حل المسائل کتاب آمار مهندسی

تالیف: لیبرمن، ترجمه: دکتر محلوجی

مولف:

ابوالفضل کاظمی

مهدی عزیز محمدی

فصل چهارم:
توزیع های احتمال دیگر

1- با مراجعه به بخش 1,4هرگاه مقاومتهای برشی منفرد نقطه جوشها دارای توزیع نرمال با میانگین m و انحراف معیار 10 پوند باشند و یک نمونه 16 تایی گرفته شود، احتمال وجود تفاوتی کمتر از یک پوند بین میانگین مقاومت برشی نمونه نقطه جوشها و میانگین توزیع، یعنی $P\{-1 \le \overline{X} - m \le 1\}$ را پیدا کنید.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله چنانچه متغییر X را مقاومت برشی نقطه جوشها فرض کنیم خواهیم داشت:

$$X \sim N(m,100)$$

$$\overline{X} \sim N\left(m,\frac{s^2}{n}\right) \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(m,\frac{100}{16}\right)$$

$$P\left(-1 \le \overline{X} - m \le 1\right) = P\left(\frac{-1}{2.5} \le \frac{\overline{X} - m}{s_{\overline{X}}} \le \frac{1}{2.5}\right) = P(-0.4 \le Z \le 0.4) = 2P(Z \le 0.4) = 1 - 2P(Z \ge 0.4)$$

$$= 1 - (2 * 0.3446) = 0.3108$$

2- در مسئله 1 به منظور برقراری رابطه $P\{-1 \le \overline{X} - m \le 1\} = 0.9$ به چند مشاهده نیاز است؟

پاسخ:

$$\overline{X} \sim N\left(m,\frac{100}{n}\right)$$

$$P\left(-1 \le \overline{X} - m \le 1\right) = 0.9 \Rightarrow P\left(\frac{-1}{\frac{100}{n}} \le \frac{\overline{X} - m}{s_{\overline{X}}} \le \frac{1}{\frac{100}{n}}\right) = 0.9 \Rightarrow P\left(\frac{-\sqrt{n}}{10} \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{10}\right) = 0.9$$

$$\Rightarrow 2P\left(Z \le \frac{\sqrt{n}}{10}\right) = 0.9 \Rightarrow 1 - 2P\left(Z \ge \frac{\sqrt{n}}{10}\right) = 0.9 \Rightarrow P\left(Z \ge \frac{\sqrt{n}}{10}\right) = 0.05$$

حال با مراجعه به جدول توزیع نرمال درمی یابیم:

$$P(Z > 1.645) = 0.05$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\sqrt{n}}{10} = 1.645 \Rightarrow \sqrt{n} = 16.45 \Rightarrow n \approx 271$$

3- با مراجعه به بخش 1,4 چنان رابطه ای برای اندازه نمونه بر حسب s، $K_{a/2}$ و b بنویسید که $P\{-b \le \overline{X} - m \le b\} = 1 - a$ باشد.

پاسخ:

$$P\left(-b \le \overline{X}-m \le b\right)=1-a \Rightarrow P\left(\frac{-b}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \le \frac{\overline{X}-m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \le \frac{b}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right)=1-a \Rightarrow P\left(\frac{-b}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \le Z \le \frac{b}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right)=1-a$$

$$\Rightarrow 2P\left(Z \le \frac{b}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right)=1-a \Rightarrow 1-2P\left(Z \ge \frac{b}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right)=1-a \Rightarrow P\left(Z \ge \frac{b}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right)=\frac{a}{2}$$

با توجه به سئوال قبلی میدانیم:

$$\frac{b}{\frac{s}{\sqrt{n}}}=K_{a/2} \Rightarrow n=\left(\frac{s}{b}*K_{a/2}\right)^2$$

4- از طریق انتگرال گیری مستقیم از تابع چگالی مربع کای با $n=2$ درجه آزادی، نقطه نظیر 1% مساحت(به راست) را یافته و آن را با جدول مقایسه کنید.

پاسخ:

$$f_{c_2^2}(X)=\frac{1}{2}e^{-\frac{X}{2}} \quad ;X>0$$

$$\int_{c^2_{0.01;2}}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{X}{2}}dx=-e^{-\frac{X}{2}}\Big|_{X=c^2_{0.01;2}}^{\infty}=0.01 \Rightarrow e^{-c^2_{0.01;2}/2}=0.01 \Rightarrow c^2_{0.01;2}=-2Ln(0.01) \Rightarrow c^2_{0.01;2}=9.210$$

با مراجعه به جدول نیز خواهیم دید $c^2_{0.01;2}=9.210$. بنابراین مقدار بدست آمده با مقدار موجود در جدول بر هم منطبق می باشند.

5- درستی رابطه های $E(c^2)=n$ و $s^2_{c^2}=2n$ را نشان دهید.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله چنانچه X را متغییری دارای توزیع کای مربع فرض نماییم و با توجه به تابع توزیع کای مربع و همچنین تابع مولد گشتاور آن خواهیم داشت:

$$X \sim c_n^2$$

$$f_X(X)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}*X^{\frac{n}{2}-1}*e^{-\frac{1}{2}X};X>0$$

$$G_X(t)=(1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

حال از آنجا که امید متغییر X مشتق اول از تابع مولد گشتاور حول t با مقدار صفر و امید X^2 نیز مشتق دوم از تابع مولد گشتاور حول t با مقدار صفر می باشد خواهیم داشت:

$$\mathrm{E}(X)=\left.\frac{dG_X(t)}{dt}\right|_{t=0}=\frac{d}{dt}\left((1-2t)^{-\frac{n}{2}}\right)\bigg|_{t=0}=\left(n(1-2t)^{-\frac{n}{2}-1}\right)\bigg|_{t=0}=n$$

$$\mathrm{E}(X^2)=\left.\frac{d^2G_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=\frac{d}{dt}\left(n(1-2t)^{-\frac{n}{2}-1}\right)\bigg|_{t=0}=\left(n(n+2)(1-2t)^{-\frac{n}{2}-2}\right)\bigg|_{t=0}=n(n+2)$$

$$Var(X)=s^2_{c_2}=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=n(n+2)-n^2=2n$$

توجهداشته باشید که توزیع مربع کای خود توزیعی مشتق شده از توزیع گاما می باشد بطوری که چنانچه در توزیع گاما $a=\frac{n}{2}$ و $b=\frac{1}{2}$ قرار دهیم توزیع گاما به توزیع کای مربع تغییر خواهد کرد. و بهمین طریق و با ایجاد همین تغییرات در تابع مولد گشتاور توزیع گاما می توان تابع مولد گشتاور توزیع مربع کای را نیز ایجاد نمود. البته توجه داشته باشید با استفاده از انتگرال گیری از تابع توزیع کای در فاصله صفر تا بینهایت نیز میتوان تابع مولد گشتاور را بدست آورد، تابع توزیع گاما عبارتست از:

$$f(X)=\frac{b^a}{\Gamma(a)}*X^{a-1}e^{-bX}\,;X>0$$

$$G_X(t)=\mathrm{E}(e^{tX})=\int_0^\infty\frac{b^a}{\Gamma(a)}*X^{a-1}e^{-bX}dx=\frac{b^a}{(b-t)^a}\int_0^\infty G(a,b-t)dx=\left(\frac{b}{b-t}\right)^a;b>t$$

توجه داشته باشید مقدار $\int_0^\infty G(a,b-t)dx$ برابر 1 می باشد.

6- واریانس نمونه، S^2، (برآوردی برای s^2) نامیده می َود که در آن $S^2=\frac{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n-1}$ باشد بطور حسی، خاصیتی مطلوب برای واریانس نمونه صدق $\mathrm{E}(S^2)=s^2$ در مورد آن است. با پذیرش این فرض که X_iها، متغییرهای تصادفی مستقل با توزیع نرمال با میانگین m و واریانس s^2 هستند ثابت کنید $\mathrm{E}(S^2)=s^2$ است. همین نتیجه را بدون فرض نرمال بودن(اما با فرض مستقل و هم توزیع بودن) اثبات کنید.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله و فرض نرمال بودن X ها خواهیم داشت:

$$X\sim N(m,s^2)$$

$$\mathrm{E}(S^2)=\mathrm{E}\left(\left(\frac{s^2}{n-1}\right)*\frac{(n-1)S^2}{s^2}\right)=\left(\frac{s^2}{n-1}\right)*\mathrm{E}\left(\frac{(n-1)S^2}{s^2}\right)=\left(\frac{s^2}{n-1}\right)*\mathrm{E}\left(c^2_{(n-1)}\right)$$

با توجه به پاسخ سئوال 5:

$$\mathrm{E}(c_n^2)=n$$

حال خواهیم داشت:

$$\mathrm{E}(S^2)=\mathrm{E}\left(\left(\frac{s^2}{n-1}\right)*\frac{(n-1)S^2}{s^2}\right)=\left(\frac{s^2}{n-1}\right)*\mathrm{E}\left(\frac{(n-1)S^2}{s^2}\right)=\left(\frac{s^2}{n-1}\right)*\mathrm{E}\left(c^2_{(n-1)}\right)=\left(\frac{s^2}{n-1}\right)*(n-1)$$
$$=s^2$$

حال چنانچه فرض نرمال بودن را کنار گذاشته و تنها فرضهای مستقل و هم توزیع بودن را مد نظر قرار دهیم داریم:

$$\mathrm{E}(S^2)=\mathrm{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n-1}\right)=\left(\frac{1}{n-1}\right)*\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right)=\left(\frac{1}{n-1}\right)*\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-m\right)^2-n\left(\overline{X}-m\right)^2\right)$$

$$=\left(\frac{1}{n-1}\right)*\left[\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-m\right)^2\right)-\mathrm{E}\left(n\left(\overline{X}-m\right)^2\right)\right]=\left(\frac{1}{n-1}\right)*\left[\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(X_i-m\right)^2-n\mathrm{E}\left(\left(\overline{X}-m\right)^2\right)\right]$$

$$=\left(\frac{1}{n-1}\right)*\left[\sum_{i=1}^{n}s^2-n\left(\frac{s^2}{n}\right)\right]=\left(\frac{1}{n-1}\right)*\left[ns^2-s^2\right]=s^2$$

توجه داشته باشید:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(X_i-\overline{X}\right)-\left(\overline{X}-m\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2-n\left(\overline{X}-m\right)^2$$

7- اگر c^2 توزیع مربع کای با 9 درجه آزادی داشته باشد، $P\{c^2\le 8\}$، $P\{c^2\ge 6\}$ و $P\{4\le c^2\le 9\}$ را پیدا کنید.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله و با رجوع به جدول توزیع کای مربع خواهیم داشت:

$$P\left(c^2\le 8\right)=1-P\left(c^2\ge 8\right)=1-0.54=0.46$$
$$P\left(c^2\ge 6\right)=0.74$$
$$P\left(4\le c^2\le 9\right)=P\left(c^2\ge 4\right)-P\left(c^2\ge 9\right)=0.91-0.45=0.46$$

توجه داشته باشید در مراجعه به جدول توزیع کای مربع اعداد مربوط به درجه آزادی 9 را بررسی می کنیم و مورد استفاده قرار می دهیم.

8- اگر c^2 توزیع مربع کای با 19 درجه آزادی داشته باشد، $P\{c^2\le 20\}$، $P\{c^2\ge 15\}$ و $P\{16\le c^2\le 21\}$ را پیدا کنید.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله و با رجوع بع جدول توزیع کای مربع خواهیم داشت:

$$P\left(c^2\le 20\right)=1-P\left(c^2\ge 20\right)=1-0.40=0.60$$
$$P\left(c^2\ge 15\right)=0.72$$
$$P\left(16\le c^2\le 21\right)=P\left(c^2\ge 16\right)-P\left(c^2\ge 21\right)=0.73-0.41=0.32$$

توجه داشته باشید در مراجعه به جدول توزیع کای مربع اعداد مربوط به درجه آزادی 19 را بررسی می کنیم و مورد استفاده قرار می دهیم.

9- در مثال ایجاد سوراخ بر روی یک میز از طریق مته کاری که در زیر بخش 1,2,4 ارائه شد، احتمال کمتر از 2/44 واحد بودن فاصله نقطه اندازه گیری شده از محل مطلوب چقدر است؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله و همچنین سئوال مورد بحث در کتاب خواهیم داشت:

$$X_1 \sim N(0,1)$$
$$X_2 \sim N(0,1)$$
$$Y = X_1^2 + X_2^2 \Rightarrow Y \sim c_2^2$$
$$P(Y < 2.44) = 1 - P(Y > 2.44) = 1 - 0.31 = 0.69$$

در حل این مسئله توجه به دو نکته الزامی است. ابتدا آنکه فاصله مورد نظر همچون قطر یک مثلث بوده و بهمین دلسل از فرمول $Y = X_1^2 + X_1^2$ استفاده گردیده است. نکته دوم آنکه هرگاه یک متغییر که دارای توزیع نرمال استاندارد می باشد بتوان 2 برسد، دارای توزیع کای مربع با یک درجه آزادی شده و مجموع چند متغییر با توزیع کای مربع نیز توزیع کای مربع با مجموع درجه آزادی آن متغییر ها می باشد همانند:

$$X \sim N(0,1)$$
$$X^2 \sim c_1^2$$
$$Y = c_1^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_6^2 \Rightarrow Y \sim c_{14}^2$$

10- در مسئله سفینه فضایی از زیر بخش 1,2,4، اگر $s^2 = 5$ باشد، احتمال فراتر رفتن فاصله میان نقطه فرود و هدف از 2/63 یا چقدر است؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله و همچنین سئوال مورد بحث در کتاب خواهیم داشت:

$$X_1 \sim N(0,5)$$
$$X_2 \sim N(0,5)$$
$$Y = \frac{X_1^2 + X_2^2}{5} \Rightarrow Y \sim c_2^2$$
$$P(X_1^2 + X_2^2 > 2.63) = P(5Y > 2.63) = P(Y > 0.526) = 0.74$$

جهت توضیحات بیشتر مراجعه شود به توضیحات پاسخ سئوال 9.

11- X و Y مولف های افقی و عمودی انحرافات یک تیر از مرکز هدف هستند. X و Y به طور مستقل دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیارهای، به ترتیب 8 و 10 اینچ تعریف می شوند، معادله یک بیضی را چنان پیدا کنید که یک تیر به احتمال 0/95 در داخل آن فرو آید.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله دو راه حل برای این مسئله موجود می باشد که در ادامه به بیان هر دو آنها می پردازیم:

روش اول:

در این روش پس از بدست آوردن معادله بیضی از آنجا که معادله بیضی دارای توزیع کای مربع با دو درجه آزادی است از خواص این توزیع استفاده می نماییم و داریم:

$$X \sim N(0,64)$$
$$Y \sim N(0,100)$$
$$\text{معادله بیضی}: \left(\frac{X-a}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y-b}{b}\right)^2 = C$$
$$\left(\frac{X-a}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y-b}{b}\right)^2 = \left(\frac{X-0}{8}\right)^2 + \left(\frac{Y-0}{10}\right)^2 = C \sim c_2^2$$

از آنجا که توزیع کایم مربع با 2 درجه آزادی همان توزیع نمایی با پارامتر 2 است خواهیم داشت:

$$f_Z(C)=\frac{1}{2}e^{-\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow P(Z\le C)=0.95\Rightarrow\int_0^C\frac{1}{2}e^{-\frac{C}{2}}dc=0.95\Rightarrow 1-e^{-\frac{C}{2}}=0.95\Rightarrow C=5.99$$

در نتیجه خواهیم داشت:

معادله بیضی : $\frac{X^2}{64}+\frac{Y^2}{100}=5.99$

توجه داشته باشید از آنجا که هر یک ار عبارات $\left(\frac{X-0}{8}\right)$ و $\left(\frac{Y-0}{10}\right)$ دارای توزیع نرمال استاندارد هستند با توجه به توضیحات مسئله 9 مجموع آنها پس از بتوان 2 رسیدن آنها دارای توزیع کای مربع با 2 درجه آزادی می باشد.

روش دوم:

در این روش نیز پس از بدست آوردن معادله بیضی از آنجا که معادله بیضی دارای توزیع کای مربع با دو درجه آزادی است از جدول این توزیع استفاده می نماییم و داریم:

$$X\sim N(0,64)$$
$$Y\sim N(0,100)$$

معادله بیضی : $\left(\frac{X-a}{a}\right)^2+\left(\frac{Y-b}{b}\right)^2=C$

$$\left(\frac{X-a}{a}\right)^2+\left(\frac{Y-b}{b}\right)^2=\left(\frac{X-0}{8}\right)^2+\left(\frac{Y-0}{10}\right)^2=C\Rightarrow\frac{X^2}{64}+\frac{Y^2}{100}\sim c_2^2$$
$$P(Z\le C)=0.95\Rightarrow 1-P(Z>C)=0.95\Rightarrow P(Z>C)=0.05$$

حال با مراجعه به جدول توزیع کای مربع خواهیم داشت:

$$c^2_{0.05,2}=5.991$$

در نتیجه داریم:

$$C=5.991$$

معادله بیضی : $\frac{X^2}{64}+\frac{Y^2}{100}=5.99$

12- اگر c_1^2 توزیع مربع کای با 7 درجه آزادی و c_2^2 توزیع مربع کای با 3 درجه آزادی داشته باشد، احتمال بیشتر از 12 شدن $c_1^2+c_2^2$ را پیدا کنید.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$X_1\sim c_7^2$$
$$X_2\sim c_3^2$$
$$X_1+X_2\sim c_{10}^2$$
$$P(X_1+X_2>12)=0.29$$

13- اگر c_1^2 توزیع مربع کای با 4 درجه آزادی و c_2^2 توزیع مربع کای با 5 درجه آزادی داشته باشد، احتمال بیشتر از 19 شدن $c_1^2+c_2^2$ را پیدا کنید.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$X_1 \sim c_4^2$$
$$X_2 \sim c_5^2$$
$$Y = X_1 + X_2 \sim c_9^2$$
$$P(Y > 19) = 0.025$$

14- احتمال $\{0.618 \le S^2/s^2 \le 1.6\}$ را پیدا کنید، هرگاه S^2 مبتنی بر یک نمونه تصادفی متشکل از 11 مشاهده از یک متغیر تصادفی باشد، که توزیع نرمال با میانگین مجهول m و واریانس s^2 دارد.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$P\left(0.618 \le S^2/s^2 \le 1.6\right) = P\left((n-1)*0.618 \le \frac{(n-1)S^2}{s^2} \le (n-1)*1.6\right)$$

حال با توجه به: $\frac{(n-1)S^2}{s^2} \sim c_{(n-1)}^2$ و از آنجا که $(n-1) = 10$ خواهیم داشت:

$$P\left((n-1)*0.618 \le \frac{(n-1)S^2}{s^2} \le (n-1)*1.6\right) = P\left(6.18 \le c_{10}^2 \le 16\right) = P\left(6.18 \le c_{10}^2\right) - P\left(c_{10}^2 \ge 16\right)$$
$$= 0.79 - 0.10 = 0.69$$

15- در مراجعه به مسئله 14، برای برقراری رابطه $P\{0.618 \le S^2/s^2 \le 1.6\} \ge 0.95$ به چند مشاهده نیاز است؟

پاسخ:

با توجه به پاسخ مسئله 14 خواهیم داشت:

$$P\left(0.618 \le S^2/s^2 \le 1.6\right) = 0.95 \Rightarrow P\left((n-1)*0.618 \le \frac{(n-1)S^2}{s^2} \le (n-1)*1.6\right) = 0.95$$

حال با توجه به: $\frac{(n-1)S^2}{s^2} \sim c_{(n-1)}^2$ خواهیم داشت:

$$P\left((n-1)*0.618 \le \frac{(n-1)S^2}{s^2} \le (n-1)*1.6\right) = P\left((n-1)*0.618 \le c_{(n-1)}^2 \le (n-1)*1.6\right)$$
$$= P\left((n-1)*0.618 \le c_{(n-1)}^2\right) - P\left(c_{(n-1)}^2 \ge (n-1)*1.6\right) = 0.95$$

حال با استفاده از جدول توزیع مربع کای و با سعی و خطا اقدام به انتخاب تعداد نمونه نموده تا سرانجام به مقدار مطلوب برسیم در ادامه با این روش سعی در استخراج تعداد نمونه خواهیم داشت:

اگر n=30 قرار دهیم:

$$P\left(29*0.618 \le c_{29}^2\right) - P\left(c_{29}^2 \ge 29*1.6\right) = P\left(17.922 \le c_{29}^2\right) - P\left(c_{29}^2 \ge 46.4\right) = 0.958 - 0.03 = 0.928$$

حال از آنجا که مقدار بدست آمده از مقدار مورد توجه یعنی 0/95 کمتر است عدد نمونه دیگری را انتخاب می نماییم از آنجا که عدد بزرگتر از 30 در جدول توزیع مربع کای 40 است، تعداد نمونه را برابر 40 فرض می نماییم:

$$P\left(39*0.618 \le c_{39}^2\right) - P\left(c_{39}^2 \ge 39*1.6\right) = P\left(24.102 \le c_{39}^2\right) - P\left(c_{39}^2 \ge 62.4\right) = 0.977 - 0.014 = 0.0.963$$

حال از آنجا که مقدار بدست آمده از مقدار مورد توجه یعنی 0/95 بیشتر است عدد نمونه را 40 انتخاب می نماییم.

16- درجه حرارت وضعیت روشن یک کلید که با ترموستات کنترل می شود، توزیع نرمال میانگین و واریانس مجهول دارد. قرار است یک نمونه تصادفی گرفته و واریانس نمونه محاسبه شود. برای برقراری رابطه $P\{S^2/s^2 \le 1.83\} \ge 0.99$ به چند مشاهده نیاز است؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله در حل این سئوال نیز همچون مسئله 15 عمل می نماییم، بنابراین خواهیم داشت:

$$P\left(S^2/s^2 \le 1.83\right) \ge 0.99 \Rightarrow 1 - P\left(\frac{(n-1)S^2}{s^2} \ge 1.83(n-1)\right) \ge 0.99$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{(n-1)S^2}{s^2} \ge 1.83(n-1)\right) \le 0.01$$

حال تعداد نمونه را 26 فرض می نماییم و خواهیم داشت:

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{s^2} \ge 1.83*(25)\right) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{s^2} \ge 45.75\right) = 0.0099 \le 0.01$$

بنا براین عدد نمونه گیری را 26 انتخاب می کنیم.

17- تصور کنید یک نمونه تصادفی متشکل از 10 مشاهده از پاسخ به داروی X گرفته می شود. هر پاسخ توزیع نرمال با میانگین 7 و واریانس 2 دارد. نمونه تصادفی دیگری متشکل از 10 مشاهده از پاسخ به داروی Y گرفته می شود. هر پاسخ توزیع نرمال با میانگین 9 و واریانس 2 دارد. $\mathrm{E}\left(S_X^2 + S_Y^2\right)$ را پیدا کنید.

پاسخ:

با توجه به اینکه X ها و Y ها مستقل از یکدیگرند بنابراین S_X^2 و S_Y^2 نیز از یکدیگر مستقلند بنابراین خواهیم داشت:

$$X \sim N(7,2)$$
$$Y \sim N(9,2)$$
$$\mathrm{E}\left(S_X^2 + S_Y^2\right) = \mathrm{E}\left(S_X^2\right) + \mathrm{E}\left(S_Y^2\right) = s_X^2 + s_Y^2 = 2 + 2 = 4$$

توجه داشته باشید در این سئوال بدلیل نااریب بودن $\hat{S}$ آنها را با s برآورد نموده ایم. برای توضیحات بیشتر به پاسخ سئوال 6 مراجعه نمایید.

18- قرار است انحراف معیار نمونه، S_1، برای مقاومت نوعی قطعه برقی براساس یک نمونه 7 تایی محاسبه شود. به منظور ایجاد مونتاژ نهایی قطعه دیگری به قطعه اول افزوده می شود، که انحراف معیار آن، S_2، نیز براساس یک نمونه 7 تایی محاسبه می شود. میدانیم که دو قطعه از هم مستقل و هر یک دارای توزیع نرمال با واریانس مشترک و مجهول s^2 است. برآورد واریانس مونتاژ نهایی، $S_1^2 + S_2^2$ خواهد بود. احتمال کمتر شدن $\left(S_1^2 + S_2^2\right)/s^2$ از 3 چقدر است؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات سئوال خواهیم داشت:

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{s^2}=\frac{6S_1^2}{s^2}\sim c_6^2$$
$$\frac{(n_2-1)S_2^2}{s^2}=\frac{6S_2^2}{s^2}\sim c_6^2$$

حال با توجه به دو رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\frac{6S_1^2}{s^2}+\frac{6S_2^2}{s^2}=\frac{6\left(S_1^2+S_2^2\right)}{s^2}\sim c_{12}^2$$
$$P\left(\frac{S_1^2+S_2^2}{s^2}<3\right)=P\left(\frac{6\left(S_1^2+S_2^2\right)}{s^2}<18\right)=P\left(c_{12}^2<18\right)=1-P\left(c_{12}^2>18\right)=????$$

19- در مسئله 18، به منظور صدق رابطه $P\{\left(S_1^2+S_2^2\right)/s^2\le 3\}=0.99$ به چند مشاهده از هر نوع قطعه نیاز است؟

پاسخ:

$$P\left(\frac{S_1^2+S_2^2}{s^2}\le 3\right)=0.99\Rightarrow 1-P\left(\frac{(n-1)\left(S_1^2+S_2^2\right)}{s^2}>3(n-1)\right)=0.99\Rightarrow P\left(c_{2(n-1)}^2>3(n-1)\right)=0.01$$
$$\Rightarrow 3(n-1)=c_{0.01;2(n-1)}^2$$

20- اگر X دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس s^2 و $R^2=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2\right)/n$ باشد، درستی رابطه $s_{R^2}^2=2s^4/n$ را نشان دهید.(راهنمایی: از رابطه $s_{c^2}^2=2n$ استفاده کنید.)

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله و فرمول تبدیل توزیع نرمال استاندارد به توزیع کای مربع خواهیم داشت:

$$X\sim N\left(0,s^2\right)$$
$$\frac{X-0}{s}=\frac{X}{s}\sim N(0,1)\Rightarrow\left(\frac{X}{s}\right)^2=\frac{X^2}{s^2}\sim c_{(1)}^2$$
$$R^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(X_i^2\right)}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(X_i^2\right)s^2}{n*s^2}=\frac{s^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(X_i^2\right)}{s^2}=\frac{s^2}{n}\sum_{i=1}^{n}c_{(1)}^2=\frac{s^2}{n}*c_{(n)}^2$$
$$\Rightarrow s_{R^2}^2=Var\left(R^2\right)=Var\left(\frac{s^2}{n}*c_{(n)}^2\right)=\left(\frac{s^2}{n}\right)^2*2n=\frac{2s^4}{n}$$

در پاسخ به این سئوال توجه داشته باشید $Var\left(c_{(n)}^2\right)=2n$

21- اگر X دارای توزیع نرمال با میانگین m و واریانس s^2 داشته و $S^2=\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2/(n-1)$ باشد، $\mathrm{E}\left(S^2\right)$ و $s_{S^2}^2$ را پیدا کنید. (راهنمایی: روابط $\mathrm{E}\left(c^2\right)=n$ و $s_{c^2}^2=2n$ را بکار ببرید)

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$X \sim N\left(m, s^2\right)$$

$$\mathrm{E}\left(S^2\right)=\mathrm{E}\left[\left(\frac{s^2}{n-1}\right)*\left(\frac{(n-1)S^2}{s^2}\right)\right]=\left(\frac{s^2}{n-1}\right)\mathrm{E}\left(\frac{(n-1)S^2}{s^2}\right)=\left(\frac{s^2}{n-1}\right)\mathrm{E}\left(c^2_{(n-1)}\right)=\left(\frac{s^2}{n-1}\right)*(n-1)=s^2$$

توجه داشته باشید در راه حل بالا از فرمول $\mathrm{E}\left(c_n^2\right)=n$ استفاده نمودیم.

$$s^2_{S^2}=Var\left(S^2\right)=Var\left[\left(\frac{s^2}{n-1}\right)*\left(\frac{(n-1)S^2}{s^2}\right)\right]=\left(\frac{s^2}{n-1}\right)^2 Var\left(\frac{(n-1)S^2}{s^2}\right)=\frac{s^4}{(n-1)^2}*2(n-1)$$

$$=\frac{2s^4}{(n-1)}$$

توجه داشته باشید در راه حل بالا از فرمول $Var\left(c_n^2\right)=2n$ استفاده نمودیم.

22-تصور کنید یک نمونه تصادفی n تایی گرفته می شود که در آن $X_n,...,X_2,X_1$ توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس s^2 دارد. الف) $\mathrm{E}\left(\sum X_i^2\right)$ را پیدا کنید. ب) اگر فرض توزیع نرمال معتبر نباشد، و با وجود این Xها دارای میانگین صفر و واریانس s^2 باشد، $\mathrm{E}\left(\sum X_i^2\right)$ را پیدا کنید.

پاسخ:

الف)

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$X \sim N\left(0, s^2\right)$$

$$\mathrm{E}\left(\sum X_i^2\right)=\mathrm{E}\left(s^2\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{s^2}\right)=s^2\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-0}{s}\right)^2\right)=s^2\mathrm{E}\left(c_n^2\right)=ns^2$$

جهت توضیحات بیشتر به پاسخ سئوال 9 مراجعه شود.

ب)

با توجه به توضیحات مسئله ابتدا می بایست $\mathrm{E}\left(X_i^2\right)$ را محاسبه نماییم:

$$Var\left(X_i\right)=s^2 \Rightarrow Var\left(X_i\right)=\mathrm{E}\left(X_i^2\right)-\mathrm{E}\left(X_i\right)^2=s^2 \Rightarrow \mathrm{E}\left(X_i^2\right)=s^2$$

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(X_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n}s^2=ns^2$$

توجه داشته باشید در متن سئوال $\mathrm{E}\left(X_i\right)$ برابر با صفر فرض شده است. و از سوی دیگر به دلیل استقلال نمونه های تصادفی $\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)$ را برابر با $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(X_i^2\right)$ قرار داده ایم.

23- ثابت کنید که تابع چگالی متغییر تصادفی t با بینهایت شدن درجات آزادی، n، به توزیع نرمال استاندارد میل می کند. فرض کنید که ضریب ثابت به $1/\sqrt{2p}$ میل می کند.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله و همچنین تابع توزیع t خواهیم داشت:

$$f_t(Z)=\frac{1}{\sqrt{pn}}*\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}*\left(1+\frac{Z^2}{n}\right)^{\frac{-(n+1)}{2}}\;;-\infty<Z<\infty$$

$$Lim_{n\to\infty} f_+(Z)=Lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{pn}}*\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}*\left(1+\frac{Z^2}{n}\right)^{\frac{-(n+1)}{2}}\right]$$

حال برای سادگی کار عبارت $\frac{1}{\sqrt{pn}}*\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}*\left(1+\frac{Z^2}{n}\right)^{\frac{-(n+1)}{2}}$ را به دو قسمت تقسیم می نماییم بطوریکه قسمت I (ضریب ثابت) عبارتست از $\frac{1}{\sqrt{pn}}*\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ و قسمت II نیز عبارتست از $\left(1+\frac{Z^2}{n}\right)^{\frac{-(n+1)}{2}}$ و خواهیم داشت:

$$Lim_{n\to\infty} f_t(Z)=Lim_{n\to\infty}(\mathrm{I})*Lim_{n\to\infty}(\mathrm{II})$$

$$Lim_{n\to\infty}(\mathrm{I})=Lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{pn}}*\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=Lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{pn}}*\frac{\left(\frac{n+1}{2}-1\right)!}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!}=Lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{pn}}*\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!}$$

$$=\frac{1}{2p}$$

$$Lim_{n\to\infty}(\mathrm{II})=Lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{Z^2}{n}\right)^{\frac{-(n+1)}{2}}=Lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{Z^2}{n}\right)^{\frac{-n}{2}}*\left(1+\frac{Z^2}{n}\right)^{\frac{-1}{2}}=Lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{Z^2}{n}\right)^{\frac{-n}{2}}$$

$$=Lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{Z^2}{n}\right)^n\right]^{\frac{-1}{2}}=\left[e^{Z^2}\right]^{\frac{-1}{2}}=e^{-\frac{Z^2}{2}}$$

حال با توجه به حد دو قسمت I و II خواهیم داشت:

$$Lim_{n\to\infty} f_t(Z)=Lim_{n\to\infty}(\mathrm{I})*Lim_{n\to\infty}(\mathrm{II})=\frac{1}{\sqrt{2p}}e^{-\frac{Z^2}{2}}=f_N(Z)$$

توجه داشته باشید در حد گیری قسمت از خاصیت تابع گاما استفاده گردیده بطوریکه $\Gamma(a)=(a-1)!$، و از سوی دیگر توجه داشته باشید که در متن سئوال (مفروضات مسئله) عنوان گردیده "فرض کنید که ضریب ثابت به $1/\sqrt{2p}$ میل می کند" و بهمین دلیل نیز $\frac{1}{2p}=Lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{pn}}*\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!}$ اعمال گردید.

24-از طریق انتگرال گیری مستقیم از تابع چگالی t با $n=1$ درجه آزادی، نقطه نظیر 5% مساحت (به راست) را یافته و آن را با مقدار قید شده در جدول مقایسه کنید.

پاسخ:

$$f_t(X)=\frac{1}{\sqrt{pn}}*\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}*\left(1+\frac{X^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$n=1\Rightarrow f_t(X)=\frac{1}{\sqrt{p*1}}*\frac{\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}*\left(1+\frac{X^2}{1}\right)^{-\left(\frac{1+1}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{p}}*\frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}*\left(1+X^2\right)^{-(1)}$$

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty Y^{a-1}.e^{-Y}dy\Rightarrow\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty Y^{\frac{1}{2}-1}.e^{-Y}dy=\int_0^\infty Y^{-\frac{1}{2}}.e^{-Y}dy$$

از طرفی داریم:

$$X=\sqrt{2Y}\Rightarrow X^2=2Y\Rightarrow 2Xdx=2dy\Rightarrow Xdx=dy$$

حال خواهیم داشت:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty Y^{-\frac{1}{2}}.e^{-Y}dy=\int_0^\infty\left(\frac{X^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}.e^{-\frac{X^2}{2}}.Xdx=\int_0^\infty\left(\frac{X^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}.e^{-\frac{X^2}{2}}.Xdx=\int_0^\infty\sqrt{2}.e^{-\frac{X^2}{2}}dx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\frac{X^2}{2}}dx$$

از طرفی دیگر با توجه به تابع توزیع نرمال استاندارد داریم:

$$f_Z(X)=\frac{1}{\sqrt{2p}}e^{-\frac{X^2}{2}}\Rightarrow\int_{-\infty}^\infty f_Z(X)=1\Rightarrow\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{\sqrt{2p}}e^{-\frac{X^2}{2}}dx=1\Rightarrow\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{X^2}{2}}dx=\sqrt{2p}$$

حال با توجه به متقارن بودن توزیع نرمال خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{X^2}{2}}dx=\sqrt{2p}\Rightarrow\int_0^\infty e^{-\frac{X^2}{2}}dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{X^2}{2}}dx\right)=\frac{\sqrt{2p}}{2}$$

حال با استفاده از مقدار بدست آمده برای $\int_0^\infty e^{-\frac{X^2}{2}}dx$ ، مقدار عبارت $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\frac{X^2}{2}}dx$ عبارتست از:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\frac{X^2}{2}}dx=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2p}}{2}\right)=\sqrt{p}$$

حال خواهیم داشت:

$$n=1 \Rightarrow f_t(X)=\frac{1}{\sqrt{p}}*\frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}*\left(1+X^2\right)^{-(1)}=\frac{1}{\sqrt{p}}*\frac{1}{\sqrt{p}}*\frac{1}{\left(1+X^2\right)}$$

$$f_t(X)=\frac{1}{p}*\frac{1}{\left(1+X^2\right)}$$

$$\int_{t_{0.05;1}}^{\infty}\frac{1}{p}*\frac{1}{\left(1+X^2\right)}dx=0.05 \Rightarrow \frac{1}{p}\left(tg^{-1}(X)\Big|_{X=t_{0.05;1}}^{\infty}\right)=0.05 \Rightarrow \frac{1}{p}\left(\frac{p}{2}-tg^{-1}\left(t_{0.05;1}\right)\right)=0.05$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p}tg^{-1}\left(t_{0.05;1}\right)=0.45 \Rightarrow tg^{-1}\left(t_{0.05;1}\right)=1.414 \Rightarrow t_{0.05;1}=tg(1.414)=6.314$$

با مراجعه به جدول توزیع t نیز در می یابیم: $t_{0.05;1}=6.314$

25- درستی رابطه $\mathrm{E}(t)=0$ را به ازای $n>1$ و درستی رابطه $s_t^2=n/(n-2)$ را به ازای $n>2$ نشان دهید.

پاسخ:

با توجه به فرمول توزیعهای t و F خواهیم داشت:

$$t_{(n)}=\frac{Z}{\sqrt{\frac{c_{(n)}^2}{n}}}$$

$$F_{n1,n2}=\frac{\frac{c_{(n1)}^2}{n_1}}{\frac{c_{(n2)}^2}{n_2}}$$

$$Z^2 \sim c_{(1)}^2$$

حال با توجه به عبارات بالا داریم:

$$t_{(n)}^2=\frac{Z^2}{\frac{c_{(n)}^2}{n}}=\frac{c_{(1)}^2}{\frac{c_{(n)}^2}{n}}=\frac{\frac{c_{(1)}^2}{1}}{\frac{c_{(n)}^2}{n}}=F_{1,n}$$

$$s_{t_n}^2=\mathrm{E}\left(t_{(n)}^2\right)-\mathrm{E}\left(t_{(n)}\right)^2=\mathrm{E}\left(t_{(n)}^2\right)-0=\mathrm{E}\left(F_{1,n}\right)=\frac{n}{n-2}$$

توجه داشته باشید جهت محاسبه $\mathrm{E}\left(F_{1,n}\right)$ از فرمول $\mathrm{E}\left(F_{n1,n2}\right)=\frac{n_2}{n_2-2}$ استفاده شده است که جهت اطلاع از نحوه اثبات آن می توانید به پاسخ سئوال 31 مراجعه نمایید.

26-اگر t دارای توزیع t با 9 درجه آزادی باشد، $P\left\{-\frac{8}{3}<t\right\}$ و $P\left\{\frac{4}{3}\le t\right\}$ و $P\{-3.25\le t\le 3.25\}$ را پیدا کنید.

پاسخ:

با توجه به مفروضات سئوال با مراجعه به جدول توزیع t و با توجه به درجه آزادی 9 خواهیم داشت:

$$P\left(-\frac{8}{3}<t_9\right)=1-P\left(t_9>\frac{8}{3}\right)=1-0.014=0.986$$
$$P\left(\frac{4}{3}\le t_9\right)=0.11$$
$$P(-3.25\le t_9\le 3.25)=2P(t_9\le 3.25)=1-2P(t_9\ge 3.25)=1-(2*0.05)=0.9$$

27- **اگر متغیر تصادف t دارای توزیع t با 25 درجه آزادی باشد،** $P\left\{-\frac{20}{9}\le t\right\}$ **و** $P\left\{\frac{10}{9}\le t\right\}$ **و** $P\{-2.787\le t\le 2.787\}$ **را پیدا کنید.**

پاسخ:

با توجه به مفروضات سئوال با مراجعه به جدول توزیع t و با توجه به درجه آزادی 25 خواهیم داشت:

$$P\left(-\frac{20}{9}<t_{25}\right)=1-P\left(t_{25}>\frac{20}{9}\right)=1-0.015=0.985$$
$$P\left(\frac{10}{9}\le t_{25}\right)=0.148$$
$$P(-2.787\le t_{25}\le 2.787)=2P(t_{25}\le 2.787)=1-2P(t_{25}\ge 2.787)=1-(2*0.005)=0.99$$

28- $P\left\{-1.383\le\left[(\overline{X}-m)\sqrt{10}\right]/S\right\}$ **را پیدا کنید، اگر** $\overline{X}$ **و S مبتنی بر 10 مشاهده باشند.**

پاسخ:

با توجه به فرمول توزیع t خواهیم داشت:

$$\frac{(\overline{X}-m)}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=t_{n-1}\Rightarrow\frac{(\overline{X}-m)\sqrt{10}}{S}=\frac{(\overline{X}-m)}{\frac{S}{\sqrt{10}}}=t_9$$
$$P\left(-1.383\le\left[(\overline{X}-m)\sqrt{10}\right]/S\right)=P(-1.383\le t_9)=1-P(1.383\le t_9)=0.9$$

29- $P\left\{-1.383\le\left[(\overline{X}-m)\sqrt{10}\right]/S\right\}$ **را پیدا کنید، اگر** $\overline{X}$ **مبتنی بر 10 مشاهده و S مبتنی بر 20 مشاهده باشد.**

پاسخ:

با توجه به فرمول توزیع t خواهیم داشت:

$$\frac{\frac{(\overline{X}-m)}{\frac{s}{n}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)S^2}{s^2}}{(n-1)}}}=t_{n-1}\Rightarrow\frac{\frac{(\overline{X}-m)}{\frac{s}{10}}}{\sqrt{\frac{\frac{(20-1)S^2}{s^2}}{(20-1)}}}=t_{19}$$
$$P\left(-1.383\le\left[(\overline{X}-m)\sqrt{10}\right]/S\right)=P(-1.383\le t_{19})=1-P(1.383\le t_{19})\approx 0.91$$

توجه داشته باشید فرمول بالا از تقسیم توزیع نرمال استاندارد بر جذر توزیع کای مربع که بر درجه آزادی خود تقسیم شده است بدست آمده است.

30-نشان دهید $t^2_{a/2;n} = F_{a;1,n}$ است، یعنی نشان دهید $P(t^2 \geq t^2_{a/2;n}) = P(F \geq F^2_{a;1,n})$ که در آن $t^2_{a/2;n} = F_{a;1,n}$ است.(راهنمایی: از تعاریف متغییر تصادفی t و F استفاده کنید.)

پاسخ:

بخش اول:

با توجه به راهنمایی مطرح شده در سئوال و تعاریف توزیعهای t و F خواهمی داشت:

$$t_n = \frac{Z_{N(0,1)}}{\sqrt{\frac{c_n^2}{n}}} \Rightarrow t_n^2 = \frac{Z^2_{N(0,1)}}{\frac{c_n^2}{n}} = \frac{c_1^2}{\frac{c_n^2}{n}} = \frac{\frac{c_1^2}{1}}{\frac{c_n^2}{n}} = F_{1,n}$$

بخش دوم:

حال از آنجا که مقادیر درجات آزادی منطبق با خواشته می باشد با بایستی میزان a را نیز اثبات نمود بنابراین خواهیم داشت:

$$P(t^2 \geq t^2_{a/2;n}) = P(t \geq t_{a/2;n}) + P(t \leq -t_{a/2;n}) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$$

بخش سوم:

$$P(F \geq F_{a;1,n}) = a$$

حال با توجه به نتیجه حاصله در هر سه بخش خواهیم داشت:

$$t^2_{a/2;n} = F_{a;1,n}$$

در بخش اول توجه داشته باشید از دو خاصیت $Z^2 \sim c_1^2$ و $F_{a,b} = \frac{c_a^2}{c_b^2}$ استفاده شده است.

31- درستی رابطه $\mathrm{E}(F) = n_2/(n_2-2)$ را به ازای $n_2 > 2$ و درستی رابطه $s_F^2 = \frac{n_2^2(2n_2+2n_1-4)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$ را به ازای $n_2 > 4$ نشان دهید.

پاسخ:

32- مقدار $F_{0.05;7,9}$ را پیدا کنید، بطوری که $P\{F \geq F_{0.05;7,9}\} = 0.05$ باشد.(متغییر F دارای توزیع F با درجات آزادی 7 و 9 می باشد)

پاسخ:

با مراجعه به جدول توزیع F ، جدول $F_{0.05;n1,n2}$ خواهیم داشت:

$$P(F \geq F_{0.05;7,9}) = 0.05 \Rightarrow F_{0.05;7,9} = 4.20$$

33- اگر F متغییر تصادفی با توزیع F و درجات آزادی 3 و 6 باشد، $P\{F \geq 4.76\}$، $P\{F \geq 6.6\}$ و $P\{F \leq 5\}$ را پیدا کنید.

پاسخ:

با مراجعه به جداول توزیع F در هر جدول که مقدار توزیع F با درجات آزادی 3 و 6 برابر مقدار مورد نظر باشد، a آن جدول را به احتمال مورد نظر نسبت می دهیم، بنابراین خواهیم داشت:

$$P(F_{3,6} \geq 4.76) = 0.025$$
$$P(F_{3,6} \geq 6.6) = 0.05$$
$$P(F_{3,6} \leq 5) = 1 - P(F_{3,6} \geq 5) \approx 1 - 0.022 = 0.978$$

34- مقدار $F_{0.95;9,7}$، $F_{0.05;7,9}$ و $F_{0.90;4,12}$ را پیدا کنید.

پاسخ:

با مراجعه به جداول توزیع F خواهم داشت:

$$F_{0.95;9,7} = \frac{1}{F_{0.05;7,9}} = \frac{1}{4.20} = 0.238$$
$$F_{0.05;7,9} = 4.20$$
$$F_{0.9;4,12} = \frac{1}{F_{0.1;12,4}} = \frac{1}{3.9} = 0.256$$

توجه داشته باشید در حل این سئوال توجه به نکته مقابل الزامی است: $F_{1-a;n1,n2} = \dfrac{1}{F_{a;n2,n1}}$

35- دو کودک (بطور مستقل) به هدفی تیر اندازی می کنند. نقطه اصابت تیر کودک اول را با نمادهای (X_1, Y_1) و نقطه اصابت تیر کودک دوم را با نمادهای (X_2, Y_2) نشان دهیم، فرض کنید X_1 و Y_1 توزیعهای نرمال مستقل با میانگین صفر و واریانس s_1^2 دارند. همچنین فرض کنید X_2 و Y_2 توزیعهای نرمال مستقل با میانگین صفر و واریانس s_2^2 تعریف می شوند. D_1 را فاصله نقطه اصابت تیر کودک اول از مرکز هدف فرض کنید و D_2 را هم مقدار متناظر برای کودک دوم تعریف کنید. الف)نسبت s_1/s_2 باید چه باشد تا با احتمال 0/90 رابطه $D_1 < D_2$ برقرار باشد؟ ب)اگر $s_1 = s_2$ با شد احتمال $D_1 < D_2$ چقدر می شود؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

الف)

$$D_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}$$
$$D_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}$$
$$P(D_1 < D_2) = P\left(\sqrt{X_1^2 + Y_1^2} < \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}\right) = 0.9 \Rightarrow P\left(X_1^2 + Y_1^2 < X_2^2 + Y_2^2\right) = 0.9$$
$$\Rightarrow P\left(\frac{X_1^2 + Y_1^2}{X_2^2 + Y_2^2} < 1\right) = 0.9$$

حال از آنجا که مقادیر $X_1^2 + Y_1^2$ و $X_2^2 + Y_2^2$ مجهول می باشند با استفاده از تعریف توزیع نرمال استاندارد و مفروضات مسئله، این عبارات را به توزیع مورد استفاده تبدیل می کنیم:

$$\left(\frac{X_1-0}{s_1}\right)^2=\left(\frac{X_1}{s_1}\right)^2 \sim c^2_{(1)}$$
$$\left(\frac{Y_1-0}{s_1}\right)^2=\left(\frac{Y_1}{s_1}\right)^2 \sim c^2_{(1)}$$
$$\left(\frac{X_2-0}{s_2}\right)^2=\left(\frac{X_2}{s_2}\right)^2 \sim c^2_{(1)}$$
$$\left(\frac{Y_2-0}{s_2}\right)^2=\left(\frac{Y_2}{s_2}\right)^2 \sim c^2_{(1)}$$
$$P\left(\frac{\frac{X_1^2+Y_1^2}{s_1^2}}{\frac{X_2^2+Y_2^2}{s_2^2}}<\frac{s_2^2}{s_1^2}\right)=P\left(\frac{\frac{c^2_{(2)}}{2}}{\frac{c^2_{(2)}}{2}}<\frac{s_2^2}{s_1^2}\right)=P\left(F<\frac{s_2^2}{s_1^2}\right)=0.9 \Rightarrow P\left(F>\frac{s_2^2}{s_1^2}\right)=0.1$$

حال با توجه به اینکه عبارت $\frac{\frac{c^2_{(2)}}{2}}{\frac{c^2_{(2)}}{2}}$ با توجه به تعاریف توزیع F دارای توزیع F با 2 و 2 درجه آزادی می باشد و همچنین مقدار a نیز با توجه به عبارت $P\left(F>\frac{s_2^2}{s_1^2}\right)=0.1$ مقدار 0/1 می باشد با مراجعه به جدول توزیع F خواهیم داشت: $\frac{s_2^2}{s_1^2}=3 \Rightarrow \frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{1}{3}$

ب) با توجه به حل قسمت الف همین سئوال خواهیم داشت:

$$D_1=\sqrt{X_1^2+Y_1^2}$$
$$D_2=\sqrt{X_2^2+Y_2^2}$$
$$P(D_1<D_2)=P\left(\sqrt{X_1^2+Y_1^2}<\sqrt{X_2^2+Y_2^2}\right)=P\left(X_1^2+Y_1^2<X_2^2+Y_2^2\right)=P\left(\frac{X_1^2+Y_1^2}{X_2^2+Y_2^2}<1\right)$$
$$\Rightarrow P\left(\frac{\frac{X_1^2+Y_1^2}{s_1^2}}{\frac{X_2^2+Y_2^2}{s_2^2}}<\frac{s_2^2}{s_1^2}\right)=P\left(\frac{\frac{c^2_{(2)}}{2}}{\frac{c^2_{(2)}}{2}}<1\right)=P(F_{2,2}<1)=\int_0^1\frac{1}{(1+X^2)}=0.5$$

در پاسخ به این سئوال توجه داشته باشید: $F_{2,2}\approx\frac{1}{(1+X)^2}$

36- تغییر پذیری دو نحوه عمل مورد مقایسه قرار می گیرد. از هر نحوه عمل، یک نمونه تصادفی 10 تایی می گیریم و واریانس نمونه آنها را مقایسه می کنیم. $P\left\{\frac{S_1^2/s_1^2}{S_2^2/s_2^2}\geq 3\right\}=P\left\{\frac{s_2^2}{s_1^2}\geq 3\frac{S_2^2}{S_1^2}\right\}$ را پیدا کنید.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$P\left\{\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\geq 3\right\}=P\left\{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\geq 3\frac{S_2^2}{S_1^2}\right\}=P\left\{\frac{\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{(n-1)S_2^2}{\sigma_2^2}}\geq 3\right\}=P\left\{\frac{\frac{9S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{9S_2^2}{\sigma_2^2}}\geq 3\right\}P\left(\frac{\chi^2_{(9)}}{\chi^2_{(9)}}\geq 3\right)$$

$$\Rightarrow P(F_{9,9}\geq 3)\approx 0.025$$

37- اگر $X_1,\dots,X_{11}$ متغییر های تصادفی مستقل با توزیع نرمال هر یک با میانگین m_X و واریانس σ^2 و $Y_1,\dots,Y_{21}$ متغییر های تصادفی مستقل با توزیع نرمال هر یک با میانگین m_Y و واریانس σ^2 باشند: $P\left\{\sum_{i=1}^{11}(X_i-\overline{X})^2\geq 1.685\sum_{i=1}^{21}(Y_i-\overline{Y})^2\right\}$ را پیدا کنید.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله و همچنین واریانس نمونه(S) خواهیم داشت:

$$S_X^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{11}(X_i-\overline{X})^2\Rightarrow\sum_{i=1}^{11}(X_i-\overline{X})^2=10S_X^2$$

$$S_Y^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{21}(Y_i-\overline{Y})^2\Rightarrow\sum_{i=1}^{21}(Y_i-\overline{Y})^2=20S_Y^2$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{11}(X_i-\overline{X})^2\geq 1.685\sum_{i=1}^{21}(Y_i-\overline{Y})^2\right)=P(10S_X^2\geq 1.685(20S_Y^2))=P\left(\frac{10S_X^2}{\sigma^2}\geq 1.685\frac{20S_Y^2}{\sigma^2}\right)$$

$$=P\left(\frac{\frac{10S_X^2}{\sigma^2}}{\frac{20S_Y^2}{\sigma^2}}\geq 1.685\right)=P\left(\frac{\chi^2_{(10)}}{\chi^2_{(20)}}\geq 1.685\right)=P\left(\frac{\frac{\chi^2_{(10)}}{10}}{\frac{\chi^2_{(20)}}{20}}\geq 1.685*\left(\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{20}}\right)\right)=P(F_{10,20}\geq 2*1.685)=0.01$$

38- اگر $Z=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\Big/\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$ باشد که در آن X_i توزیع نرمال با میانگین m_X و واریانس σ_X^2 و Y_i مستقل از X_i دارای توزیع نرمال با میانگین m_Y و واریانس σ_Y^2 است، $\mathrm{E}(Z)$ را پیدا کنید.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله و همچنین پاسخ سئوال 37 خواهیم داشت:

$$\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{(n-1)S_X^2}{(n-1)S_Y^2}\right)=\mathrm{E}\left[\left(\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}\right)\frac{\frac{\left(\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_X^2}\right)}{(n-1)}}{\frac{\left(\frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2}\right)}{(n-1)}}\right]=\left(\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}\right)\mathrm{E}(F_{(n-1),(n-1)})$$

$$=\left(\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}\right)\left(\frac{n-1}{(n-1)-2}\right)=\left(\frac{n-1}{n-2}\right)\left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\right)^2$$

توجه داشته باشید $E(F_{n1,n2}) = \dfrac{n_2}{n_2 - 1}$، برای اثبات این نکته نیز به پاسخ سئوال 31 مراجعه کنید.

39- اگر $X_1,...,X_n$ متغییر های تصادفی مستقل با توزیع نرمال هر یک با میانگین m_X و واریانس s_X^2 و $Y_1,...,Y_m$ متغییر های تصادفی مستقل با توزیع نرمال هر یک با میانگین m_Y و واریانس s_Y^2 باشند (که X ها و Y ها از هم مستقل هستند) مشخص کنید آیا متغییرهای تصادفی زیر توزیع نرمال(N)، توزیعt(t)، توزیع مربع کای(c^2)، توزیع F(F) یا توزیع متفاوت از این چهار توزیع(O) دارند:

الف $\dfrac{(\overline{X} - m_X)\sqrt{n}}{S_X}$ و $\dfrac{\overline{X}}{\overline{Y}}$

ب $\dfrac{(X_1 - m_X)}{S_X}$ ز $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{s_X^2}$

ج $\dfrac{X_1 - m_X}{s_X}$ ح $\dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(s_X^2/n) + (s_Y^2/m)}}$

د $\dfrac{(n-1)S_X^2}{s_X^2} + \dfrac{\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2}{s_Y^2}$ ط $\dfrac{\overline{X}\sqrt{n}}{S_X}$

ه $\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$ ی $X_1 - Y_1$

پاسخ:

الف)

$$\frac{(\overline{X} - m_X)\sqrt{n}}{S_X} = \frac{\dfrac{\overline{X} - m_X}{\frac{s_X}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\dfrac{\frac{(n-1)S_X^2}{s_X}}{(n-1)}}} \sim t_{(n-1)}$$

ب)

$$\frac{(X_1 - m_X)}{S_X} = \frac{\dfrac{X_1 - m_X}{s_X}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{(n-1)S_X^2}{s_X}}{(n-1)}}} \sim t_{(n-1)}$$

ج)

$$\frac{(X_1 - m_X)}{s_X} \sim N(0,1)$$

د)

$$\frac{(n-1)S_X^2}{s_X^2} \sim c_{(n-1)}^2$$

$$S^2 = \frac{1}{(m-1)}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2}{s_Y^2} = \frac{(m-1)S_Y^2}{s_Y^2} \sim c_{(m-1)}^2$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)S_X^2}{s_X^2} + \frac{\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2}{s_Y^2} = c_{(n-1)}^2 + c_{(m-1)}^2 \sim c_{(n+m-2)}^2$$

ه) توزیع خاصی ندارد.

و)

$$\frac{\overline{X}}{\overline{Y}} = \frac{Z}{Z} = C(0,1)$$

ز) اگر $m_X = 0$، با توجه به پاسخ بند (الف) داریم:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{s_X^2} \sim c_{(n)}^2$$

ح) از آنجا که در این عبارت صورت کسر یک توزیع نرمال و مخرج آن عددی ثابت است لذا خروجی توزیع نرمال می باشد.

ط) اگر $m_X = 0$، با توجه به پاسخ بند (الف) داریم:

$$\frac{\overline{X}\sqrt{n}}{S_X} \sim t_{(n-1)}$$

ی) از آنجا که در این عبارت تفریق دو توزیع نرمال مورد توجه است و این عمل اصلی تاثیری بر روی توزیع کلی نگذاشته و لذا خروجی توزیع نرمال می باشد.

40- فرض کنید X_i، i=1,...,7 و Y_j، j=1,...,9 نمونه های تصادفی مستقل هر دو با توزیع نرمال و میانگین صفر و با واریانسهای به ترتیب، $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$ هستند.

الف) $P\left(4\sum_{i=1}^{7} X_i^2 > 6\sum_{j=1}^{9} Y_i^2\right)$ را پیدا کنید.

ب)مقدار ثابت a را چنان پیدا کنید که رابطه $P(a\overline{X} > S_Y) = 0.05$ برقرار باشد. در این رابطه، $\overline{X}$ میانگین نمونه X_i، i =1,...,7 و S_Y انحراف معیار نمونه Y_j، j=1,...,9 است.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$X \sim N\left(0,\frac{1}{4}\right)$$

$$Y \sim N\left(0,\frac{1}{3}\right)$$

الف)

$$P\left(4\sum_{i=1}^{7} X_i^2 > 6\sum_{j=1}^{9} Y_i^2\right) = P\left(4\frac{(6S_X^2)}{1/4} * \frac{1}{4} > 6\frac{(8S_Y^2)}{1/3} * \frac{1}{3}\right) = P\left(c_{X(6)}^2 > 2c_{Y(8)}^2\right) = P\left(\frac{c_{X(6)}^2}{c_{Y(8)}^2} > 2\right)$$

$$= P\left(\frac{\frac{c_{X(6)}^2}{6}}{\frac{c_{Y(8)}^2}{8}} > 2 * \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{8}}\right) = P\left(F_{6,8} > \frac{8}{3}\right) = 0.1$$

ب)

$$\overline{X} \sim N\left(m,\frac{s^2}{n}\right) \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(0,\frac{1}{28}\right)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{s^2} = c_{(n-1)}^2 \Rightarrow \frac{8S_Y^2}{\frac{1}{3}} \sim c_{Y(8)}^2$$

$$\frac{\frac{\overline{X}-0}{\sqrt{\left(\frac{1}{28}\right)}}}{\sqrt{\frac{\frac{8S_Y^2}{\frac{1}{3}}}{8}}} = \frac{\frac{\overline{X}-0}{\sqrt{\left(\frac{1}{28}\right)}}}{\sqrt{\frac{24S_Y^2}{8}}} = \frac{\overline{X}\left(2\sqrt{7}\right)}{S_Y\left(\sqrt{3}\right)} \sim t_{(8)}$$

$$P\left(a\overline{X} > S_Y\right) = 0.05 \Rightarrow P\left(\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} * \frac{\overline{X}}{S_Y} > \frac{1}{a} * \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right) = 0.05 \Rightarrow P\left(t_{(8)} > \frac{1}{a} * \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right) = 0.05$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} * \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = t_{0.05,8}$$

حال با مراجعه به جدول توزیع t خواهیم داشت:

$$t_{0.05,8} = 1.860$$

$$\frac{1}{a} * \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = 1.860 \Rightarrow a = 1.642$$

توجه داشته باشید در حل قسمت الف از روش تبدیل توزیع نرمال به توزیع کای مربع و پس از آن تبدیل توزیع کای مربع به توزیع F استفاده شده است که در پاسخ سئوال 30 به تفضیل بیان شده است.

41- تصور کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نرمال و به ترتیب با میانگینهای m_1 و m_2 و واریانسهای s_1 و s_2 هستند و $Y = a_1X_1^2 + a_2X_2^2 + a_3X_1 + a_4X_2 + a_5$ است. الف)مقادیر a_i را چنان تعیین کنید که Y توزیع مربع کای با 2 درجه آزادی داشته باشد، ب)اگر $s_1^2 = s_2^2$ باشد، $P\left(X_1 - m_1 > \sqrt{(X_2 - m_2)^2}\right)$ را پیدا کنید.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$X_1 \sim N\left(m_1, s_1^2\right)$$
$$X_2 \sim N\left(m_2, s_2^2\right)$$
$$\left(\frac{X - m}{s}\right)^2 \sim c_{(1)}^2$$
$$\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{X_i - m_i}{s_i}\right)^2 = \left(\frac{X_1 - m_1}{s_1}\right)^2 + \left(\frac{X_2 - m_2}{s_2}\right)^2 \sim c_{(2)}^2$$

با بست عبارت بالا خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{s_1}\right)^2 X_1^2 + \left(\frac{-2m_1}{s_1}\right)X_1 + \left(\frac{m_1}{s_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{s_2}\right)^2 X_2^2 + \left(\frac{-2m_2}{s_2}\right)X_1 + \left(\frac{m_2}{s_2}\right)^2 \sim c_{(2)}^2$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{s_1}\right)^2 X_1^2 + \left(\frac{1}{s_2}\right)^2 X_2^2 + \left(\frac{-2m_1}{s_1}\right)X_1 + \left(\frac{-2m_2}{s_2}\right)X_2 + \left[\left(\frac{m_1}{s_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{s_2}\right)^2\right] \sim c_{(2)}^2$$

حال با توجه به عبارت $Y = a_1X_1^2 + a_2X_2^2 + a_3X_1 + a_4X_2 + a_5$ و مقاسیه آن با عبارت بالا خواهیم داشت:

$$\left(\frac{1}{s_1}\right)^2 X_1^2 + \left(\frac{1}{s_2}\right)^2 X_2^2 + \left(\frac{-2m_1}{s_1}\right)X_1 + \left(\frac{-2m_2}{s_2}\right)X_2 + \left[\left(\frac{m_1}{s_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{s_2}\right)^2\right]$$

$$a_1 = \left(\frac{1}{s_1}\right)^2$$
$$a_2 = \left(\frac{1}{s_2}\right)^2$$
$$a_3 = \left(\frac{-2m_1}{s_1}\right)$$
$$a_4 = \left(\frac{-2m_2}{s_2}\right)$$
$$a_5 = \left(\frac{m_1}{s_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{s_2}\right)^2$$

ب) اگر $s^2 = s_2^2 = s_1^2$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\frac{(X_1-m_1)}{s}\sim N(0,1)$$

$$\left(\frac{X_2-m_2}{s}\right)^2\sim c^2_{(1)}$$

$$P\left(X_1-m_1>\sqrt{(X_2-m_2)^2}\right)=P\left(\frac{X_1-m_1}{\sqrt{(X_2-m_2)^2}}>1\right)=P\left(\frac{\left(\frac{X_1-m_1}{s}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{X_2-m_2}{s}\right)^2}}>1\right)=P\left(t_{(1)}>1\right)$$

$$=\int_1^\infty \frac{1}{p}\left(\frac{1}{1+X^2}\right)dx=\frac{1}{p}*\tan^{-1}(X)\Big|_{X=1}^{\infty}=\frac{1}{p}\left(\frac{p}{2}-\frac{p}{4}\right)=0.25$$

توجه داشته باشید توزیع t با یک درجه آزادی را می توان با $\frac{1}{p}\left(\frac{1}{1+X^2}\right)$ تقریب زد.

42-اگر احتمال ناقص بودن یک قلم کالا 0/2 باشد، احتمال کسب دقیقا صفر، 1، 2 و 3 قلم کالای ناقص در یک نمونه 3 تایی چقدر است؟ احتمال کسب کمتر از 2 قلم کالای ناقص چقدر است؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله چنانچه متغییر X را تعداد کالای ناقص در یک نمونه 3 تایی بدانیم و با توجه به شرح سئوال " احتمال وجود دقیقا صفر، 1، 2 و 3 قلم کالای ناقص در یک نمونه 3 تایی " از توزیع دو جمله ای (بینم) با n=3 و P=0/2 پیروی می کند (آزمایش برنولی را n بار متوالی و مستقل از هم تکرار کنیم و متغییر X تعداد پیروزیها را بشمارد)، بنابراین خواهیم داشت:

$$X\sim b(n,P)\Rightarrow X\sim b(3,0.2)$$

$$f_X(X)=\binom{n}{X}(P)^X(1-P)^{n-X}=\binom{3}{X}(0.2)^X(0.8)^{3-X}$$

$$f_X(0)=\binom{3}{0}(0.2)^0(0.8)^{3-0}=0.512$$

$$f_X(1)=\binom{3}{1}(0.2)^1(0.8)^{3-1}=0.384$$

$$f_X(2)=\binom{3}{2}(0.2)^2(0.8)^{3-2}=0.096$$

$$f_X(3)=\binom{3}{3}(0.2)^3(0.8)^{3-3}=0.008$$

$$P(X<2)=\sum_{X=0}^{1}\binom{3}{X}(0.2)^X(0.8)^{3-X}=f_X(0)+f_X(1)=0.512+0.384=0.896$$

43- اگر احتمال ناقص بودن یک قلم کالا 0/1 باشد، از تقریب پواسون استفاده کنید و احتمال وجود دست کم سه قلم کالای ناقص در یک نمونه 50 تایی و احتمال وجود دقیقا صفر قلم کالای ناقص (در نمونه 50 تایی) را پیدا کنید.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله چنانچه متغییر X را تعداد کالای ناقص در یک نمونه 50 تایی بدانیم و با توجه به شرح سئوال " احتمال وجود دست کم سه قلم کالای ناقص در یک نمونه 50 تایی " از توزیع دو جمله ای (بینم) با n=50 و P=0/1 پیروی می کند (آزمایش برنولی را n بار متوالی و مستقل از هم تکرار کنیم و متغییر X تعداد پیروزیها را بشمارد)، بنابراین خواهیم داشت:

$$X \sim b(50,0.1)$$

حال از آنجا که در مفروضات مسئله استفاده از توزیع پواسون قید شده است توزیع دوجمله ای را با توزیع پواسون تقریب می زنیم و داریم:

$$X \sim P(l) \Rightarrow P_X(X) = \frac{e^{-l} l^X}{X!}$$

$$l = nP = 50 * 0.1 = 5$$

$$X \sim P(5) \Rightarrow P_X(X) = \frac{e^{-5} 5^X}{X!}$$

$$P(X \geq 3) = \sum_{X=3}^{\infty} \frac{e^{-5} 5^X}{X!} = 1 - \sum_{X=0}^{2} \frac{e^{-5} 5^X}{X!} = 1 - \left[\left(\frac{e^{-5} 5^0}{0!}\right) + \left(\frac{e^{-5} 5^1}{1!}\right) + \left(\frac{e^{-5} 5^2}{2!}\right)\right] = 0.875$$

$$P(X = 0) = P_X(0) = \frac{e^{-5} 5^0}{0!} = e^{-5} = 0.0067$$

44- **مسئله 43 را با استفاده از تقریب نرمال حل کنید.**

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله 43 برای آنکه بتوان این سئوال را با تقریب نرمال حل نمود می بایست مقدار میانگین و واریانس توزیع نرمال را بدست آورد، در نتیجه خواهیم داشت:

$$X \sim b(n,P) \Rightarrow \mathrm{E}(X) = nP, Var(X) = nP(1-P)$$

$$X \sim N(m, s^2)$$

$$m = nP = 50 * 0.1 = 5$$

$$s^2 = nP(1-P) = 50 * 0.1 * 0.9 = 4.5$$

$$\Rightarrow X \sim N(5, 4.5)$$

$$P(X \geq 3) \approx P(X \geq 2.5) = P\left(\frac{X-5}{\sqrt{4.5}} \geq \frac{2.5-5}{\sqrt{4.5}}\right) = P(Z \geq -1.18) = 1 - P(Z \geq 1.18) = 0.881$$

$$P(X \geq 0) \approx P(-0.5 \leq X \leq 0.5) = P\left(\frac{-0.5-5}{\sqrt{4.5}} \leq \frac{X-5}{\sqrt{4.5}} \leq \frac{0.5-5}{\sqrt{4.5}}\right) = P(-2.59 \leq Z \leq -2.12)$$

$$= P(Z \leq -2.12) - P(Z \leq -2.59) = P(Z \geq 2.12) - P(Z \geq 2.59) = 0.0170 - 0.00480 = 0.0122$$

45- **در واحدهای تولیدی برآورد مدت اشتغال مولد یک کارمند اغلب عملی مفید است. در مبحث نمونه گیری از کار درصد مدت اشتغال یک کارمند، P، اغلب از طریق گرفتن یک نمونه تصادفی و تعیین نسبت دفعات اشتغال به مجموعه دفعات آزمایش، یعنی، $\hat{P} = D/n$ برآورد می شود. بدین ترتیب برآورد کننده $\hat{P}$، به متغییر تصادفی دو جمله ای مرتبط است. اگر از تقریب نرمال استفاده شود، رابطه برای تعداد مشاهدات لازم پیدا کنید، بطوریکه مقدار برآورد شده $\hat{P}$ با احتمال 0/95 تفاوتی بیش از ± 0.03 با مقدار حقیقی P**

نداشته باشد. به زبان احتمال n را چنان تعیین کنید که $P\left(-0.03 \le \hat{P} - P \le 0.03\right) > 0.95$ برقرار باشد.اگر مسئله درست حل شده باشد، جواب تابعی از P است دو حالت را در نظر بگیرید، اگر بدانیم P تقریبا 0/70 است مقدار n را بیابید. اگر P کاملا مجهول باشد، آن مقدار n را پیدا کنید که به ازای تمام مقادیر P از صفر تا یک، بزرگترین عدد است.

پاسخ:

$$P \sim N\left(P, \frac{P(1-P)}{n}\right)$$

$$P\left(-0.03 \le \hat{P} - P \le 0.03\right) > 0.95 \Rightarrow P\left(\frac{-0.03}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} \le \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} \le \frac{0.03}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}\right) > 0.95$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-0.03\sqrt{n}}{\sqrt{P(1-P)}} \le Z \le \frac{0.03\sqrt{n}}{\sqrt{P(1-P)}}\right) > 0.95 \Rightarrow 1 - 2P\left(Z \ge \frac{0.03\sqrt{n}}{\sqrt{P(1-P)}}\right) > 0.95$$

$$\Rightarrow P\left(Z \ge \frac{0.03\sqrt{n}}{\sqrt{P(1-P)}}\right) > 0.025$$

حال با مراجعه به جدول توزیع نرمال خواهیم داشت:

$$Z_{0.025} = 1.96$$

$$\frac{0.03\sqrt{n}}{\sqrt{P(1-P)}} \ge Z_{0.025} = 1.96 \Rightarrow n \ge 4268.4 * P(1-P)$$

$$\Rightarrow n_{\min} = 4268.4 * P(1-P)$$

حال چنانچه P=0/70 باشد داریم:

$$n_{\min} = 4268.4 * P(1-P) = 4268.4 * (0.7)(0.3) = 897$$

برای بدست آوردن بالاترین مقدار n داریم: (با توجه به خاصیت مشتق گیری)

$$n_{\min} = 4268.4 * P(1-P)$$

$$\frac{dn}{dP} = 0 \Rightarrow 4268.4 * [(1-P) - P] = 0 \Rightarrow 1 - 2P = 0 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$$

$$n = 4268.4 * \left(\frac{1}{P}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1067.1 \approx 1068$$

46-در نظر خواهی اخیر در مورد انتخابات ریاست جمهور، این تمایل وجود داشت که پیش از انتخابات برنده را پیش بینی کنند. مسئله را با قبول فرض وجود تنها دو نامزد و تعیین برنده بر اساس اکثریت آرای مردم ساده کنید. یک نمونه تصادفی n تایی پیش از انتخابات از رای دهندگان گرفته می شود و تعیین اندازه نمونه لازم مد نظر است. درصد کسانی در نمونه که با نامزد شماره 1، V_1/n، رای می دهند بعنوان برآورد P، یعنی درصد کسانی که به نامزد شماره 1 رای می دهند، بکار می رود.اگر توزیع دوجمله ای کاربرد پذیر باشد، با استفاده از تقریب نرمال، n را چنان بیابید که رابطه برقرار باشد. دو حالت را در نظر بگیرید:1) معلوم است که P تقریبا 0/50 است. 2) P کاملا مجهول است و باید بزرگترین مقدار n را به ازای تمام مقادیر P در فاصله صفر تا یک، تعیین کرد.

پاسخ:

$$\frac{V_1}{n} \sim N\left(P, \frac{P(1-P)}{n}\right)$$

$$P\left(-0.01 \le \frac{V_1}{n} - P \le 0.01\right) \ge 0.90 \Rightarrow P\left(\frac{-0.01}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} \le \frac{\frac{V_1}{n} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} \le \frac{0.01}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}\right) \ge 0.90$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-0.01\sqrt{n}}{\sqrt{P(1-P)}} \le Z \le \frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{P(1-P)}}\right) \ge 0.90 \Rightarrow 1-2P\left(Z \ge \frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{P(1-P)}}\right) > 0.90$$

$$\Rightarrow P\left(Z \ge \frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{P(1-P)}}\right) > 0.05$$

حال با مراجعه به جدول توزیع نرمال خواهیم داشت:

$$Z_{0.05} = 1.645$$

$$\frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{P(1-P)}} \ge Z_{0.05} = 1.645 \Rightarrow n \ge 27060.25 * P(1-P)$$

1) حال چنانچه P=0/50 باشد داریم:

$$n \ge 27060.25 * P(1-P) = 27060.25 * (0.5)(0.5) = 6766$$

2) برای بدست آوردن بالاترین مقدار n داریم: (با توجه به خاصیت مشتق گیری)

$$\frac{dn}{dP} = 0 \Rightarrow 27060.25 * [(1-P) - P] = 0 \Rightarrow 1-2P = 0 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$$

$$n \ge 6766$$