqrt{\frac{n-1}{x^{2}_{\cdot/\text{٩٥},\text{١٤}}}}\right]=\left[\cdot,\text{١/١٢٧}\sqrt{\frac{\text{١٤}}{\text{٦/٥٧١}}}\right]$

$$=[\cdot,\text{١/٦٤٥}]$$

فاصله اطمینان ۹۵ درصدی دو طرفه $=[L,U]=\left[S\sqrt{\frac{n-1}{x^{2}_{\cdot/\cdot\text{٢٥};\text{١٤}}}};S\sqrt{\frac{n-1}{x^{2}_{\cdot/\text{٩٧٥};\text{١٤}}}}\right]$

$$=\left[\text{١/١٢٧}\sqrt{\frac{\text{١٤}}{\text{٢٦/١١٩}}},\text{١/١٢٧}\sqrt{\frac{\text{١٤}}{\text{٥/٦٢٩}}}\right]=[\cdot/\text{٨٢٥},\text{١/٧٧٧}]$$

۸-۳۴) با فرض $S=\text{٤}$، فاصله اطمینانی ۹۵ درصدی برای σ پیدا کنید. اگر S مبتنی بر ۱۰ درجه آزادی باشد؛ همچنین، اگر S مبتنی بر ۲۵ درجه آزادی باشد.

پاسخ:

$$\begin{cases} S=\text{٤} \\ \alpha=\cdot/\cdot\text{٥} \end{cases}$$

الف) $[L,U]=\left[S\sqrt{\frac{n-1}{x^{2}_{\cdot/\cdot\text{٢٥};\text{١٠}}}};S\sqrt{\frac{n-1}{x^{2}_{\cdot/\text{٩٧٥};\text{١٠}}}}\right]=\left[\text{٤}\sqrt{\frac{\text{١٠}}{\text{٢٠/٤٨٣}}},\text{٤}\sqrt{\frac{\text{١٠}}{\text{٣/٢٤٧}}}\right]$

$$=[\text{٢/٧٩٥},\text{٧/٠٢٠}]$$

ب) $[L,U]=\left[S\sqrt{\frac{n-1}{x^{2}_{\cdot/\cdot\text{٢٥};\text{٢٥}}}};S\sqrt{\frac{n-1}{x^{2}_{\cdot/\text{٩٧٥};\text{٢٥}}}}\right]=\left[\text{٤}\sqrt{\frac{\text{٢٥}}{\text{٤٠/٦٤٦}}},\text{٤}\sqrt{\frac{\text{٢٥}}{\text{١٣/١٢}}}\right]$

$$=[\text{٣/١٣٧},\text{٥/٥٢٢}]$$

۸-۳۵) به منظور آزمایش تفاوت تاثیر دو روش کشت گندم، تجربه ای اجرا می کنیم. ده قطعه زمین را شخم کم عمق و پانزده قطعه زمین را شخم عمیق می زنیم. میانگین استحصال گروه اول در هر جریب ۴۰/۸ بوشل و میانگین گروه دوم ۴۴/۷ بوشل

است. فرض کنید انحراف معیار شخم کم عمق معادل ۰/۶بوشل و انحراف معیار شخم عمیق ۰/۸ بوشل باشد. فاصله اطمینانی ۹۰ درصدی برای تفاوت استحصال ارائه کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}\bar{x}=44/7\\ n_x=15\end{cases}\quad \begin{cases}\bar{y}=40/8\\ n_y=10\end{cases}\quad \begin{cases}\sigma_x=0/8\\ \sigma_y=0/6\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha=0/10\\ \end{cases}$$

$$[L,U]=\left[\bar{x}-\bar{y}-k_{/0.25}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}},\bar{x}-\bar{y}+k_{/0.25}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}\right]$$

$$=\left[3/9-1/96\sqrt{\frac{0/64}{15}+\frac{0/36}{10}},3/9+1/96\sqrt{\frac{0/64}{15}+\frac{0/36}{10}}\right]$$

$$=[3/35,4/45]$$

۸-۳۶) بیست دور از مهمات رایج و ده دور از مهمات آزمایشی با توالی تصادفی شلیک شدند. میانگین فشار لوله مهمات رایج معادل ۴۱۹۰۰psi و میانگین فشار لوله مهمات آزمایشی معادل ۴۴۲۰۰psi بود. انحراف معیارها برای مهمات رایج و آزمایشی معلوم و هر دو ۲۲۵۰psi بودند. برای تغییر فشار، فواصل اطمینان ۹۵ درصدی بالا، پایین و دوطرفه پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}\bar{x}=44200\\ n_x=10\end{cases}\quad \begin{cases}\bar{y}=41900\\ n_y=20\end{cases}\quad \begin{cases}\sigma_x=\sigma_y=2250\\ \alpha=0/05\end{cases}$$

الف) فاصله اطمینان ۹۵ درصدی بالا: $[L,U]=\left(-\infty,\bar{x}-\bar{y}+k_{/05}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}\right]$

$$=\left(-\infty, ۲۳۰۰+۱/۶۴۵\sqrt{(\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۲۰})(۲۲۵۰)^۲}\right]=(-\infty, ۳۷۳۳]$$

ب) فاصله اطمینان ۹۵ درصدی پایین $[L,U]=\left[\bar{x}-\bar{y}-k_{./۰۵}\sqrt{\frac{\sigma_x^۲}{n_x}+\frac{\sigma_y^۲}{n_y}}, +\infty\right)$

$$=\left[۲۳۰۰-۱/۶۴۵\sqrt{(\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۲۰})(۲۲۵۰)^۲}, +\infty\right)=[۸۶۷, +\infty)$$

ج) فاصله اطمینان ۹۵ درصدی دو طرفه

$$[L,U]=\left[\bar{x}-\bar{y}-k_{./۰۲۵}\sqrt{\frac{\sigma_x^۲}{n_x}+\frac{\sigma_y^۲}{n_y}}, \bar{x}-\bar{y}+k_{./۰۲۵}\sqrt{\frac{\sigma_x^۲}{n_x}+\frac{\sigma_y^۲}{n_y}}\right]$$

$$=\left[۲۳۰۰-۱/۹۶\sqrt{(\frac{۳}{۲۰})(۲۲۵۰)^۲}, ۲۳۰۰+۱/۹۶\sqrt{(\frac{۳}{۲۰})(۲۲۵۰)^۲}\right]=[۵۹۲, ۴۰۰۸]$$

۳۷-۸) در ساخت نردبانهای چوبی، قطعات کناری نردبانها تنش بیشتری (در جهت رگه چوب) دارند اگر الوار تازه به جای کوره در معرض هوا خشک شود. می توان انحراف معیار هر دو را ۲۵psi گرفت. نمونه ای متشکل از ۲۵ مشاهده از هر یک از دو نوع گرفته شد و به میانگینهای ۱۱۷۰psi برای هوا و ۱۱۰۵ psi برای کوره انجامید. فاصله اطمینانی ۹۵ درصدی برای افزایش تنش پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}\bar{x}=۱۱۷۰\\ \bar{y}=۱۱۰۵\end{cases}\qquad \begin{cases}\sigma_x=\sigma_y=۲۵\\ n_x=n_y=۲۵\end{cases}\qquad \begin{cases}۱-\alpha=۰/۹۵\\ \end{cases}$$

$$[L,U]=\left[\bar{x}-\bar{y}-k_{./۰۲۵}\sqrt{\frac{\sigma_x^۲}{n_x}+\frac{\sigma_y^۲}{n_y}}, \bar{x}-\bar{y}+k_{./۰۲۵}\sqrt{\frac{\sigma_x^۲}{n_x}+\frac{\sigma_y^۲}{n_y}}\right]$$

$$=\left[٦٥-١/٩٦\sqrt{٢\times\frac{(٢٥)^٢}{٢٥}},٦٥+١/٩٦\sqrt{٢\times\frac{(٢٥)^٢}{٢٥}}\right]$$

$$=\left[٦٥-٦٩/٢٩٦,٦٥+٦٩/٢٩٦\right]=\left[-٤/٢٩٦,١٣٤/٢٩٦\right]$$

۸-۳۸) در زمینه تحقیق روی خرج انفجاری شلیک موشک، که با هدف تقلیل مدت تاخیر بین آغاز جریان شلیک و انفجار صورت می گیرد، آزمایشهایی روی خرج نوع T و خرج نوع C صورت گرفت. می توان فرض کرد که انحراف معیار هر دو نوع معادل ۰/۰٤ است. اگر به ازای ١٤ مشاهده از هر نوع، $\overline{C}$ معادل ۰/۲٦۱ ثانیه و $\overline{T}$ معادل ۰/۲٥۰ ثانیه باشد، فاصله اطمینانی ۹٥ درصدی برای تفاوت مدتها پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}\overline{C}=٢٦١\\ \overline{T}=٠/٢٥٠\end{cases}\qquad\begin{cases}\sigma_C=\sigma_T=٠/٠٤\\ n_C=n_T=١٤\end{cases}\qquad\begin{cases}١-\alpha=٠/٩٥\\ \end{cases}$$

$$[L,U]=\left[\overline{C}-\overline{T}-k_{٠/٠٢٥}\sqrt{\frac{\sigma_C^٢}{n_C}+\frac{\sigma_T^٢}{n_T}},\overline{C}-\overline{T}+k_{٠/٠٢٥}\sqrt{\frac{\sigma_C^٢}{n_C}+\frac{\sigma_T^٢}{n_T}}\right]$$

$$=\left[٠/٠١١-١/٩٦\times\sqrt{\frac{(٠/٠٤)^٢}{١٤}+\frac{(٠/٠٤)^٢}{١٤}},٠/٠١١+١/٩٦\times\sqrt{\frac{(٠/٠٤)^٢}{١٤}+\frac{(٠/٠٤)^٢}{١٤}}\right]$$

$$=\left[-٠/٠١٨٦,٠/٠٤٠٦\right]$$

۸-۳۹) دو تحلیلگر اندازه گیریهایی مکرر در مورد سختی آب شهر انجام دادند. با فرض مجهول، ولی مساوی بودن واریانسها، فاصله اطمینانی ۹٥ درصدی برای تفاوت اندازه هایی که دو تحلیلگر بدست آورده اند پیدا کنید.

اندازه های کدگذاری شده سختی

تحلیلگر A	تحلیلگر B
٠/٤٦	٠/٨٢
٠/٦٢	٠/٦١
٠/٣٧	٠/٨٩
٠/٤٠	٠/٥١
٠/٤٤	٠/٣٣
٠/٥٨	٠/٤٨
٠/٤٨	٠/٢٣
٠/٥٣	٠/٢٥
	٠/٦٧
	٠/٨٨

$\overline{X} = ٠/٤٨٥$ $\qquad$ $\overline{Y} = ٠/٥٦٧$

$\sum (X_i - \overline{X})^٢ = ٠/٠٥٢٤$ $\qquad$ $\sum (Y_i - \overline{Y})^٢ = ٠/٥٥٩٨$

پاسخ:

$$\begin{cases} \bar{x} = ٠/٤٨٥ \\ \sum (x_i - \bar{x})^٢ = ٠/٠٥٢٤ \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{y} = ٠/٥٧٦ \\ \sum (y_i - \bar{y})^٢ = ٠/٥٥٩٨ \end{cases} \quad \begin{cases} n_x = ٨ \\ n_y = ١٠ \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = ٠/٠٥ \end{cases}$$

$$[L,U] = [\bar{x} - \bar{y} - t_{٠/٠٢٥;١٦} \sqrt{\frac{١}{n_x} + \frac{١}{n_y}} \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^٢ + \sum (y_i - \bar{y})^٢}{n_x - n_y - ٢}},$$

$$\bar{x} - \bar{y} + t_{٠/٠٢٥;١٦} \sqrt{\frac{١}{n_x} + \frac{١}{n_y}} \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^٢ + \sum (y_i - \bar{y})^٢}{n_x - n_y - ٢}}]$$

$$=[-\cdot/\cdot\text{۸۲}-\text{۲}/\text{۱۲}\cdot\sqrt{\frac{\text{۱}}{\text{۸}}+\frac{\text{۱}}{\text{۱۰}}}\sqrt{\frac{\cdot/\cdot\text{۵۲۴}+\cdot/\text{۵۵۹۸}}{\text{۱۶}}},-\cdot/\cdot\text{۸۲}+\text{۲}/\text{۱۲}\cdot\sqrt{\frac{\text{۱}}{\text{۸}}+\frac{\text{۱}}{\text{۱۰}}}\sqrt{\frac{\cdot/\cdot\text{۵۲۴}+\cdot/\text{۵۵۹۸}}{\text{۱۶}}}]$$

$$=[-\cdot/\cdot\text{۸۲}-\cdot/\cdot\text{۱۹۶۷},-\cdot/\cdot\text{۸۲}+\cdot/\cdot\text{۱۹۶۷}]$$

$$[L,U]=[-\cdot/\text{۱۰۱۶۷},-\cdot/\cdot\text{۶۲۳۳}]$$

۸-۴۰) شانزده مورد اندازه گیری نقطه ذوب یک ماده که هشت مورد توسط تحلیلگر I و هشت مورد تحلیلگر II صورت گرفته است، به شرح زیر است. داده ها بر حسب درجه سانتی گراد است.

تحلیلگر II (Y)	تحلیلگر I (X)
۱۶۳/۵	۱۶۴/۴
۱۶۲/۸	۱۶۹/۷
۱۶۳/۰	۱۶۹/۲
۱۶۳/۲	۱۶۹/۵
۱۶۰/۷	۱۶۱/۸
۱۶۱/۵	۱۶۸/۷
۱۶۰/۹	۱۶۹/۵
۱۶۲/۱	۱۶۳/۹
$\bar{Y}=\text{۱۶۲/۲۱۲۵}$	$\bar{X}=\text{۱۶۷/۰۸۷۵}$
$\sum(Y_i-\bar{Y})^{\text{۲}}=\text{۸/۰۹}$	$\sum(X_i-\bar{X})^{\text{۲}}=\text{۷۰/۸۱}$

با فرض مجهول ولی مساوی بودن واریانسها، فاصله اطمینانی ۹۰ درصدی برای میانگین تفاوت اندازه هایی که دو تحلیلگر گرفته اند پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}\bar{x}=۱۶۷/۰۸۷۵\\ n_x=۸\end{cases}\quad \begin{cases}\bar{y}=۱۶۲/۲۱۲۵\\ n_y=۸\end{cases}\quad \begin{cases}\sum(x_i-\bar{x})^۲=۷۰/۸۱\\ \sum(y_i-\bar{y})^۲=۸/۰۹\end{cases}\quad \begin{cases}۱-\alpha=۰/۹۰\\ \sigma_x=\sigma_y=?\end{cases}$$

$$[L,U]=[\bar{x}-\bar{y}-t_{۰/۰۵;۱۴}\sqrt{\frac{۱}{n_x}+\frac{۱}{n_y}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲+\sum(y_i-\bar{y})^۲}{n_x-n_y-۲}},$$

$$\bar{x}-\bar{y}+t_{۰/۰۵;۱۴}\sqrt{\frac{۱}{n_x}+\frac{۱}{n_y}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲+\sum(y_i-\bar{y})^۲}{n_x-n_y-۲}}]$$

$$=[۴/۸۷۵-۱/۷۶۱\sqrt{\frac{۲}{۸}}\sqrt{\frac{۷۰/۸۱+۸/۰۹}{۸+۸-۲}},۴/۸۷۵+۱/۷۶۱\sqrt{\frac{۲}{۸}}\sqrt{\frac{۷۰/۸۱+۸/۰۹}{۸+۸-۲}}]$$

$$=[۲/۷۸۵,۶/۹۶۵]$$

۸-۴۱) مدتهای سوختن دو نوع مختلف ظرف دودزا بر حسب ثانیه به شرح زیر است:

نوع I (X)		نوع II (Y)	
۴۸۱	۵۷۲	۵۲۶	۵۳۷
۵۰۶	۵۶۱	۵۱۱	۵۸۲
۵۲۷	۵۰۱	۵۵۶	۶۰۵
۶۶۱	۴۸۷	۵۴۲	۵۵۸
۵۰۱	۵۲۴	۴۹۱	۵۷۸

$\bar{X}=۵۳۲/۱$ $\qquad$ $\bar{Y}=۵۴۸/۶$

$\sum(X_i-\bar{X})^۲=۲۶۳۹۴/۹$ $\qquad$ $\sum(Y_i-\bar{Y})^۲=۱۰۷۲۴/۴$

با فرض مجهول ولی مساوی بودن واریانسها، فاصله اطمینانی ۹۵ درصدی برای میانگین تفاوت مدتهای سوختن پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}\bar{x}=۵۳۲/۱\\ n_x=۱۰\end{cases}\quad \begin{cases}\bar{y}=۵۴۸/۶\\ n_y=۱۰\end{cases}\quad \begin{cases}\sum(x_i-\bar{x})^۲=۲۶۳۹۴/۹\\ \sum(y_i-\bar{y})^۲=۱۰۷۲۴/۴\end{cases}$$

$$[L,U]=[\bar{x}-\bar{y}-t_{۰/۰۲۵;۱۸}\sqrt{\frac{۱}{n_x}+\frac{۱}{n_y}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲+\sum(y_i-\bar{y})^۲}{n_x-n_y-۲}},$$

$$\bar{x}-\bar{y}+t_{۰/۰۲۵;۱۸}\sqrt{\frac{۱}{n_x}+\frac{۱}{n_y}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲+\sum(y_i-\bar{y})^۲}{n_x-n_y-۲}}]$$

$$=[۵۳۲/۱-۵۴۸/۶-۲/۱۰۱\times\sqrt{\frac{۲}{۱۰}}\sqrt{\frac{۲۶۳۹۴/۹+۱۰۷۲۴/۴}{۲۰-۲}},$$

$$۵۳۲/۱-۵۴۸/۶+۲/۱۰۱\times\sqrt{\frac{۲}{۱۰}}\sqrt{\frac{۲۶۳۹۴/۹+۱۰۷۲۴/۴}{۲۰-۲}}]$$

$$[L,U]=[-۵۹/۱۶۸,۲۶/۱۶۸]$$

۸-۴۲) مساله ۳۸ را حل کنید اگر فرض شود واریانسها مجهول ولی مساوی اند و مقادیر $S_C^۲=۰/۰۰۱۲۵$ و $S_T^۲=۰/۰۰۱۳۲$ از نمونه به دست آمده اند.

پاسخ:

$$\begin{cases}\bar{C}=۰/۲۶۱\\ \bar{T}=۰/۲۵۰\end{cases}\quad \begin{cases}S_C^۲=۰/۰۰۱۲۵\\ S_T^۲=۰/۰۰۱۳۲\end{cases}\quad \begin{cases}n_C=n_T=۱۴\\ \alpha=۰/۰۵\end{cases}$$

$$[L,U]=\left[\bar{C}-\bar{T}-t_{۰/۰۲۵;۲۶}\sqrt{\frac{۱}{n_C}+\frac{۱}{n_T}}\sqrt{\frac{S_C^۲+S_T^۲}{۲}},\bar{C}-\bar{T}+t_{۰/۰۲۵;۲۶}\sqrt{\frac{۱}{n_C}+\frac{۱}{n_T}}\sqrt{\frac{S_C^۲+S_T^۲}{۲}}\right]$$

$$=[۰/۰۱۱-۲/۰۵۶\sqrt{\frac{۲}{۱۴}}\sqrt{\frac{۰/۰۰۲۵۷}{۲}},۰/۰۱۱+۲/۰۵۶\sqrt{\frac{۲}{۱۴}}\sqrt{\frac{۰/۰۰۲۵۷}{۲}}]$$

$$=[-\cdot/\cdot۱۶۹,\cdot/\cdot۳۸۹]$$

۸-۴۳) فرض کنید X,Y توزیع نرمال با میانگینهای μ_y,μ_x و واریانسهای $\sigma_x^۲$ و $\sigma_y^۲$ دارند. براساس n_y,n_x مشاهده $\overline{Y},\overline{X}$ و $S_y^۲,S_x^۲$ را براورد کننده های معمولی فرض کنید. بدون فرض $\sigma_x=\sigma_y$ چگونه فاصله اطمینانی برای $\mu_x-\mu_y$ پیدا می کنید؟

پاسخ:

براساس مطالب فصل هفتم، هرگاه واریانس دو توزیع مجهول و نامساوی باشند، معمولا از آزمون t' استفاده می کنیم:

$$t'=\frac{\overline{x}-\overline{y}-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{S_x^۲}{n_x}+\frac{S_y^۲}{n_y}}}$$

$$p\left\{-t_{\frac{\alpha}{۲};\upsilon}\le\frac{\overline{x}-\overline{y}-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{S_x^۲}{n_x}+\frac{S_y^۲}{n_y}}}\le t_{\frac{\alpha}{۲};\upsilon}\right\}=۱-\alpha$$

$$p\left\{\overline{x}-\overline{y}-t_{\frac{\alpha}{۲};\upsilon}\sqrt{\frac{S_x^۲}{n_x}+\frac{S_y^۲}{n_y}}\le\mu_x-\mu_y\le\overline{x}-\overline{y}+t_{\frac{\alpha}{۲};\upsilon}\sqrt{\frac{S_x^۲}{n_x}+\frac{S_y^۲}{n_y}}\right\}=۱-\alpha$$

۸-۴۴) در مطالعه ای در مورد واکنش عصبی، قدرت واکنش زانوی ۱۵ نفر در دو مجموعه شرایط مختلف به کسب نتایج زیر بر حسب درجه قوس حرکت پا انجامیده است.

در شرایط آرامش	در شرایط تنش
۳۵	۳۱

۱۵	۱۹
۱۹	۲۲
۲۹	۲٦
۳٤	۳٦
۲٦	۳۰
۱۹	۲۹
۳۷	۳٦
۲٤	۳٤
۲۷	۳۳
۱٤	۱۹
۱۹	۱۹
۳۰	۲٦
۷	۱۵
۱۳	۱۸

فاصله اطمینانی ۹۵ درصدی برای تغییر در واکنش پیدا کنید. (راهنمـایی: از آزمـون t زوجی استفاده کنید).

پاسخ:

$$\begin{cases} n_x = n_y = ۱۵ \\ \alpha = ۰/۰۵ \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum (x_i - \bar{x})^۲ = ۱۱۲۰/٤ \\ \sum (y_i - \bar{y})^۲ = ۷۱۰/٤ \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x} = ۲۳/۲ \\ \bar{y} = ۲٦/۲ \end{cases}$$

$$[L,U]=[\bar{x}-\bar{y}-t_{۰/۰۲۵;۲۸}\sqrt{\frac{۲}{۱۵}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲+\sum(y_i-\bar{y})^۲}{۲۸}},$$

$$\bar{x}-\bar{y}-t_{۰/۰۲۵;۲۸}\sqrt{\frac{۲}{۱۵}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲+\sum(y_i-\bar{y})^۲}{۲۸}}\Bigg]$$

$$=\left[-۳-۲/۰۴۸\sqrt{\frac{۲}{۱۵}}\sqrt{\frac{۱۱۲۰/۴+۷۱۰/۴}{۲۸}},-۳+۲/۰۴۸\sqrt{\frac{۲}{۱۵}}\sqrt{\frac{۱۱۲۰/۴+۷۱۰/۴}{۲۸}}\right]$$

$$=[-۲/۹۵۳,۳/۰۴۷]$$

۸-۴۵) جدول زیر درصد افت مقاومت تنشی نمونه های زوجی یک آلیاژ را به دنبال غوطه ور کردن آن در یک محلول خورنده ارائه می کند. در هر زوج یک مشاهده در معرض تنش است و دیگری نیست.

با تنش	بدون تنش	شماره آزمون
۲/۹	۶/۴	۱
۷/۹	۴/۶	۲
۷/۳	۴/۶	۳
۸/۰	۶/۴	۴
۶/۷	۳/۲	۵
۷/۶	۵/۲	۶
۵/۷	۶/۵	۷
۴/۱	۴/۹	۸

۹	٤/۳	۸/۱
۱۰	٥/٦	٦/٥
۱۱	۳/۷	٦/٥
۱۲	٤/٦	٦/۰

فاصله اطمینانی ۹٥ درصدی برای میانگین تفاوت در مقاومت تنشی پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} n_x = n_y = ۱۲ \\ \alpha = ۰/۰٥ \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{y} = ۷ \\ \sum (y_i - \bar{y})^۲ = ۱۹/۷٦ \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x} = ٥ \\ \sum (x_i - \bar{x})^۲ = ۱۲/٤۸ \end{cases}$$

$$[L,U] = [\bar{x} - \bar{y} - t_{۰/۰۲٥;۲۲}\sqrt{\frac{۲}{۱۲}}\sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲ + \sum (y_i - \bar{y})^۲}{۲۲}},$$

$$\bar{x} - \bar{y} + t_{۰/۰۲٥;۲۲}\sqrt{\frac{۲}{۱۲}}\sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲ + \sum (y_i - \bar{y})^۲}{۲۲}}]$$

$$= [-۲ - ۲/۰۷٤\sqrt{\frac{۳۲/۲٤}{۱۳۲}}, -۲ + ۲/۰۷٤\sqrt{\frac{۳۲/۲٤}{۱۳۲}}] = [-۳/۰۲٥, -۰/۹۷٥]$$

۸-٤٦) در مساله ٤۲، فاصله اطمینانی ۹٥ درصدی برای σ_T / σ_C پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} \alpha = ۰/۰٥ \\ n_C = n_T = ۱٤ \end{cases} \qquad \begin{cases} S_C^۲ = ۰/۰۰۱۲٥ \\ S_T^۲ = ۰/۰۰۱۳۲ \end{cases}$$

$$[L,U] = \left[\frac{S_T}{S_C}\sqrt{F_{۱-\frac{\alpha}{۲};n_C-۱,n_T-۱}}, \frac{S_T}{S_C}\sqrt{F_{\frac{\alpha}{۲};n_C-۱,n_T-۱}}\right]$$

$$= \left[۱/۰۲۷٦\sqrt{\frac{۱}{F_{۰/۰۲٥;۱۳,۱۳}}}, ۱/۰۲۷٦\sqrt{F_{۰/۰۲٥;۱۳,۱۳}}\right]$$

$$=\left[1/0276\sqrt{\frac{1}{3/117}},1/0276\sqrt{3/711}\right]=[0/582,1/814]$$

۸-۴۷) نتایج زیر دو نمونه از توزیعهای نرمال محاسبه شده اند:

$$\begin{array}{llll} X: & n_x=8 & \sum X=12 & \sum X^2=46 \\ Y: & n_y=11 & \sum Y=22 & \sum Y^2=80 \end{array}$$

فاصله اطمینانی ۹۵ درصدی برای σ_x/σ_y پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} n_x=8 & \sum x=12 & \sum x^2=46 \\ n_y=11 & \sum y=22 & \sum y^2=80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_x^2=26 \\ S_y^2=36 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha=0/05 \\ \end{cases}$$

$$[L,U]=\left[\frac{S_x}{S_y}\sqrt{\frac{1}{F_{0/025;7,10}}},\frac{S_x}{S_y}\sqrt{F_{0/025;10,7}}\right]$$

$$=\left[0/85\times\sqrt{\frac{1}{3/95}},0/85\times\sqrt{4/76}\right]=[0/4277,1/8545]$$

۸-۴۸) تصور کنید در مورد هر یک از دو طرز کار، ۱۵ آزمایش صورت گرفته و مقدار ۳/۵ ، برای نسبت انحراف معیار نمونه ها، S_x/S_y به دست می آید. یک فاصله اطمینان ۹۰ درصدی پایین ودو طرفه برای σ_x/σ_y پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} \frac{S_x}{S_y}=3/5 \\ n_x=n_y=15 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha=1-0/90=0/10 \\ \end{cases}$$

فاصله اطمینان ۹۰ درصدی پایین:

$$[L,U]=\left[\frac{S_x}{S_y}\sqrt{\frac{1}{F_{0/10;14,14}}},+\infty\right)=\left[3/5\sqrt{\frac{1}{0/0268}},+\infty\right)=[21/428,+\infty)$$

فاصله اطمینان ۹۰ درصدی دو طرفه:

$$[L,U]=\left[\frac{S_x}{S_y}\sqrt{\frac{۱}{F_{۰/۰۵;۱۴,۱۴}}},\frac{S_x}{S_y}\sqrt{F_{۰/۰۵;۱۴,۱۴}}\right]$$

$$=\left[۳/۵\sqrt{\frac{۱}{۲/۴۸۳}},۳/۵\sqrt{۲/۴۸۳}\right]=[۲/۲۲,۵/۵۱۵]$$

۸-۴۹) فرض کنید $S_x^۲=۲۰$ و $S_y^۲=۶$. با این فرض که واریانسهای نمونه مبتنی بر ۲۵ درجه آزادی اند، فاصله اطمینانی ۹۹ درصدی برای σ_x/σ_y پیدا کنید. مساله را با درجات آزادی ۱۰۰و ۵۰۰ نیز حل کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}S_x^۲=۲۰\\S_y^۲=۶\end{cases}\qquad\begin{cases}n_x=n_y=۲۵+۱=۲۶\\ \upsilon=۲۵\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha=۰/۰۱\\ \end{cases}$$

فاصله اطمینان برای $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$:

$$\upsilon=۲۵\Rightarrow[L,U]=\left[\frac{S_x}{S_y}\sqrt{\frac{۱}{F_{۰/۰۰۵;۲۵,۲۵}}},\frac{S_x}{S_y}\sqrt{F_{۰/۰۰۵;۲۵,۲۵}}\right]$$

$$=\left[۱/۸۲۵۷\sqrt{\frac{۱}{۲/۹۰۳}},۱/۸۲۵۷\sqrt{۲/۹۰۳}\right]=[۱/۰۷۱۵,۳/۱۱۱]$$

$$\upsilon=۱۰۰\Rightarrow[L,U]=\left[\frac{S_x}{S_y}\sqrt{\frac{۱}{F_{۰/۰۰۵;۱۰۰,۱۰۰}}},\frac{S_x}{S_y}\sqrt{F_{۰/۰۰۵;۱۰۰,۱۰۰}}\right]$$

$$=\left[۱/۸۲۵۷\sqrt{\frac{۱}{۱/۷۲۹}},۱/۸۲۵۷\sqrt{۱/۷۲۹}\right]=[۱/۳۸۸,۲/۴۰۰۶]$$

$$U=۵۰۰\Rightarrow[L,U]=\left[\frac{S_x}{S_y}\sqrt{\frac{۱}{F_{۰/۰۰۵;۵۰۰,۵۰۰}}},\frac{S_x}{S_y}\sqrt{F_{۰/۰۰۵;۵۰۰,۵۰۰}}\right]$$

۸-۵۰) در مساله ٦، توزیع مجانبی $\sqrt{n}(\hat{\lambda}-\lambda)$ را پیدا کنید. یک فاصله اطمینان تقریبی دو طرفه ۹۵ درصدی (براساس توزیع مجانبی) برای λ پیدا کنید.

پاسخ:

$$\operatorname{var}\hat{\theta} \geq \frac{\lambda}{n} \quad \Rightarrow \sigma_b = \frac{\lambda}{n} \qquad \begin{cases} \alpha = ۰/۰۵ \\ k_{\frac{\alpha}{۲}} = k_{۰/۰۲۵} = ۱/۹٦ \end{cases}$$

$$MLE\theta = \hat{\theta} \Rightarrow MLE\lambda = \hat{\lambda} = \bar{x}$$

$$[L,U] = \left[\hat{\theta} - k_{\frac{\alpha}{۲}}\sigma_b, \hat{\theta} + k_{\frac{\alpha}{۲}}\sigma_b\right]$$

$$= \left[\bar{x} - ۱/۹٦\frac{\bar{x}}{n}, \bar{x} + ۱/۹٦\frac{\bar{x}}{n}\right]$$

توزیع مجانبی$\Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\lambda}-\lambda) = \sqrt{n}(\bar{x}-\lambda)$

۸-۵۱) با مراجعه به مسائل ۷و۸، توزیع مجانبی $\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)$ را پیدا کنید. یک فاصله اطمینان تقریبی دو طرفه ۹۵ درصدی (براساس توزیع مجانبی) برای θ پیدا کنید.

پاسخ:

توزیع مجانبی$\Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) = \sqrt{n}(\bar{x}-\theta)$

دارای توزیع مجانبی نرمال با میانگین ۰ و واریانس $\frac{\bar{x}^{۲}}{n}$ است.

فاصله اطمینان تقریبی $[L,U] = \left[\hat{\theta} \pm k_{۰/۰۲۵}\sigma_{\hat{\theta}}\right] = \left[\bar{x} \pm ۱/۹٦\sigma_{\hat{\theta}}\right]$

$$= \left[\bar{x} \pm ۱/۹٦\sqrt{\frac{\hat{\theta}^{۲}}{n}}\right] = \left[\bar{x} \pm ۱/۹٦\sqrt{\frac{\bar{x}^{۲}}{n}}\right] = \left[\bar{x} \pm ۱/۹٦\frac{\bar{x}}{\sqrt{n}}\right]$$

۸-۵۲) در مساله ۱۱، توزیع مجانبی MLE، مربوط به η را بیابید و برای این پارامتر یک فاصله اطمینان تقریبی ۹۹ درصدی پیدا کنید.

پاسخ:

۸-۵۳) در زیر بخش ۸.۳.۸ فاصله اطمینانی تقریبی برای پارامتر p متغیر تصادفی برنویی به صورت

$$\hat{p} \pm K_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

ارائه شد. این فاصله از رابطه

$$P\left\{-K_{\alpha/2} \le \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \le K_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

بدین ترتیب به دست آمد که به جای p در مخرج کسر، $\hat{p}$ گذاشتیم. با حل مستقیم عبارت داخل آکولاد نسبت به p، عبارت دیگری می توان به دست آورد. نشان دهید که این راه حل به نتیجه زیر می انجامد.

$$\frac{1}{(1+K_{\alpha/2}^2/n)}\left\{\hat{p}+\frac{K_{\alpha/2}^2}{2n} \pm K_{\alpha/2}\left[\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}+\frac{K_{\alpha/2}^2}{4n^2}\right]^{1/2}\right\}$$

پاسخ:

۸-۵٤) در مساله ۳۹، تحلیلگر سومی ده اندازه مکرر از سختی آب شهر به دست آورد. نتایج به دست آمده توسط تحلیلگر سوم $\overline{Z} = 0/541$ و $\sum(Z_i-\overline{Z})^2 = 0/5124$

است. مجموعه ای از حدود اطمینان همزمان ۰/۹۵ درصدی برای تمام تفاوتهای زوجی بین تحلیلگرها پیدا کنید(فرض کنید واریانسها مجهول ولی مساوی اند)

پاسخ:

$$\begin{cases}\alpha=\cdot/\cdot\text{۵}\\ \alpha_i=\dfrac{\alpha}{\text{۳}}\end{cases}\quad \begin{cases}\bar{y}=\cdot/\text{۵۶۷}\\ \sum(y_i-\bar{y})^{\text{۲}}=\cdot/\text{۰۰۵۹۸}\end{cases}\quad \begin{cases}\bar{x}=\cdot/\text{۴۸۵}\\ \sum(x_i-\bar{x})^{\text{۲}}=\cdot/\cdot\text{۵۲۴}\end{cases}\quad \begin{cases}\bar{z}=\cdot/\text{۵۴۱}\\ \sum(z_i-\bar{z})^{\text{۲}}=\cdot/\text{۰۱۲۴}\end{cases}$$

$$\begin{cases}n_x=\text{۸}\\ n_y=n_z=\text{۱۰}\end{cases}$$

از آزمون t دو نمونه ای استفاده می کنیم، زیرا واریانسها مجهول ولی مساویند.

حدود اطمینان مربوط به x,y:

$$[L,U]=\left[\bar{x}-\bar{y}\pm t_{\frac{\cdot/\cdot\text{۲۵}}{\text{۳}};\text{۱۶}}\sqrt{\frac{\text{۱}}{\text{۸}}+\frac{\text{۱}}{\text{۱۰}}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^{\text{۲}}+\sum(y_i-\bar{y})^{\text{۲}}}{\text{۸}+\text{۱۰}-\text{۲}}}\right]$$

$$=\left[-\cdot/\cdot\text{۸۲}\pm\text{۲}/\text{۶۹۶}\sqrt{\frac{\text{۵}/\text{۵۰۹۸}}{\text{۶۴۰}}}\right]=[-\cdot/\text{۳۳۲},-\cdot/\text{۱۶۸}]$$

حدود اطمینان مربوط به z,x:

$$[L,U]=\left[\bar{x}-\bar{z}\pm t_{\frac{\cdot/\cdot\text{۲۵}}{\text{۳}};\text{۱۶}}\sqrt{\frac{\text{۱}}{\text{۸}}+\frac{\text{۱}}{\text{۱۰}}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^{\text{۲}}+\sum(z_i-\bar{z})^{\text{۲}}}{\text{۸}+\text{۱۰}-\text{۲}}}\right]$$

$$=\left[\cdot/\text{۴۸۵}-\cdot/\text{۵۴۱}\pm\text{۲}/\text{۵۵۲}\sqrt{\frac{\text{۹}}{\text{۴۰}}}\sqrt{\frac{\cdot/\text{۵۶۴۸}}{\text{۱۶}}}\right]=[-\cdot/\text{۲۸۳۴},-\cdot/\text{۱۷۱۴}]$$

حدود اطمینان مربوط به z,y:

$$[L,U]=\left[\bar{y}-\bar{z}\pm t_{\frac{\cdot/\cdot\text{۲۵}}{\text{۳}};\text{۱۸}}\sqrt{\frac{\text{۲}}{\text{۱۰}}}\sqrt{\frac{\sum(y_i-\bar{y})^{\text{۲}}+\sum(z_i-\bar{z})^{\text{۲}}}{\text{۱۸}}}\right]$$

$$=\left[\cdot/\text{٥٦٧}-\cdot/\text{٥٤١}\pm \text{٢}/\text{٧٦٩}\sqrt{\frac{\text{١}/\cdot\text{٧٢٢}}{\text{٩}\cdot}}\right]=[-\cdot/\text{٢٧٦},\cdot/\text{٣٢٨}]$$

۸–۵۵) در مساله ۴۰، دو تحلیلگر دیگر هر یک هشت اندازه مستقل در مورد نقطه ذوب یک ماده ارائه کرده اند. نتایج تحلیلگر سوم $\overline{Z}=\text{١٦٣}/\cdot\text{٤١}\cdot$ و $\sum(Z_i-\overline{Z})^{\text{٢}}=\text{٥٢}/\text{٧}\cdot$ است. نتایج تحلیلگر چهارم $\overline{W}=\text{١٥٤}/\cdot\text{٢٦٣}$ و $\sum(W_i-\overline{W})^{\text{٢}}=\text{٣٣}/\text{١٦}$ است. یک حدود اطمینان همزمان ۹۰ درصدی برای همه تفاوتهای زوجی پیدا کنید (فرض کنید واریانسها مجهول ولی مساوی اند)

پاسخ:

$$\begin{cases}\bar{z}=\text{١٦٣}/\cdot\text{٤١}\cdot\\ \sum(z_i-\bar{z})^{\text{٢}}=\text{٥٢}/\text{٧}\cdot\end{cases}\quad \begin{cases}\bar{w}=\text{١٥٤}/\cdot\text{٢٦٣}\\ \sum(w_i-\bar{w})^{\text{٢}}=\text{٣٣}/\text{١٦}\end{cases}\quad \begin{cases}\bar{x}=\text{١٦٧}/\cdot\text{٨٧٥}\\ \sum(x_i-\bar{x})^{\text{٢}}=\text{٧}\cdot/\text{٨١}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\bar{y}=\text{١٦٢}/\text{٢١٢٥}\\ \sum(y_i-\bar{y})^{\text{٢}}=\text{٨}/\cdot\text{٩}\end{cases}\quad \begin{cases}n_x=n_y=\text{٨}\\ n_z=n_w=\text{٨}\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha=\cdot/\text{١}\cdot\\ \alpha_i=\cdot/\cdot\text{٢٥}\end{cases}$$

حدود اطمینان برای x,y:

$$[L,U]=\left[\bar{x}-\bar{y}\pm t_{\cdot/\cdot\text{١٢٥};\text{١٤}}\sqrt{\frac{\text{٢}}{\text{٨}}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^{\text{٢}}+\sum(y_i-\bar{y})^{\text{٢}}}{\text{٨}+\text{٨}-\text{٢}}}\right]$$

$$=\left[\text{٤}/\text{٨٧٥}\pm\text{٢}/\text{٥٤٤}\sqrt{\frac{\text{٧٨}/\text{٩}}{\text{٤}\times\text{١٤}}}\right]$$

حدود اطمینان برای z,x:

$$[L,U]=\left[\bar{x}-\bar{z}\pm t_{\cdot/\cdot\text{١٢٥};\text{١٤}}\sqrt{\frac{\text{٢}}{\text{٨}}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^{\text{٢}}+\sum(z_i-\bar{z})^{\text{٢}}}{\text{١٤}}}\right]$$

$$=\left[\text{٤}/\cdot\text{٤٦٥}\pm\text{٢}/\text{٥٤٤}\sqrt{\frac{\text{١٢٣}/\text{٥١}}{\text{٤}\times\text{١٤}}}\right]=[\cdot/\text{٢٦٨},\text{٧}/\text{٨٢٣}]$$

حدود اطمینان برای w,x:

$$[L,U]=\left[\bar{x}-\bar{w}\pm t_{./.\text{۱۲۵};\text{۱۴}}\sqrt{\frac{\text{۲}}{\text{۸}}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^{\text{۲}}+\sum(w_i-\bar{w})^{\text{۲}}}{\text{۴}\times\text{۱۴}}}\right]$$

$$=\left[\text{۳/۰۶۱۲}\pm\text{۲/۵۴۴}\sqrt{\frac{\text{۳۲۱/۱۱۳۸}}{\text{۵۶}}}\right]=[\text{۳/۰۳۱},\text{۹/۱۵۳}]$$

حدود اطمینان برای z,y:

$$[L,U]=[\bar{y}-\bar{z}\pm\text{۲/۵۴۴}\sqrt{\frac{\text{۲}}{\text{۸}}}\sqrt{\frac{\text{۱۶۲/۲۱۲۵}+\text{۱۶۳/۰۴۱۰}}{\text{۱۴}}}]$$

$$=[-\text{۶/۹۶},\text{۵/۳۰}]$$

حدود اطمینان برای w,y:

$$[L,U]=\left[\bar{y}-\bar{w}\pm t_{./.\text{۱۲۵};\text{۱۴}}\sqrt{\frac{\text{۲}}{\text{۸}}}\sqrt{\frac{\sum(y_i-\bar{y})^{\text{۲}}+\sum(w_i-\bar{w})^{\text{۲}}}{\text{۱۴}}}\right]$$

$$=[\text{۸/۱۸۶۲}\pm\text{۲/۱۸۳۴}]=[\text{۶/۰۰۲۸},\text{۱۰/۳۶۹۶}]$$

حدود اطمینان برای w,z:

$$[L,U]=\left[\bar{z}-\bar{w}\pm t_{./.\text{۱۲۵};\text{۱۴}}\sqrt{\frac{\text{۲}}{\text{۸}}}\sqrt{\frac{\sum(z_i-\bar{z})^{\text{۲}}+\sum(w_i-\bar{w})^{\text{۲}}}{\text{۱۴}}}\right]$$

$$=[\text{۹/۰۱۴۷}\pm\text{۳/۱۵۰۱}]=[\text{۵/۸۶۴۶},\text{۱۲/۱۶۴۸}]$$

۸–۵۶) در مساله ۴۱، یک ظرف نوع سوم در نظر گرفته می شود. داده ها (براساس ۱۰ مشاهده) $\bar{Z}=\text{۵۰۱/۳}$ و $\sum(Z_i-\bar{Z})^{\text{۲}}=\text{۱۵۲۱۴/۷}$ اند. یک حدود اطمینان همزمان ۹۵

درصدی برای همه تفاوتهای زوجی ظرفها به دست آورید. (فرض کنید واریانسها مجهول ولی مساوی اند)

پاسخ:

$$\begin{cases}\bar{z}=۵۰۱/۳\\ \sum(z_i-\bar{z})^۲=۱۵۲۱۴/۷\end{cases}\quad \begin{cases}\bar{x}=۵۳۲/۱\\ \sum(x_i-\bar{x})^۲=۲۶۳۹۴/۹\end{cases}\quad \begin{cases}\bar{y}=۵۴۸/۶\\ \sum(y_i-\bar{y})^۲=۱۰۷۲۴/۶\end{cases}$$

$$\begin{cases}n_x=n_y=n_z=۱۰\\ \alpha=۰/۰۵\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha_i=\dfrac{۰/۰۵}{۳}\\ \alpha_{\frac{i}{۲}}=\dfrac{۰/۰۲۵}{۳}=۰/۰۰۸۳۳\end{cases}$$

حدود اطمینان برای x,y:

$$[L,U]=\left[\bar{x}-\bar{y}\pm t_{۰/۰۰۸۳۳;۱۸}\sqrt{\frac{۲}{۱۰}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲+\sum(y_i-\bar{y})^۲}{۱۸}}\right]$$

$$=[-۷۲/۷۳,۳۹/۷۳۴]$$

حدود اطمینان برای z,x:

$$[L,U]=\left[\bar{x}-\bar{z}\pm t_{۰/۰۰۸۳۳;۱۴}\sqrt{\frac{۲}{۱۰}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲+\sum(z_i-\bar{z})^۲}{۱۸}}\right]$$

$$=[۲۱/۴۱۷,۴۰/۱۸۳]$$

حدود اطمینان برای z,y:

$$[L,U]=\left[\bar{y}-\bar{z}\pm t_{۰/۰۰۸۳۳;۱۴}\sqrt{\frac{۲}{۱۰}}\sqrt{\frac{\sum(y_i-\bar{y})^۲+\sum(z_i-\bar{z})^۲}{۱۸}}\right]$$

$$=[۳۷/۸۴۲۵,۵۶/۷۵۷۵]$$

۸-۵۷) تصور کنید در مورد هر یک از سه طرز کار ۱۵ آزمایش انجام گیرد و واریانسهای نمونه به صورت $S_x^2=12$ و $S_y^2=30$ و $S_z^2=39$ ارائه شوند. حدود اطمینان توام ۸۵ درصدی برای همه نسبتهای زوجی واریانسها پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} n_x=n_y=n_z=15 \\ \alpha_i=\dfrac{\alpha}{3}=\dfrac{0/15}{3}=0/05 \end{cases} \qquad \begin{cases} S_x^2=12 \\ S_y^2=30 \\ S_z^2=39 \end{cases}$$

حدود اطمینان برای $\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$:

$$[L,U]=\left[\frac{S_x}{S_y}\sqrt{\frac{1}{F_{0/025;14,14}}},\frac{S_x}{S_y}\sqrt{F_{0/025;14,14}}\right]$$

$$=\left[0/632\sqrt{\frac{1}{2/983}},0/632\sqrt{2/983}\right]=[0/3659,1/0916]$$

حدود اطمینان برای $\dfrac{\sigma_x}{\sigma_z}$:

$$[L,U]=\left[\frac{S_x}{S_z}\sqrt{\frac{1}{F_{0/025;14,14}}},\frac{S_x}{S_z}\sqrt{F_{0/025;14,14}}\right]$$

$$=\left[0/555\sqrt{\frac{1}{2/983}},0/555\sqrt{2/983}\right]=[0/3212,0/958]$$

حدود اطمینان برای $\dfrac{\sigma_y}{\sigma_z}$:

$$[L,U]=\left[\frac{S_y}{S_z}\sqrt{\frac{1}{F_{0/025;14,14}}},\frac{S_y}{S_z}\sqrt{F_{0/025;14,14}}\right]$$

$$=\left[۰/۸۷۷\sqrt{\frac{۱}{۲/۹۸۳}},۰/۸۷۷\sqrt{۲/۹۸۳}\right]=[۰/۵۰۷۸,۱/۵۱۴۷]$$

۸–۵۸) تصور کنید در مورد هر یک از چهار شیوه عمل ۲۰ آزمایش انجام گیرد و واریانسهای نمونه به صورت $S_x^۲=۲۵$ و $S_y^۲=۴۰$ و $S_z^۲=۶۰$ و $S_w^۲=۸۵$ ارائه شوند. یک حدود اطمینان همزمان ۹۴ درصدی برای همه نسبتهای زوجی واریانسها به دست آورید.

پاسخ:

$$\begin{cases}n_x=n_y=n_z=n_w=۲۰\\ \alpha_i=\frac{\alpha}{۶}=\frac{۰/۰۶}{۶}=۰/۰۱\end{cases}\qquad \begin{cases}S_x^۲=۲۵\\ S_y^۲=۴۰\end{cases}\qquad \begin{cases}S_z^۲=۶۰\\ S_w^۲=۸۵\end{cases}$$

حدود اطمینان برای $\frac{\sigma_i}{\sigma_j}$:

$$[L,U]=\left[\frac{S_i}{S_j}\sqrt{\frac{۱}{F_{۰/۰۰۵;۱۹,۱۹}}},\frac{S_i}{S_j}\sqrt{F_{۰/۰۰۵;۱۹,۱۹}}\right]$$

$$=\left[\frac{S_i}{S_j}\sqrt{\frac{۱}{۳/۴۴}},\frac{S_i}{S_j}\sqrt{۳/۴۴}\right]$$

این مسئله مانند مسئله قبل با جایگذاری مقادیر S مختلف بدست می آید.

۸–۵۹) در بازگشت به مساله ۳۲، یک فاصله اطمینان همزمان ۹۵ درصدی برای σ,μ پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}\alpha=۰/۰۵\\ \alpha_i=\frac{\alpha}{۲}=۰/۰۲۵\end{cases}\qquad \begin{cases}n=۲۰\end{cases}\qquad \begin{cases}\bar{x}=۰/۷۹۰\\ S=۰/۰۱\end{cases}$$

$$\mu \text{ فاصله اطمینان برای: } [L,U]=\left[\bar{x}-t_{\frac{۰/۰۲۵}{۲};۱۹}\frac{S}{\sqrt{۲۰}},\bar{x}+t_{\frac{۰/۰۲۵}{۲};۱۹}\frac{S}{\sqrt{۲۰}}\right]$$

$$=\left[۰/۷۹۰-۲/۴۶۵\times\frac{۰/۰۱}{\sqrt{۲۰}},۰/۷۹۰+۲/۴۶۵\times\frac{۰/۰۱}{\sqrt{۲۰}}\right]=[۰/۷۸۴,۰/۷۹۶]$$

$$\sigma \text{ فاصله اطمینان برای: } [L,U]=\left[S\sqrt{\frac{۱۹}{x^{۲}_{۰/۰۱۲۵,۱۹}}},S\sqrt{\frac{۱۹}{x^{۲}_{۰/۹۸۷۵,۱۹}}}\right]$$

$$=\left[۰/۰۱\sqrt{\frac{۱۹}{۳۳/۴۰۸۵}},۰/۰۱\sqrt{\frac{۱۹}{۷/۸۴۵}}\right]=[۰/۰۰۷۵,۰/۰۱۵۶]$$

۸-۶۰) در مساله ۱۷، عبارت مربوط به فاصله بیزی ۹۵ درصدی برای p را با این فرض پیدا کنید که توزیع پیشین در فاصله $[۰,۱]$ یکنواخت است. محاسبه انجام ندهید.

(راهنمایی: از نتایج ارائه شده در جدول ۱۸ استفاده کنید.)

پاسخ:

$$P\{L\le p\le U\}=۱-\alpha=۰/۹۵$$

$$\text{بر اساس نتایج مساله ۱۷} \Rightarrow C=۲,D=۲\Rightarrow \hat{P}=\frac{\sum x_i+۲}{n+۴}$$

$$[L,U]=\left[\hat{P}-k_{۰/۰۲۵}\sqrt{\frac{\hat{P}(۱-\hat{P})}{n}},\hat{P}+k_{۰/۰۲۵}\sqrt{\frac{\hat{P}(۱-\hat{P})}{n}}\right]$$

$$=\left[\frac{\sum x_i+۲}{n+۴}\pm۱/۹۶\sqrt{\frac{\frac{\sum x_i+۲}{n+۴}(\frac{n+۲-\sum x_i}{n+۲})}{n}}\right]$$

۸-۶۱) در مساله ۱۳، عبارت نشان دهنده یک فاصله بیزی ۹۰ درصدی برای λ را پیدا کنید. محاسبه انجام ندهید. (راهنمایی: از نتایج ارائه شده در جدول ۱.۸ استفاده کنید)

پاسخ:

$$\begin{cases}\alpha = ٠/١٠ \\ \hat{\lambda} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}\end{cases} \qquad \begin{cases}C = ١ \\ D \to +\infty\end{cases} \qquad \begin{cases}\sigma = \mu = \lambda \\ \end{cases}$$

$$[L,U] = \left[\hat{\lambda} - k_{/.٠٥}\sigma_{\lambda}, \hat{\lambda} + k_{/.٠٥}\sigma_{\lambda}\right]$$

$$= [\bar{x} - ١/٦٤٥\bar{x}; \bar{x} + ١/٦٤٥\bar{x}] = [-٠/٦٤٥\bar{x}; ٢/٦٤٥\bar{x}]$$

۸-۶۲) در مساله ۱۴، عبارت مربوط به یک فاصله بیزی ۹۹ درصدی برای λ را پیدا کنید. محاسبه نکنید. (راهنمایی: از نتایج ارائه شده در جدول ۱.۸ استفاده کنید.)

پاسخ:

$$\begin{cases}\mu = \sigma = \lambda \\ \end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha = ٠/٠١ \\ \hat{\lambda} = \frac{\sum k_i + ١}{n + ١}\end{cases}$$

$$[L,U] = \left[\hat{\lambda} - k_{/..٥}\sigma_{\hat{\lambda}}, \hat{\lambda} + k_{/..٥}\sigma_{\hat{\lambda}}\right]$$

$$= \left[\frac{\sum x_i + ١}{n + ١} - ٢/٥٧٥ \times \frac{\sum x_i + ١}{n + ١}, \frac{\sum x_i + ١}{n + ١} + ٢/٥٧٥ \times \frac{\sum x_i + ١}{n + ١}\right]$$

$$= \left[-١/٥٧٥\frac{\sum x_i + ١}{n + ١}, ٣/٥٧٥\frac{\sum x_i + ١}{n + ١}\right]$$

۸-۶۳) در مساله ۱۵، عبارت مربوط به یک فاصله بیزی ۹۵ درصدی برای η را پیدا کنید. محاسبه نکنید. (راهنمایی: از نتایج ارائه شده در جدول ۱.۸ استفاده کنید.)

پاسخ:

$$\begin{cases}1-\alpha=0/95\\ \end{cases}\qquad \begin{cases}\sigma^2=\theta^2=\dfrac{1}{\eta^2}\\ \mu=\theta=\dfrac{1}{\eta}\end{cases}\qquad \begin{cases}\hat{\eta}=\dfrac{n+1}{\sum x_i}\\ \end{cases}$$

$$[L,U]=\left[\hat{\eta}-k_{0/025}\sigma_{\hat{\eta}},\hat{\eta}+k_{0/025}\sigma_{\hat{\eta}}\right]=\left[\frac{n+1}{\sum x_i}\pm 1/96\sigma_{\hat{\eta}}\right]$$

$$\sigma_{\hat{\eta}}^2=\frac{1}{\mu_\theta}+\frac{\sigma_\theta^2}{\mu_\theta^2}=\frac{n+1}{\sum x_i}+\frac{n+1}{\sum x_i}=\frac{2(n+1)}{\sum x_i}$$
$$\Rightarrow [L,U]=\left[\hat{\eta}-k_{0/025}\sigma_{\hat{\eta}},\hat{\eta}+k_{0/025}\sigma_{\hat{\eta}}\right]=\left[\frac{n+1}{\sum x_i}\pm 1/96\sqrt{\frac{2(n+1)}{\sum x_i}}\right]$$

۸-٦٤) در مساله ١٦، عبارت مربوط به یک فاصله بیزی ٩٠ درصدی برای ηرا پیدا کنید. محاسبه نکنید. (راهنمایی: از نتایج ارائه شده در جدول ۱.۸ استفاده کنید.)

پاسخ:

عبارت مربوط به فاصله بیزی $[L,U]=\left[\hat{\eta}-k_{0/05}\sigma_{\hat{\eta}},\hat{\eta}+k_{0/05}\sigma_{\hat{\eta}}\right]$

می دانیم برای $\theta=\dfrac{1}{\eta}$ است، بنابراین داریم: $\mu_\theta=\sigma_\theta=\theta,$

$$\hat{\theta}=\frac{1}{\hat{\eta}}=\frac{\sum x_i+1}{n+1}$$

فاصله اطمینان مربوط به θ $[L,U]=\left[\dfrac{\sum x_i+1}{n+1}\pm 1/96\dfrac{\sum x_i+1}{n+1}\right]$

$$\Rightarrow -0/96\frac{\sum x_i+1}{n+1}\le\theta=\frac{1}{\eta}\le 2/96\frac{\sum x_i+1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2/96}\frac{n+1}{\sum x_i+1}\le\eta$$

$\eta > ۰$ فاصله بیزی برای $[L,U]=\left[\frac{۱}{۲/۹۶}\frac{n+۱}{\sum x_i+۱},+\infty\right)$

۸-۶۵) در ساخت میله های استوانه ای با سطح مقطع مدور، که در داخل یک مادگی مدور قرار می گیرند، تمایل به یافتن فاصله تلرانس قطر وجود دارد. یک نمونه ۱۰ تایی با نتایج زیر گرفته می شود:

۵/۰۳۱	۵/۰۳۶
۵/۰۶۴	۵/۰۸۵
۴/۹۴۲	۴/۹۹۱
۵/۰۵۱	۴/۹۳۵
۵/۰۱۱	۴/۹۹۹

$\sum(X_i-\overline{X})^۲=۰/۰۲۱۸۶۸۵$ $\qquad$ $\overline{X}=۵/۰۱۴۵$

به ازای $\gamma=۰/۹۵$ فاصله تلرانسی ۹۰ درصدی برای قطرها پیدا کنید.

پاسخ:

$\begin{cases}n=۱۰\\ S=۲/۸۳۹\end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases}\overline{x}=۵/۰۱۴۵\\ \sum(x_i-\overline{x})^۲=۰/۰۲۱۸۶۸۵\end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases}\gamma=۰/۹۵\\ \alpha=۰/۱۰\end{cases}$

$$[L,U]=[\overline{x}-k_{۰/۰۵}S,\overline{x}+k_{۰/۰۵}S]$$

$$=[۵/۰۱۴۵-۲/۸۳۹\times۱/۶۴۵,۵/۰۱۴۵+۲/۸۳۹\times۱/۶۴۵]$$

$$=[۰/۳۴۴۳,۹/۶۸۵]$$

۸-۶۶) مشاهدات زیر مربوط به حجم خالص بطریها بر حسب لیترند:

۵/۶۶	۵/۶۴	۵/۵۹	۵/۶۵	۵/۶۸

۰/۶۱	۰/۶۲	۰/۶۴	۰/۶۳	۰/۶۱
۰/۶۴	۰/۶۶	۰/۶۰	۰/۶۵	۰/۶۳
۰/۶۷	۰/۶۴	۰/۶۰	۰/۶۰	۰/۶۵
۰/۶۰	۰/۶۵	۰/۶۰	۰/۶۳	۰/۶۰

$$\bar{X} = ۰/۶۳ \qquad \sum(X_i - \bar{X})^۲ = ۰/۰۱۹۶۰۵$$

یک فاصله حجمی پیدا کنید که به ازای $\gamma = ۰/۹۵$ دست کم ۹۹ درصد از بطریها را در بر گیرد.

پاسخ:

$$\begin{cases} \bar{x} = ۰/۶۳ \\ \sum(x_i - \bar{x})^۲ = ۰/۰۱۹۶۰۵ \end{cases} \qquad \begin{cases} ۱-\alpha = ۰/۹۹ \\ \gamma = ۰/۹۵ \end{cases} \qquad \begin{cases} n = ۲۵ \\ S = \dfrac{\sum(x_i - \bar{x})^۲}{n-۱} = ۸/۱۶۹ \times ۱۰^{-۴} \end{cases}$$

$$[L,U] = \left[\bar{x} - k_{\frac{\alpha}{۲}} S, \bar{x} + k_{\frac{\alpha}{۲}} S\right] = [۰/۶۳ - ۲/۵۷۵ \times ۳/۴۵۷, ۰/۶۳ + ۲/۵۷۵ \times ۳/۴۵۷]$$

$$= [-۳/۲۷۲, ۱۴/۵۳]$$

۸-۶۷) یک نمونه متشکل از ۴۰ مشاهده از زمـان احتـراق خـرج انفجـاری موشـک بـا نتایج $\bar{T} = ۰/۲۵۰$ ثانیه و $S_T^۲ = ۰/۰۱۳۲$ گرفته شده است. بـه ازای $\gamma = ۰/۹۹$، فاصـله ای را پیدا کنید که دست کم ۹۰ درصد زمانها را در بر گیرد.

پاسخ:

$$\begin{cases} \gamma = ۰/۹۹ \\ \alpha = ۰/۱۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{T} = ۰/۲۵۰ \\ S_T^۲ = ۰/۰۱۳۲ \end{cases} \qquad \begin{cases} n = ۴۰ \\ \end{cases}$$

$$[L,U] = [\bar{T} - k_{۰/۰۵} S, \bar{T} + k_{۰/۰۵} S]$$

$$[\cdot/۲۵\cdot - ۲/۲۵۷\times ۱/۹۶ , \cdot/۲۵\cdot + ۲/۲۵۷\times ۱/۹۶] = [-٤/۱۷۳۷۲ , ٤/٦۷۳۷۲]$$

۸-٦۸) در اندازه گیری درصد تقلیل وزن گل رس کوزه گری در اثر خشک شـدن، ٤۰ نمونه از گل رس نتایج زیر را پدید آورد:

۱۷/۳	۱۷/۹	۲۰/۵	۱۹/۳
۱۹/۵	۱۷/۱	۱٦/۹	۱۵/۸
۱۹/۱	۲۲/۵	۱۸/۵	۲۰/۷
۱۷/۵	۱۸/۸	۱۸/۷	۱۸/٤
۱٦/۸	۱۹/٤	۱۲/۳	۱٤/۹
۱٦/۳	۱۷/٤	۱۹/۵	۱۷/۳
۱۹/۰	۱۸/۵	۲۳/٤	۲۱/۳
۱۸/۲	۱۷/۵	۱۸/۸	۱٦/۱
۱۷/٤	۱٦/۵	۱۸/۳	۱۸/٦
۱۸/۲	۱۷/۵	۱٦/۹	۲۰/۵

$\sum (X_i - \overline{X})^۲ = ۱۵٤/۱٦$ $\qquad$ $\overline{X} = ۱۸/۲۲۷۵$

فاصله ای پیدا کنید که با احتمال ۰/۹۹ دست کم ۷۵ درصد محصول را در بر گیرد.

پاسخ:

$$\begin{cases}\alpha = \cdot/۲۵ \\ \gamma = \cdot/۹۹\end{cases} \qquad \begin{cases}\overline{x} = ۱۸/۲۲۷۵ \\ n = ٤\cdot\end{cases} \qquad \begin{cases}S = ۱/۵۷۱ \\ \end{cases}$$

$$[L,U] = [\overline{x} - k_{\cdot/۱۲۵}S , \overline{x} + k_{\cdot/۱۲۵}S]$$

$$=[۱۸/۲۲۷۵-۱/۵۷۱\times۱/۱۵,۱۸/۲۲۷۵+۱/۵۷۱\times۱/۱۵]=[۱۶/٤۲۱,۲۰/۰۳٤]$$

۸-٦۹) در ساخت قطعات ریخته گری مورد استفاده در آخرین قطعات بال هواپیما، حد پایین عرض شکاف بعدی مهم شمرده می شود. ارائه حد پایین مشخصی مورد نیاز است که با احتمال ۰/۹۵ تضمین می کند که دست کم ۹۹ درصد از عرض شکافها در بالای این حد قرار می گیرند. نمونه ای از ۳۰ قطعه ریختگی گرفته شد و میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۰/۸۷۵۰ و ۰/۰۰۲۵اینچ به دست آمد. حد تلرانس مطلوب را پیدا کنید. به منظور تعیین فاصله تلرانس ناپارامتری با این خصوصیات به چند مشاهده نیاز است؟

پاسخ:

$$\begin{cases}\alpha=۰/۰۱\\ \gamma=۰/۹۵\end{cases}\qquad \begin{cases}\bar{x}=۰/۸۷۵۰\\ n=۳۰\end{cases}\qquad \begin{cases}S=۲/۲۲۰\\ S_x=۰/۰۰۲۵\end{cases}$$

$$[L,U]=[\bar{x}-k_{./.۱}S,+\infty)=[۰/۸۷۵۰-۲/۲۲۰\times۲/۳۲,+\infty)=[-٤/۲۷۵,+\infty)$$

۸-۷۰) با داده های مساله ٦٦، یک حد پایین تلرانس پیدا کنید که با احتمال ۰/۹۵ دست کم ۹۹ درصد حجم از آن بیشتر شود. برای یک فاصله تلرانس ناپارامتری با این خصوصیات چند مشاهده مورد نیاز است؟

پاسخ:

$$\begin{cases}\alpha=۰/۰۱\\ \gamma=۰/۹۵\end{cases}\qquad \begin{cases}\bar{x}=۵/٦۳\\ n=۲۵\end{cases}\qquad \begin{cases}S=۳/۱۵۸\\ \end{cases}$$

$$[L,U]=[\bar{x}-k_{./.۱}S,+\infty]=[۵/٦۳-۲/۳۲\times۳/۱۵۸,+\infty]=[-۱/٦۹۷,+\infty]$$

۸-۷۱) با داده های مساله ٦۸، چنان حد بالای تلرانسی پیدا کنید کـه بـا احتمـال ۰/۹۹ دست کم ۷۵ درصد محصول کمتر از آن باشد.

پاسخ:

$$\begin{cases}\alpha = ./۲۵ \\ \gamma = ./۹۹\end{cases} \qquad \begin{cases}\bar{x} = ۱۸/۲۲۷۵ \\ n_x = ٤. \end{cases} \qquad \begin{cases}S = ۱/۱۵٤ \\ \end{cases}$$

$$[L,U] = (-\infty, \bar{x} + k_{./۲۵}S] = (-\infty, ۱۸/۲۲۷۵ + ۱/۱۵٤ \times ./٦۸] = (-\infty, ۱۹/.۱۲۲]$$

۸-۷۲) فرض کنید در یک نمونه متشکل از ۳۰۰ مشـاهده، بزرگتـرین مشـاهده ۲۱/۷ و کوچکترین مشاهده ۱۸/۲ است. اگر فاصله ای مورد نظر باشد که دست کم ۹۹ درصد محصول را بپوشاند، چه احتمالی را می توان متنـاظر بـا فاصـله ۱۸/۲ تـا ۲۱/۷ قـرار داد؟

پاسخ:

$$\begin{cases}n = ۳.. \\ \alpha = ./.۱\end{cases}$$

$$[L,U] = [\bar{x} - k_{./..۵}S, \bar{x} + k_{./..۵}S] = [۱۸/۲, ۲۱/۷]$$

$$U - L = ۲k_{./..۵}S = ۲ \times ۲/۵۷۵S = ۲۱/۷ - ۱۸/۲ = ۳/۵$$

$$S = ./٦۸ \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx ۹./۵$$

۸-۷۳) در زیر بخش ۸.٤.۲، در مورد تلرانسهای یک طرفه بـرای توزیعهـای نرمـال بـا میانگین و واریانس مجهول، ضرایب K، به صورت تابعی از n معرفی شدند که

$$P\left\{\int_{\bar{X}-KS}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma} e^{-(z-\mu)^۲/۲\sigma^۲} dz \geq ۱-\alpha\right\} = \gamma$$

باشد؛ یعنی، با احتمال γ، دست کم درصدی مثل $\alpha-1$ از توزیع بزرگتر از $\overline{X}-KS$ باشد. فرض کنید σ معلوم است. ضریبی مانند K' را چنان به دست آورید که به ازای $n=16$، این احتمال که دست کم ۹/۱۰ از توزیع از $\overline{X}-K'\sigma$ بیشتر شود ۰/۹۵ باشد؛ به عبارت دیگر، K' را چنان بیابید که رابطه زیر صادق باشد:

$$P\left\{\int_{\overline{X}-K'S}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(z-\mu)^2/2\sigma^2}dz \geq 0/9\right\}=0/95$$

پاسخ:

$$\begin{cases}\alpha=0/10\\ \gamma=0/95\end{cases}\qquad \begin{cases}n=16\\ \end{cases}\qquad \Rightarrow\quad k'=2/032$$