مسائل فصل پنجم

۵-۱) درمورد مثال سختی راکول، که در بخش ۲.۵ شـرح داده شـد، بـه ازای برابـری هزینه هر قطعه میله با

$$\text{هزینه هر قطعه سیاه} = \begin{cases} ۷۰ \\ ۷۰ + ۱۵۰(۷۲ - x)^{۲} \\ ۷۰ + ۱۵۰(x - ۷۲)^{۲} \end{cases}$$

جدول (امید ریاضی) تابع زیان را تعیین کنید.

پاسخ:

تابع هزینه اصلاح میله ها بصورت زیر است:

$$\text{هزینه اصلاح میله ها} = \begin{cases} ۱۵۰(x - ۷۲)^{۲} & O.W. \\ ۰ & ٦۸ \le x \le ۷٦ \end{cases}$$

هنگامی که میله ها را از کارخانه A بخریم میله ۱۰۰واحد پول، با خریـد ۲۵۰ میلـه از کارخانه دوم باید ۷۵ واحد پول بازای هر واحد و بازای خرید ۵۰۰ میله از کارخانه B باید ۷۰ واحد پولی به ازای هر واحد بپردازیم.

$$\begin{cases} x_A \sim N(۷۲, ٤) \\ f_{x_A} = \dfrac{۱}{۲\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{(x-۷۲)^{۲}}{۸}} \end{cases}$$

$$\text{امید ریاضی هزینه اصلاح میله } A = ۱۵۰\left[\int_{-\infty}^{٦۸} (z-۷۲)^{۲} f_x(z)dz + \int_{۷٦}^{+\infty} (z-۷۲)^{۲} f_x(z)dz\right]$$

$$z' = \frac{z-۷۲}{۲} \Rightarrow = ۱۵۰\left[\int_{-\infty}^{-۲} ٤z'^{۲} f_x(z')dz' + \int_{۲}^{+\infty} ٤z'^{۲} f_x(z')dz'\right]$$

$$= ۱۵۰ \times \frac{٤}{\sqrt{۲\pi}}\left[\int_{-\infty}^{-۲} z'^{۲} e^{-\frac{z'^{۲}}{۲}} dz' + \int_{۲}^{+\infty} z'^{۲} e^{-\frac{z'^{۲}}{۲}} dz'\right]$$

$$=\frac{۶۰۰}{\sqrt{۲\pi}}\times ۲\int_{۲}^{+\infty} z'^{۲} e^{-\frac{z'^{۲}}{۲}} dz'$$

$$=\frac{۱۲۰۰}{\sqrt{۲\pi}}\left[\left[-z'e^{-\frac{z'^{۲}}{۲}}\right]_{۲}^{+\infty}-\int_{۲}^{+\infty}\sqrt{۲\pi}\,\frac{e^{-\frac{z^{۲}}{۲}}dz}{\sqrt{۲\pi}}\right]$$

$$=\frac{۱۲۰۰}{\sqrt{۲\pi}}\left[۲e^{-۲}+\sqrt{۲\pi}\varphi(۲)\right]\approx ۱۵۶/۹۴$$

$$\begin{cases} x_B \sim N(۷۵,۴) \\ f_{x_B}=\dfrac{۱}{۲\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{(x-۷۵)^{۲}}{۸}} \end{cases}$$

امید ریاضی هزینه اصلاح میله B $=۱۵۰\left[\int_{-\infty}^{+۶۸}(z-۷۲)^{۲}f_x(z)dz+\int_{۷۶}^{+\infty}(z-۷۲)^{۲}f_x(z)dz\right]$

$$=۱۵۰\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(z-۷۲)^{۲}f_x(z)dz-\int_{۶۸}^{۷۶}(z-۷۲)^{۲}f_x(z)dz\right]$$

$$\begin{cases} z'=\dfrac{z-۷۵}{۲} \\ E(x-a)^{۲}-(\mu-\alpha)^{۲}=\sigma^{۲} \end{cases} \qquad =۱۵۰\left[\sigma_x^{۲}+(۷۵-۷۲)^{۲}-\int_{-۳/۵}^{۰/۵}۴(z'+۱/۵)^{۲}f_x(z')dz\right]$$

نکته: هدف از تبدیل z به z' این بود که تابع توزیع نرمال به توزیع نرمال استاندارد تبدیل شده و در نتیجه برای محاسبه انتگرال بجای محاسبه مستقیم از جدول نرمال استاندارد استفاده می کنیم.

$$\int_{-۲/۵}^{۰/۵}(z'+۱/۵)^{۲}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{z'^{۲}}{۲}}dz'=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}[\int_{-۳/۵}^{۰/۵}z'^{۲}e^{-\frac{z'^{۲}}{۲}}dz'+$$

$$\int_{-۲/۵}^{۰/۵}۳z'e^{-\frac{z'^{۲}}{۲}}dz'+\int_{۲/۵}^{۰/۵}۲/۲۵e^{-\frac{z'^{۲}}{۲}}dz]=$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\left[[-z'e^{-\frac{z'^{۲}}{۲}}]_{-۲/۵}^{۰/۵}-۳[e^{-\frac{z'^{۲}}{۲}}]_{-۳/۵}^{۰/۵}+۳/۲۵\sqrt{۲\pi}\left(۱-\varphi(۳/۵)-\varphi(۰/۵)\right)\right]=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\times ۲/۵۵۵=۱/۰۱۹۵$$

امید ریاضی هزینه اصلاح میله B = ۱۵۰[۱۳−٤×۱/۰۱۹۵] = ۱۳۳۸/۲

درمرحله بعد جدول زیان را با توجه به هزینه خرید اولیه به علاوه ی میانگین هزینه اصلاح محاسبه می کنیم:

a_i \ θ_i	$\mu=$ ۷۲	$\mu=$ ۷۵
a_1	۱۱۳,٤۷۸	۷۰۵,۸۱۵
a_2	۱۲۸,٤۷۵	۱۲۸,٤۷۵
a_3	۱۲۲,۲۲۰	٤۱۸,۳۹۲

توجه کنید که اقدام a_4 و a_5 تحت الشعاع اقدامهای a_1, a_2 و a_3 هستند.

۵-۲) شیوه مینیماکس را برای مساله شماره یک پیدا کنید.

پاسخ:

a_i \ θ_i	$\mu=$ ۷۲	$\mu=$ ۷۵	$\max\{l(a_i,\theta_j)\}$
a_1	۱۱۳,٤۷۸	۷۰۵,۸۱۵	۷۰۵,۸۱۵
a_2	۱۲۸,٤۷۵	۱۲۸,٤۷۵	۱۲۸,٤۷۵
a_3	۱۲۲,۲۲۰	٤۱۸,۳۹۲	٤۱۸,۳۹۲/۵
$\min\{l(a_i,\theta_j)\}$			۱۲۸,٤۷۵

بر اساس شیوه ی minimax، اقدام a_2 برگزیده شد.

۵-۳) ماشینی در پایان تولید یک روز سرویس می شود. اگر سرویس به طریق مناسب انجام شود، ماشین در وضعیت خوب قرار می گیرد و کیفیت هر قلم محصول آن را می توان متغیری تصادفی از نوع برنویی با پارامتر ۰/۰۱ فرض کرد، یعنی احتمال ناقص بودن یک قلم آن معادل p=۰/۰۱ است ($P\{X=1\}=p$). اگر سرویس به طریق مناسب انجام نشود، ماشین در وضعیت بد قرار می گیرد و کیفیت هر قلم محصول آن را می توان متغیری تصادفی از نوع برنویی با پارامتر p=۰/۱۰ فرض کرد. با صرف ۱۰۰ واحد پول اضافی می توان وضعیت واقعی ماشین را تعیین و در صورت لزوم آن را در وضعیت خوب قرار داد. اگر معلوم شود که ماشین در وضعیت خوب قرار داشته است، در همان حالت باقی می ماند. ماشین هر روز ۱۰۰۰ قلم محصول تولید می کند و هزینه هر قلم محصول ناقص تولید شده معادل ۱۰ واحد پول است. فرض کنید اقدام a_1 معرف به بار آمدن هزینه سرویس اضافی (و بالطبع تضمین قرار گرفتن ماشین در وضعیت خوب) باشد و فرض کنید a_2 معرف به بار نیامدن هزینه سرویس اضافی باشد. تابع زیان به صورت

a \ P	۰/۰۱	۰/۱۰
a_1	۲۰۰	۱۱۰۰

$a_{۲}$	۱۰۰	۱۰۰۰

معرفی می شود. شیوه مینیماکس را پیدا کنید.

پاسخ:

در صورت برقراری حالت طبیعت $P_.$، تعداد اقلام ناقص در محصول تولید شده دارای توزیع دو جمله ای با پارامترهای $n=۱۰۰۰, P=P_.$ است، پس $\mu=۱۰۰۰P_.$ و میانگین هزینه اصلاح محصول $\mu_c=۱۰۰۰۰P_.$ است.

بنابراین داریم:

$$l_{RC}(۱,۱)=۱۰۰+۱۰۰۰۰\times ۰/۰۱=۲۰۰$$

$$l_{RC}(۲,۱)=۱۰۰۰۰\times ۰/۰۱=۱۰۰$$

$$\theta_{۱} \Rightarrow P=۰/۰۱$$

$$l_{RC}(۱,۲)=۱۰۰+۱۰۰۰۰\times ۰/۰۱=۲۰۰$$

$$l_{RC}(۲,۲)=۱۰۰۰۰\times ۰/۰۱=۱۰۰۰$$

$$\theta_{۲} \Rightarrow P=۰/۱۰$$

θ_j / a_i	$\theta_{۱}$	$\theta_{۲}$	$\max\{l_{RC\|i}(i,j)\forall j\}$
$a_{۱}$	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰
$a_{۲}$	۱۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰

$\min\{\max l_{RC\|i}(i,j)\forall i\}$			۲۰۰

بنابراین بر مبنای روش minimax اقدام a_1 انتخاب می شود.

٥-٤) دسته ای متشکل از ۱۰۰۰ قلم کالا به منظور بازرسی توسط یک تولید کننده به مصرف کننده تحویل داده می شود. قرار است مصرف کننده یکی از دو اقدام زیر را انتخاب کند:

a_1 پذیرش دسته محصول

a_2 پذیرش دسته محصول، ولی با آزمایش غربالی ۱۰۰۰۰ قلم کالا

کشف ناقص بودن هر قلم کالا پیش از مونتاژ متضمن صرف ۲۰ واحد (پول) هزینه کارهای تصحیحی است. به علاوه، اگر یک قلم کالای ناقص پس از مونتاژ کشف شود، هزینه ای اضافی برابر با ۷۰ واحد پول به بار می آورد. هزینه بازرسی هر قلم کالا در تمام دسته محصول برابر با ۲ واحد پول است. مصرف کننده یک رابطه کاری بلندمدت با تولید کننده داشته، و متوجه شده است که درصد ضایعات دسته های همانند، p معادل ۰/۰۱و۰/۰۵یا ۰/۱۰ بوده است. به علاوه، می توان فرض کرد که کیفیت واحدهای کالا در یک دسته محصول به وسیله متغیری تصادفی از نوع برنویی با پارامتر p قابل معرفی است؛ یعنی، احتمال ناقص بودن یک قلم با نماد p مشخص می شود $(P\{X=۱\}=p)$ الف) جدول زیان را پیدا کنید؛ ب) شیوه مینیماکس را پیدا کنید.

پاسخ:

در حالت طبیعت $P_.$، تعداد اقلام ناقص دارای توزیع دو جمله ای با پارامترهای $P=P_.$ و $n=۱۰۰۰۰$ می باشد پس امید ریاضی تعداد اقلام ناقص $۱۰۰۰۰P_.$ خواهد بود.

$$l_{RC}(a_۱,P=P_.)=(۷۰P_.)\times ۱۰۰۰۰=۷۰۰۰۰۰P_.$$

$$l_{RC}(a_۲,P=P_.)=۱۰۰۰۰\times(۲+۲۰P_.)=۲۰۰۰۰۰P_.+۲۰۰۰۰$$

a_i \ θ_j	$\theta_۱=P=۰/۰۱$	$\theta_۲=P=۰/۰۵$	$\theta_۳=P=۰/۱۰$	$\max\{l_{RC\|j}(i,j)\forall j\}$
$a_۱$	۷۰۰۰	۳۵۰۰۰	۷۰۰۰۰	۷۰۰۰۰
$a_۲$	۲۲۰۰۰	۳۰۰۰۰	۴۰۰۰۰	۴۰۰۰۰
$\min\{\max l_{RC\|i}(i,j)\forall i\}$				۴۰۰۰۰

بنابراین شیوه minmax اقدام $a_۲$ را انتخاب می کند.

۵-۵) در مساله شماره ۳، چنین فرض کنید که دلیل کافی مبنی بر اینکه در $\frac{۷}{۸}$ از موارد پس از رسیدگی، ماشین در وضعیت خوب و در $\frac{۱}{۸}$ از موارد دروضعیت بد قرار می گیرد، در دست است، شیوه بیز چیست؟

پاسخ:

$$\pi_\theta(\theta_۱)=\frac{۷}{۸}\quad,\quad \pi_\theta(\theta_۲)=\frac{۱}{۸}$$

$$E(l(a_۱))=\frac{۷}{۸}l(a_۱,۰/۰۱)+\frac{۱}{۸}l(a_۱,۰/۱۰)=\frac{۷}{۸}\times۲۰۰+\frac{۱}{۸}\times۲۰۰=۲۰۰$$

$$E(l(a_۲))=\frac{۷}{۸}l(a_۲,۰/۰۱)+\frac{۱}{۸}l(a_۲,۰/۱۰)=\frac{۷}{۸}\times۱۰۰+\frac{۱}{۸}\times۱۰۰۰=۲۱۲/۵$$

بنابراین طبق شیوه بیز بدون نمونه گیری اقدام $a_۱$ مانند شیوه minimax انتخاب می شود.

۵-۶) در مساله شماره ٤ فرض کنید که مصرف کننده از اطلاعات خود در مورد میانگین فرایند تولید کننده استفاده و آن را به صورت زیر بیان می کند:

$$P\{p=۰/۰۱\}=۰/۲; P\{p=۰/۰۵\}=۰/٦, P\{p=۰/۱۰\}=۰/۲$$

شیوه بیز را پیدا کنید.

پاسخ:

$$\pi_\theta(P=۰/۰۱)=۰/۲ \quad , \quad \pi_\theta(P=۰/۰۵)=۰/٦ \ , \ \pi(P=۰/۱۰)=۰/۲$$

$$E(l(a_۱))=۰/۲\times۷۰۰۰+۰/٦\times۳۵۰۰۰+۰/۲\times۷۰۰۰۰=۳٦٤۰۰$$

$$E(l(a_۲))=۰/۲\times۲۲۰۰۰+۰/٦\times۳۰۰۰۰+۰/۲\times٤۰۰۰۰=۳۰٤۰۰$$

بنابراین طبق شیوه بیز بدون نمونه گیری اقدام $a_۲$ انتخاب می شود.

۵-۷) برای مثال سختی راکول از بخش ۲.۵ اگر توزیع پیشین به صورت $P\{\mu=۷۲\}=\frac{۱}{۳}$ و $P\{\mu=۷۵\}=\frac{۲}{۳}$ باشد، شیوه بیز را پیدا کنید.

پاسخ:

$$\pi_\theta(\mu=۷۲)=\frac{۱}{۳} \quad , \quad \pi_\theta(\mu=۷۵)=\frac{۲}{۳}$$

$$E(l(a_۱))=\frac{۱}{۳}\times۳۸٤۲۰+\frac{۲}{۳}\times۵۸۱۵۳=۵۱۵۹٤$$

$$E(l(a_۲))=\frac{۱}{۳}\times۵۳٤۲۰+\frac{۲}{۳}\times۵۳٤۲۰=۵۳٤۲۰$$

$$E(l(a_۳))=\frac{۱}{۳}\times٤۷۱۷۰+\frac{۲}{۳}\times۵۷۰۳٦=۵۳۷۵۰$$

تحت هر شرایطی هزینه a_4 بیشتر از a_2 و a_5 بیشتر از a_2 است، بنابراین از بین ۳ اقدام بالا، بر مبنای شیوه ی بیز بدون نمونه گیری اقدام a_1 انتخاب می شود.

۵-۸) در صورتی که فضای اقدام و فضای حالت متناهی باشد و انجام تجربه مجاز نباشد، ثابت کنید که شیوه بیز یکسان می ماند، و لو اینکه به جای زیان از غبن استفاده شود.

پاسخ:

در ابتدا تابع غبن را تعریف می کنیم:

$$r(a,\theta_j) = l(a,\theta_j) - \min_{a\in A} l(a,\theta_j)$$

این تابع برای هر حالت طبیعت تعریف می شود، حال برای هر حالت طبیعت هزینه اقدامات مختلف منهای مقدار ثابتی که مینیمم هزینه اقدامات در آن حالت طبیعت است می شود، این مقدار مینیمم را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\min l(a,\theta_j) = m_\theta(j)$$

$$E[r(a_i)] = E[l(a_i)] - \sum_j p\{\theta = \theta_j\} m_\theta(j)$$

توجه کنید که برای هر حالت طبیعت مقدار $m_\theta(j)$ مقداری ثابت است.

برای یافتن اقدام مناسب $\Rightarrow \min E[r(a_i)] = \min[E(l(a_i))] - E[m_\theta(j)]$

$$E[r(a_k)] = E[l(a_k)] - E[m_\theta(j)]$$

$E[m_\theta(j)]$ مقدار ثابتی است، بنابراین تابع زیان یا غبن نتیجه یکسانی می دهند.

۵-۹) اگر $P\{\mu=۷۲\}=\frac{۱}{۵}$ و $P\{\mu=۷۵\}=\frac{۴}{۵}$ باشد، شیوه بیز را برای مساله شماره ۱ پیدا کنید.

پاسخ:

$P\{\mu=۷۲\}=۰/۲ \quad ; \; P\{\mu=۷۵\}=۰/۸$

$E[l(a_۱)]=l(a_۱,۷۲)P\{\mu=۷۲\}+l(a_۱,۷۵)P\{\mu=۷۵\}=۵۸۷۳۳۵$

$E[l(a_۲)]=۱۲۸۴۷۸ \qquad E[l(a_۳)]=۳۵۹۱۵۱$

بنابر شیوه بیز، اقدام $a_۲$ انتخاب می شود.

۵-۱۰) اگر توزیع پیشین برای مثال سختی راکول از بخش ۲.۵، $P\{\mu=۷۲\}=\frac{۱}{۵}$ و $P\{\mu=۷۵\}=\frac{۴}{۵}$ باشد، شیوه بیز را پیدا کنید.

پاسخ:

$P\{\mu=۷۲\}=۰/۲ \quad ; \; P\{\mu=۷۵\}=۰/۸$

$E[l(a_i)]=\pi_\theta(۷۲).l(a_i,۷۲)+\pi_\theta(۷۵).l(a_i,۷۵)$

$E[l(a_۱)]=۵۴۲۰۶/۴$

$E[l(a_۲)]=۵۳۴۲۰$

$E[l(a_۳)]=۵۵۰۶۳$

بنابر شیوه بیز، اقدام $a_۲$ انتخاب می شود.

همچنین بر اساس شکل موجود در بخش ۵-۲-۵، از آنجا که $P\{\mu=۷۲\}=۰/۲<۰/۲۴$ است، بنابراین طبق شیوه ی بیز بدون نمونه گیری اقدام $a_۲$ را بر می گزینیم.

۵-۱۱) در مورد شیوه $d_۴$، که در زیر بخش ۱.۳.۵ تشریح شد، تابع مخاطره را محاسبه کنید. توجه داشته باشید که به ازای $n=۳$ داریم، $P\{X \le b\}=[F(b)]^۲[۳-۲F(b)]$ که $F(b)$ در آن CDF متغیری تصادفی است که یک مشاهده در نمونه تصادفی را در بر می گیرد، یعنی CDF متغیری تصادفی با توزیع نرمال، میانگین μ و انحراف معیار ۲ است.

پاسخ:

در این شیوه تصمیم گیری، CDF متغیر تصادفی $X \sim N(\mu_.,٤)$ برابر است با:

$$F(b)=P\{\tilde{x} \le b\}=۱-P\{\tilde{x} > b\}=۱-\varphi(\frac{b-\mu_.}{۲})$$

$$P_{d_۴}(a_۱,\mu_.)=P\{\tilde{x} \le ۷۳\}=\left[۱-\varphi(\frac{۷۳-\mu_.}{۲})\right]^۲\left[۱+۲\varphi(\frac{۷۳-\mu_.}{۲})\right]$$

$$P_{d_۴}(a_۲,\mu_.)=P\{\tilde{x} \le ۷۵\}=۱-\left\{\left[۱-\varphi(\frac{۷۵-\mu_.}{۲})\right]^۲\left[۱+۲\varphi(\frac{۷۵-\mu_.}{۲})\right]\right\}$$

$$P_{d_۴}(a_۳,\mu_.)=۱-\left[P_{d_۴}(a_۱,\mu_.)+P_{d_۴}(a_۲,\mu_.)\right]=$$
$$\left[۱-\varphi(\frac{۷۵-\mu_.}{۲})\right]^۲\left[۱+۲\varphi(\frac{۷۵-\mu_.}{۲})\right]-\left[۱-\varphi(\frac{۷۳-\mu_.}{۲})\right]^۲\left[۱+۲\varphi(\frac{۷۳-\mu_.}{۲})\right]$$

جدول مقادیر $P_{d_۴}(i,j)$:

a_i \ θ_j	$\theta_۱:\mu=۷۲$	$\theta_۲:\mu=۷۵$
$a_۱$	۰/۷۷۳	۰/۰٦٨
$a_۲$	۰/۰۱۳	۰/۵

$a_{٣}$	٠/٢١٤	٠/٤٣٢

$$R(d,\theta_j)=\sum_{i=١}^{n} l(i,j)P_{d_{٣}}(i,j)$$

$$R(d_{٣},٧٢)=٤٠٧٦٨/٧٥$$

$$R(d_{٣},٧٥)=٥٥٣٠٣/٥$$

بنابر مقادیر بدست آمده، تابع زیان در حالت $\theta_{١}=٧٢$ مقدار کمتری دارد.

٥-١٢) در مورد مثال سختی راکول که در بخش ٢.٥ معرفی شد، با استفاده از یک نمونه تصادفی ٩ تایی، تابع مخاطره را برای شیوه تصمیم گیری $d_{١}$ (تعریف شده در زیر بخش ١.٣.٥ محاسبه کنید.)

پاسخ:

باز هم تابع مخاطره پیشین در حالت $n=٩$ محاسبه می شود، هر گاه حالت طبیعت $\theta:\mu=\mu_{.}$ برقرار باشد، بنابراین $\overline{X}$ توزیع نرمالی بدین شکل داراست:

$$\bar{x}\sim N(\mu_{.},(\frac{٢}{٣})^{٢})$$

$$d_{١}[\bar{x}]=\begin{cases} a_{١} & \bar{x}<٧٣ \\ a_{٢} & ٧٣\le\bar{x}\le٧٤ \\ a_{٣} & ٧٤<\bar{x} \end{cases}$$

$$P_{d_{١}}(a_{١},\mu_{.})=P\{\bar{x}\le٧٣\}=١-\varphi(١/٥(٧٣-\mu_{.}))$$

$$P_{d_{١}}(a_{٢},\mu_{.})=P\{\bar{x}>٧٤\}=\varphi(١/٥(٧٤-\mu_{.}))$$

$$P_{d_{١}}(a_{٣},\mu_{.})=\varphi(١/٥(٧٣-\mu_{.})-\varphi(١/٥(٧٤-\mu_{.}))$$

جدول مقادیر $P_{d_{١}}(i,j)$:

a_i \ θ_j	$\theta_1 : \mu = ۷۲$	$\theta_۲ : \mu = ۷۵$
a_1	۰/۹۳۳۲	۰/۰۰۱۳۵
$a_۲$	۰/۰۰۱۳۵	۰/۹۳۳۲
$a_۳$	۰/۰۶۵۴۵	۰/۶۵۴۵

$$R(d_1,\theta_j) = \sum_{i=1} P_{d_1}(i,j)$$

$$R(d_1,\theta_1 = ۷۲) = ۳۹۰۱۲/۹۳۷۵$$

$$R(d_1,\theta_۲ = ۷۵) = ۵۳۶۶۴/۸۲۳۹$$

می بینیم شیوه تصمیم گیری $d_۲$ کاملا تحت الشعاع d_1 قرار می گیرد.

۵-۱۳) برای مثال سختی راکول که در بخش ۲.۵ ارائه شد، تابع مخاطره در مورد شیوه

$$d[x] = \begin{cases} a_1, & x < ۷۳ \\ a_۲, & ۷۳ \le x \le ۷۴ \\ a_۳, & x > ۷۴ \end{cases}$$

را پیدا کنید. x معرف سختی راکول یک میله تحت آزمایش است (که نمونه ای تصادفی با اندازه یک دارد).

پاسخ:

$$x \sim N(\mu_.,۴)$$

$$P_d(a_1,\mu_.) = P\{x \le ۷۳\} = ۱ - \varphi(۰/۵(۷۳ - \mu_.))$$

$$P_d(a_۲,\mu_.)=P\{x\le ۷۴\}=\varphi(۰/۵(۷۴-\mu_.))$$

$$P_d(a_۳,\mu_.)=\varphi(۰/۵(۷۳-\mu_.)-\varphi(۰/۵(۷۴-\mu_.))$$

$:P_d(i,j)$

a_i \ θ_j	$\theta_۱:\mu=۷۲$	$\theta_۲:\mu=۷۵$
$a_۱$	۰/۶۹۱۵	۰/۱۵۸۷
$a_۲$	۰/۱۵۸۷	۰/۶۹۱۵
$a_۳$	۰/۱۴۹۸	۰/۱۴۹۸

$$R(d,\theta_۱=۷۲)=۴۲۱۱۱/۲۵$$

$$R(d,\theta_۲=۷۵)=۵۴۷۱۲/۸$$

۵-۱۴) وقتی میانگین نمونه ۴ تایی برابر با ۷۳/۵ باشد و وقتی که این میانگین برابر با ۰/۷۴ باشد، شیوه بیز را در مورد مثال سختی راکول به شرح زیر بخش ۵.۲.۵ محاسبه کنید.

پاسخ:

از آنجا که با فرایند نمونه گیری روبرو بوده و در عین حال شیوه ی تصمیم گیری خاصی برای حل مسئله پیشنهاد نشده از تصمیم گیری با شیوه ی بیز با نمونه گیری مطابق روش اول بهره می بریم:

$$\begin{cases}\bar{x}=\mu_. \\ n=۴,\sigma_{\bar{x}}=۱\end{cases}\qquad f_{\bar{x}}(z)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{\frac{-(z-\mu)^۲}{۲}}$$

$$\text{الف)}\; g_\theta(\theta_1) = P\{\mu = ۷۲ | \bar{x} = ۷۳/۵\} = \frac{P\{\bar{x} = ۷۳/۵ | \mu = ۷۲\} P\{\mu = ۷۲\}}{\sum_j P\{\bar{x} = ۷۳/۵ | \mu = \theta_j\} P\{\theta = \theta_j\}}$$

$$= \frac{\frac{۲}{۳} e^{-۱/۱۲۵}}{\frac{۲}{۳} e^{-۱/۱۲۵} + \frac{۱}{۳} e^{-۱/۱۲۵}} = \frac{۲}{۳} = P$$

$$g_\theta(\theta_2) = P\{\mu = ۷۵ | \bar{x} = ۷۳/۵\} = \frac{۱}{۳} = ۱ - P$$

$$E[l(a_1)] = ٤٤۹۳۱/۹ \qquad E[l(a_2)] = ۵۲٤۲۰ \qquad E[l(a_3)] = ۵۰٤۵۹$$

بنابراین از آنجا که برآورد μ مجهول یعنی $\bar{x}$ نسبت میانگین دو حالت طبیعت $\mu = ۷۵, \mu = ۷۲$ است، بنابراین به طور کامل نتیجه توزیع احتمال پسین بر توزیع احتمال پیشین منطبق است، پس هر گاه $P = \frac{۲}{۳}$ باشد همانند قبل شیوه ی بیز، اقدام a_1 را معرفی می کند.

$$\text{ب)}\; \{\bar{x} = ۷٤/۰$$

$$g_\theta(\theta_1) = P\{\mu = ۷۲ | \bar{x} = ۷٤\} = g_\theta(۷۲ | \bar{x} = ۷٤) = \frac{P\{\bar{x} = ۷٤ | \mu = ۷۲\} P\{\mu = ۷۲\}}{\sum_j P\{\bar{x} = ۷٤ | \mu = \theta_j\} P_\theta\{\mu\}}$$

$$= \frac{\frac{۲}{۳} e^{-۲}}{\frac{۲}{۳} e^{-۲} + \frac{۱}{۳} e^{-\frac{۱}{۲}}} = ۰/۳۰۸$$

$$g_\theta(\theta_2) = P\{\mu = ۷۵ | \bar{x} = ۷٤\} = ۰/٦۹۲$$

$$E[l(a_1)] = ۵۲۰۷۵ \qquad E[l(a_2)] = ۵۲٤۲۰ \qquad E[l(a_3)] = ۵۲۹۹۷$$

اقدام a_1 انتخاب می شود.

۵-۱۵) با استفاده از تابع زیان ارائه شده در مساله شماره ۱، با فرض اینکه میانگین یک نمونه تصادفی ٤ تایی معادل ٧٤/٥ است، و با استفاده از توزیع پیشین $P\{\mu=۷۵\}=\frac{۱}{۳}$ و $P\{\mu=۷۲\}=\frac{۲}{۳}$ جواب شیوه بیز را در مورد مثال سختی راکول محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\pi_\theta(\theta_j)=\begin{cases} p & \mu=۷۲ \\ ۱-p & \mu=۷۵ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{X}\sim N(\mu,۱) \\ \overline{x}=۷٤/٥ \end{cases}$$

$$g_\theta(\theta_۱)=P\{z=۷۲|\overline{x}=۷٤/٥\}=\frac{P\{\overline{x}=۷٤/٥|\mu=۷۲\}P\{\mu=۷۲\}}{P\{\overline{x}=۷٤/٥\}}$$

$$=\frac{\frac{۲}{۳}e^{-۳/۱۲٥}}{\frac{۲}{۳}e^{-۳/۱۲٥}+\frac{۱}{۳}e^{-۳/۱۲٥}}=۰/۰۹$$

$$g_\theta(\theta_۲)=۰/۹۱$$

$E[l(a_۱)]=٦٥۲٥۰۳/۹٥$ $\qquad E[l(a_۲)]=۱۲۸٤۷۰$ $\qquad E[l(a_۳)]=۳۹۱۸۳٦/۹۷٥$

بنابراین اقدام منتخب $a_۲$ است.

۵-۱٦) اگر میانگین نمونه ٤ تایی ٧٤/٥ و توزیع پیشین $P\{\mu=۷۲\}=۰/۹٥$ و $P\{\mu=۷٥\}=۰/۰٥$ باشد، جواب شیوه بیز را در مورد مثال سختی راکول که در بخش ۲.۵ شرح داده شد، محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\pi_\theta(\theta_j)=\begin{cases} p=۰/۹۵ & \theta_j=\mu_۱=۷۲ \\ ۱-p=۰/۰۵ & \theta_j=\mu_۲=۷۵ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}\sim N(\mu,۱) \\ \bar{x}=۷۴/۵ \end{cases}$$

$$g_\theta(\theta_۱)=\frac{Pe^{-۳/۱۲۵}}{Pe^{-۳/۱۲۵}+(۱-P)e^{-۰/۱۲۵}}=۰/۴۸۶$$

$$g_\theta(\theta_۲)=۱-g_\theta(\theta_۱)=۰/۵۱۴۱$$

$$E[l(a_۱)]=۴۸۵۶۵ \qquad E[l(a_۲)]=۵۳۴۲۰ \qquad E[l(a_۳)]=۵۲۲۴۲$$

بنابراین اقدام منتخب $a_۱$ است.

۵-۱۷) جواب شیوه بیز را در مورد مساله آگهی از طریق روزنامه، که در زیر بخش ۵.۳.۵ ارائه شد، محاسبه کنید، اگر تعداد پاسخهای پستی برابر با ۱۰ باشد.

پاسخ:

$$X=۱۰ \qquad ; \qquad \pi_\theta(\lambda)=\begin{cases} ۰/۴ & \lambda=۱۶ \\ ۰/۵ & \lambda=۲۰ \\ ۰/۱ & \lambda=۲۴ \end{cases}$$

$$g_\theta(۱۶)=\frac{P\{X=۱۰|\lambda=۱۶\}P\{\lambda=۱۶\}}{\sum_\lambda P\{X=۱۰|\lambda\}P\{\lambda\}}=\frac{۰/۰۳۴\times ۰/۴}{۰/۰۱۳۶+۰/۰۰۳+۰/۰۰۰۰۶۶}\approx ۰/۸۱۶$$

$$g_\theta(۲۰)\approx ۰/۱۸ \qquad ; \qquad g_\theta(۲۴)=۰/۰۰۴$$

$$E[l(a_۱)]=۴۴/۸۴ \qquad E[l(a_۲)]=۴۶/۱۵۶$$

اقدام $a_۲$ انتخاب می شود.

۵-۱۸) جواب شیوه بیز را در مورد مساله آگهی از طریق روزنامه، که در زیر بخش ۵.۳.۵ ارائه شد، محاسبه کنید، اگر تعداد پاسخهای پستی معادل ۱۳ و توزیع پیشین به صورت $P\{\lambda=۲٤\}=۰$، $P\{\lambda=۲۰\}=۰/۱۰$، $P\{\lambda=۱٦\}=۰/۹۰$ باشد.

پاسخ:

$$X=۱۳ \qquad ; \qquad \pi_\theta(\lambda)=\begin{cases} ۰/۹ & \lambda=۱٦ \\ ۰/۱ & \lambda=۲۰ \\ ۰ & \lambda=۲٤ \end{cases}$$

$$g_{\theta|x=۱۳}(\lambda)=\frac{g\{X=۱۳|\theta=\lambda\}\pi_\theta(\lambda)}{\sum_j g\{X=۱۳|\theta=\theta_j\}\pi_\theta(\theta_j)}$$

$$\Rightarrow g_{\theta|x=۱۳}(\lambda)=\begin{cases} ۰/۹٦٤ & \lambda=۱٦ \\ ۰/۰۳٦ & \lambda=۲۰ \\ ۰ & \lambda=۲٤ \end{cases}$$

$$E[l(a_۲)]=۳۵/۲۳۲ \qquad E[l(a_۳)]=٤۵/۲۱٦ \qquad E[l(a_٤)]=٦۱/۰۳٦$$

بنابراین اقدام $a_۲$ انتخاب می شود.

۵-۱۹) در چارچوب مسائل شماره ۳و۵ تصور کنید که بلافاصله پس از رسیدگی اما با فاصله ای زیاد پیش از شروع تولید عملی (زمانی که برای مصرف ۱۰۰ واحد پول اضافی بسیار دیر می شود)، دو قلم کالا می توان تولید کرد. پس از مشاهده کیفیت این دو قلم کالا می توان در مورد اینکه آیا باید وضعیت واقعی ماشین را تعیین کرد (با مصرف ۱۰۰ واحد پول) یا نه، تصمیم گرفت. الف) فرض کنید D معرف تعداد ناقصها باشد. توزیع (شرطی)D چیست؟ ب) به ازای $D=d$ توزیع پسین p را پیدا کنید؛ ج) به ازای $d=۰,۱,۲$ شیوه بیز را پیدا کنید.

پاسخ:

$$\theta(P)=\begin{cases}\theta_۱ & ۰/۰۱\\ \theta_۲ & ۰/۱۰\end{cases} \quad ; \quad \pi_\theta(\theta_j)=\begin{cases}\frac{۷}{۸} & \theta=\theta_۱\\ \frac{۱}{۸} & \theta=\theta_۲\end{cases}$$

$$\text{الف)}\ P(D=d|p)=\binom{۲}{d}p^d(۱-p)^{۲-d} \qquad d=۰,۱,۲$$

$$\text{ب)}\ g_\theta(\theta_۱)=P\{p=۰/۰۱|D=d\}=\frac{P\{D=d|p=۰/۰۱\}P\{\theta=\theta_۱\}}{\sum_j P\{D=d|p=D_j\}P(\theta_j)}$$

$$g_\theta(\theta_۱)=\frac{\frac{۷}{۸}(۰/۰۱)^d(۰/۹۹)^{۲-d}}{\frac{۷}{۸}(۰/۰۱)^d(۰/۹۹)^{۲-d}+\frac{۱}{۸}(۰/۱۰)^d(۰/۹۰)^{۲-d}} \quad .d=۰,۱,۲$$

$$g_\theta(\theta_۲)=\frac{(۰/۱)^d(۰/۹)^{۲-d}}{۷(۰/۰۱)^d(۰/۹۹)^{۲-d}+(۰/۱)^d(۰/۹۰)^{۲-d}} \quad d=۰,۱,۲$$

$$\text{ج)}\ E[l_d(a_۱)]=۲۰۰$$

$$E[l_d(a_۲)]=l(a_۲,\theta_۱)g_\theta(\theta_۱)+l(a_۲,\theta_۲)g_\theta(\theta_۲)$$

$$=۱۰۰+\frac{۹۰۰(۰/۱)^d(۰/۹)^{۲-d}}{۷(۰/۰۱)^d(۰/۹۹)^{۲-d}+(۰/۱)^d(۰/۹)^{۲-d}}$$

$$E[l_d(a_۲)]\le[l_d(a_۱)]\Rightarrow ۸۰۰\times(\frac{۱}{۹})^d(۰/۹)^۲\le ۷۰۰\times(\frac{۱}{۹۹})^d(۰/۹۹)^۲$$

$$\Rightarrow(\frac{۹۹}{۹})^d\le\frac{۷}{۸}(\frac{۰/۹۹}{۰/۹})^۲\Rightarrow(۱۱)^d\le ۱/۰۵۸۷۵\Rightarrow d\le ۰/۰۲۳۸$$

بنابراین اگر $d=۰$ باشد اقدام $a_۲$ ترجیح دارد و در غیر این صورت اقدام $a_۱$ ارجح است.

۵-۲۰) در چارچوب مسائل شماره ٤و٦؛ تصور کنید که مصرف کننده می تواند پیش از تصمیم گیری، یک نمونه تصادفی ۱۰ تایی بگیرد. این نمونه بر مبنای نه نفع و نه ضرر، استوار است و سازنده باید ۱۰۰۰۰ قلم کالا به مصرف کننده تحویل دهد. الف) D را معرف تعداد اقلام ناقص بگیرید. توزیع (شرطی) D چیست؟ ب) به شرط اینکه دقیقا یک قلم کالای ناقص پیدا شده باشد، توزیع پسین p را پیدا کنید؛ ج) حاصل شیوه بیز را پیدا کنید.

پاسخ:

$$\theta(P)=\begin{cases}0/01 & \theta=\theta_1\\ 0/05 & \theta=\theta_2\\ 0/10 & \theta=\theta_3\end{cases} \quad ; \quad \pi_\theta(\theta_j)=\begin{cases}0/2 & \theta_1\\ 0/6 & \theta_2\\ 0/2 & \theta_3\end{cases}$$

$$\text{(الف)}\, P\{D=d|p\}=f_{D|P}(d)=\binom{10}{d}p^d(1-p)^{10-d} \qquad d=0,1,2,\ldots,10$$

$$\text{(ب)}\, d=1 \Rightarrow g_\theta(\theta_1=0/01)=\frac{0/00183}{0/00183+0/0189+0/00775}=0/0643$$

$$g_\theta(\theta_2=0/05)=0/06636$$

$$g_\theta(\theta_3=0/10)=0/2721$$

$$\text{(ج)}\; E[l(a_1)]=\sum_j l(a_1,\theta_j).g_\theta(\theta_j)=42728$$

$$E[l(a_2)]=32207$$

بنابراین حاصل شیوه ی بیز، اقدام a_2 است.

۵-۲۱) فرض کنید حالت طبیعت، λ با پارامتر یک توزیع پواسون را معرفی می کند.

$0<\lambda<\infty$ فرض کنید X متغیر تصادفی پواسون است، یعنی

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

همچنین فرض کنید که توزیع پیشین λ، نمایی با پارامتر $\theta = ۲$ است، یعنی

$$f_x(z)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}e^{-z/۲} & z\geq ۰\\ ۰ & z<۰\end{cases}$$

تصور کنید دو اقدام ممکن به شرح زیر

$$a_۱ : \lambda \leq ۱$$
$$a_۲ : \lambda > ۱$$

و یک تابع زیان به صورت

$$l\{a_۱,\lambda\}=\begin{cases}۰ & \lambda\leq ۱\\ ۱۰(\lambda-۱) & \lambda>۱\end{cases}$$

$$l\{a_۲,\lambda\}=\begin{cases}۱۰(۱-\lambda) & \lambda\leq ۱\\ ۰ & \lambda>۱\end{cases}$$

ارائه شده اند. اگر مقدار متغیر تصادفی X معلوم شود و مساوی صفر باشد، یعنی $k=۰$ جواب شیوه بیز را پیدا کنید. به عنوان توضیح می توان گفت که این مساله به ازای هر مقدار k و برای رده عمومیتر توزیعهای پیشین به نام توزیع گاما، یعنی

$$f_x(z)=\begin{cases}\frac{۱}{\Gamma(c)d^c}z^{(c-۱)}e^{-z/d} & z\geq ۰\\ ۰ & z<۰\end{cases}$$

که در آن d,c هر دو ثابتهای مثبت هستند، قابل حل است.

پاسخ:

$$f_\lambda(z)=\frac{۱}{۲}e^{-\frac{z}{۲}};\qquad z\geq ۰$$

از آنجا که مقدار $X=k$ معلوم است، بنابراین:

$$g_{\lambda|x=k}(\lambda_\cdot)=\frac{g_\lambda(\lambda_\cdot).P\{x=k|\lambda=\lambda_\cdot\}}{P\{x=k\}}=\frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{\lambda_\cdot}{2}}.\frac{\lambda_\cdot^k.e^{-\lambda_\cdot}}{k!}}{\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}.\frac{z^k.e^{-z}}{k!}dz}$$

اما با توجه به مخرج داریم:

$$\Rightarrow P\{x=k\}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}.\frac{z^k.e^{-z}}{k!}dz=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2(k!)}z^k e^{-\frac{3}{2}z}$$

$$=\frac{\Gamma(k+1)(\frac{2}{3})^{k+1}}{2(k!)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(k+1)(\frac{2}{3})^{k+1}}z^k.e^{-\frac{3}{2}z}$$

تابع چگالی احتمال توزیع گاما با انتگرالگیری برابر با ۱ می شود:

$$\frac{\Gamma(k+1)(\frac{2}{3})^{k+1}}{2(k!)}\times 1=P\{x=k\}$$

$$g_{\lambda|x=k}(\lambda_\cdot)=\frac{\frac{1}{2(k!)}e^{-\frac{3\lambda_\cdot}{2}}.\lambda_\cdot^k}{\frac{\Gamma(k+1).(\frac{2}{3})^{k+1}}{2(k!)}}=\frac{e^{-\frac{3}{2}\lambda_\cdot}.\lambda_\cdot^k}{\Gamma(k+1).(\frac{2}{3})^{k+1}}$$

$$l[a_1]=\int_1^{+\infty}l(a_1,\lambda).g_{\lambda|x=k}(\lambda)d\lambda=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\frac{3}{2}\lambda}.\lambda^k}{\Gamma(k+1).(\frac{2}{3})^{k+1}}\times 10(\lambda-1)d\lambda$$

$$\stackrel{k=0}{\Rightarrow}l[a_1]=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\frac{3}{2}\lambda}}{\frac{2}{3}}\times 10(\lambda-1)d\lambda=10\int_1^{+\infty}\frac{3}{2}e^{-\frac{3\lambda}{2}}(\lambda-1)d\lambda$$

$$=10\left[\left[e^{-\frac{3}{2}\lambda}\right]_1^{+\infty}-\left[\lambda e^{-\frac{3}{2}\lambda}\right]_1^{+\infty}-\left[\frac{e^{-1/5\lambda}}{1/5}\right]_1^{+\infty}\right]$$

$$\Rightarrow E[l(a_۱)] \approx ۱/۴۹$$

$$E[l(a_۲)] = \int_۰^۱ \frac{e^{-\frac{۳}{۲}\lambda} . \lambda^k}{\Gamma(k+۱)(\frac{۳}{۲})^k} \times ۱۰(۱-\lambda) d\lambda$$

$$\overset{k=۰}{\Rightarrow} E[l(a_۲)] = \int_۰^۱ ۱۰(۱-\lambda) \times \frac{۳}{۲} e^{-\frac{۳}{۲}\lambda} d\lambda = ۱۰\int_۰^۱ (۱-\lambda) \times ۱/۵ e^{-۱/۵\lambda} d\lambda$$

$E[l(a_۲)] = ۱/۸۴$ مانند روش بالا بدست می آید.

شیوه بیز، اقدام $a_۱$ با تابع زمان کمتر را انتخاب می کند.

۵-۲۲) با استفاده از تابع زیان زیر، مساله ۲۱ را حل کنید به توضیح مساله ۲۱ نگاه کنید.

$$l\{a_۱, \lambda\} = \begin{cases} ۰ & \lambda \le ۱ \\ ۱۰ & \lambda > ۱ \end{cases}$$

$$l\{a_۲, \lambda\} = \begin{cases} ۱۰ & \lambda \le ۱ \\ ۰ & \lambda > ۱ \end{cases}$$

پاسخ:

$$l(a_۱) = \int_۱^{+\infty} ۱۰ \times \frac{۳}{۲} e^{-\frac{۳}{۲}\lambda} d\lambda = ۱۰\left[-e^{-۱/۵\lambda}\right]_۱^{+\infty} = ۱۰ e^{-۱/۵} = ۲/۲۳$$

$$l(a_۲) = \int_۰^۱ ۱۰ \times \frac{۳}{۲} e^{-\frac{۳}{۲}\lambda} d\lambda = ۱۰\left[-e^{-۱/۵\lambda}\right]_۰^۱ = ۱۰(۱-e^{-۱/۵}) \approx ۷/۷۷$$

بنابر شیوه بیز، باز هم اقدام $a_۱$ انتخاب می شود.

۵-۲۳) فرض کنید حالات طبیعت، p معرف پارامتر یک توزیع برنویی $(۰ < p < ۱)$ باشد. یک نمونه تصادفی n تایی بگیرید و متغیر تصادفی X را معرف تعداد موفقیتهای مشهود فرض کنید. معلوم شده است که X توزیع دو جمله ای دارد، یعنی

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\ldots,n$$

همچنین فرض کنید که توزیع پیشین p در فاصله صفر تا یک، یکنواخت است، یعنی

$$f_p(z)=\begin{cases}1 & 0\le z\le 1\\ 0\end{cases}$$

تصور کنید که دو اقدام ممکن به شرح زیر وجود دارند:

$$a_1 : p\le p_0$$

$$a_2 : p>p_0$$

و یک تابع زیان به صورت

$$l(a_1,p)=\begin{cases}0 & p\le p_0\\ r(p-p_0) & p>p_0\end{cases}$$

$$l(a_2,p)=\begin{cases}r(p-p_0) & p\le p_0\\ 0 & p>p_0\end{cases}$$

ارائه شده است. اگر $p_0=0.05$ و $r=1$، $n=10$ و $k=1$ باشد، جواب شیوه بیز را پیدا کنید. به اتحاد زیر توجه داشته باشید.

$$\int_0^1 z^{(c-1)}(1-z)^{(d-1)}dz=\frac{\Gamma(c)\Gamma(d)}{\Gamma(c+d)} \qquad c,d>0$$

به عنوان توضیح چنین می توان گفت که به ازای هر مقدار p_0,k,n به ازای رده عمومیتر توزیعهای پیشین به نام توزیع بتا، یعنی

$$f_p(z)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}z^{(c-1)}(1-z)^{(d-1)} & 0\le z\le 1\\ 0\end{cases}$$

که در آن d,c ثابتهای مثبت هستند، می توان این مساله را حل کرد.

پاسخ:

$$\begin{cases} P_۰ = ۰/۰۵ \\ r = ۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} n = ۱۰ \\ k = ۱ \end{cases}$$

$$f_P(z) = \begin{cases} ۱ & ۰ \le z \le ۱ \\ ۰ & O.W. \end{cases}$$

از آنجا که در این مسئله مقدار $k = ۱$ مشخص است، بنابراین تابع چگالی احتمال $P = P_۰$ را بر حسب k بدست می آوریم، یعنی:

$$g_{p|x=k}(p_۰) = \frac{P\{x = k, p = p_۰\}}{P\{x = k\}} = \frac{\binom{n}{k} p_۰^k (۱ - p_۰)^{n-k}}{\int_۰^۱ \binom{n}{k} p^k (۱ - p)^{n-k} dp}$$

براساس توزیع چگالی تابع بتا تابع مقابل، از نوع β با پارامترهای $C = k + ۱$ و $d = n - k + ۱$ است.

$$\int_۰^۱ \binom{n}{k} p^k (۱ - p)^{n-k} dp = \frac{\Gamma(k+۱)\Gamma(n-k+۱)}{\Gamma(n+۲)} = \frac{k!(n-k)!}{(n+۱)!}$$

$$\Rightarrow g_{p|x=k}(p_۰) = \frac{(n+۱)!}{k!(n-k)!} p_۰^k (۱ - p_۰)^{n-k}$$

$$E[l(a_۱)] = \int_{P_۰}^{۱} r(P - P_۰) \times ۱۱۰ P(۱-P)^۹ dp = \int_{۰/۰۵}^{۱} (P - ۰/۰۵) \times ۱۱۰ P(۱-P)^۹ dP$$

به منظور حل این معادله می توانیم از معادله مربوط به تابع توزیع β استفاده کنیم، اما در ابتدا باید بجای P متغیر جدیدی تعریف کنیم که بازه انتگرال آن $[۰,۱]$ باشد،

بازه اولیه	۰/۰۵	p	۱
بازه جدید	۰	p'	۱

$$\Rightarrow \frac{P-0/05}{0/95}=P'$$

$$E[l(a_1)]=\int_0^1 (0/95P')\times 110(0/95P'+0/05)(0/95)^9(1-P')^9 dp'\times 0/95$$

$$=59/44\int_0^1 P'(P'+0/053)(1-P')^9 dp'$$

$$=59/44\left[\int_0^1 P'^2(1-P')^9 dP'+\int_0^1 0/053P'(1-P')^9 dP'\right]$$

$$\text{بر اساس اتحاد مربوط به توزیع بتا}=59/44\left[\frac{\Gamma(3)\Gamma(10)}{\Gamma(13)}+0/053\times\frac{\Gamma(2)\Gamma(10)}{\Gamma(12)}\right]\approx 0/147$$

$$E[l(a_2)]=\int_0^{0/05} r(P_0-P)\times 110P(1-P)^9 dp=\int_0^{0/05}(0/05-P)\times 110P(1-P)^9 dp$$

$$E[l(a_2)]-E[l(a_1)]=\int_0^1 (0/05-P)\times 110P(1-P)^9 dp=E[(0/05-P)]$$

$$=E[0/05]-E[P]=0/05-110\times\frac{\Gamma(3)\Gamma(10)}{\Gamma(13)}$$

$$=0/05-\frac{1}{6}\approx -0/117$$

$$E[l(a_2)]=0/147-0/117\approx 0/03$$

بنا بر شیوه بیز، اقدام a_2 انتخاب می شود.

۵-۲۴) با استفاده از تابع زیان زیر مساله ۲۳ را حل کنید. به توضیح مربوط به مساله ۲۳ نگاه کنید.

$$l(a_1,p)=\begin{cases}0 & p\le p_0\\ 1 & p>p_0\end{cases}$$

$$l(a_1,p)=\begin{cases}1 & p\le p_0\\ 0 & p>p_0\end{cases}$$

پاسخ:

با استفاده از تابع زیان داده شده داریم:

$$E[l(a_۱)] = \int_{۰/۰۵}^{۱} ۱۱۰P(۱-P)^۹ dp$$

$$= \int_{۰/۰۵}^{۱} (۰/۹۵) \times ۱۱۰(۰/۹۵P' + ۰/۰۵)(۰/۹۵)^۹(۱-P')^۹ dp'$$

$$= ۶۲/۵۷\int_{۰}^{۱}(P' + ۰/۰۵۳)(۱-P')^۹ dp' = ۶۲/۵۷\left[\int_{۰}^{۱} P'(۱-P')^۹ dP'\right]$$

$$+ ۰/۰۵۳\left[\int_{۰}^{۱}(۱-P')^۹ dP'\right] = ۶۲/۵۷\left[\frac{\Gamma(۲)\Gamma(۱۰)}{\Gamma(۱۲)} + ۰/۰۵۳ \times \frac{\Gamma(۱)\Gamma(۱۰)}{\Gamma(۱۱)}\right]$$

$$= ۶۲/۵۷\left[\frac{۱}{۱۱۰} + \frac{۰/۰۵۳}{۱۰}\right] = ۰/۹۰۰$$

$$E[l(a_۲)] = \int_{۰}^{۰/۰۵} ۱۱۰P(۱-P)^۹ dp$$

$$E[l(a_۱)] + E[l(a_۲)] = \int_{۰}^{۱} ۱۱۰P(۱-P)^۹ dp = ۱۱۰ \times \frac{\Gamma(۲)\Gamma(۱۰)}{\Gamma(۱۲)} = ۱$$

$$E[l(a_۲)] = ۱ - ۰/۹۰۰ = ۰/۱۰۰$$

بنابر شیوه بیز، اقدام $a_۲$ انتخاب می شود.

۵-۲۵) نتیجه ای را که در پانوشت زیر بخش ۵.۳.۵ دیده می شود، در مورد توزیع پسین θ، هر گاه توزیع پیشین θ و توزیع X نیز نرمال باشند، اثبات کنید.

۵-۲۶) در مورد شیوه $d_{\overline{X}}$ به شرح بخش ۵.٤، $\beta(۷۳.۵)$ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} H: \mu = ۷۲ \\ A: \mu \neq ۷۲ \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{x} \sim N(\mu, ۱) \\ n = ٤ \end{cases}$$

$$A = [۷۰/۷, ۷۳/۳]$$

$$\beta(۷۳/۵)=P\{۷۰/۷\le\bar{x}\le۷۳/۳|\mu\ne۷۲\}=P\left\{-۲/۸\le\frac{\bar{x}-۷۳/۵}{۱}\le-۰/۲\right\}$$

$$=\varphi(۰/۲)-\varphi(۲/۸)\approx۰/۴۱۸$$

۵-۲۷) در مورد شیوه $d_{\bar{X}}$ به شرح بخش ۵.۴ α، $\beta(۷۳)$ را پیدا کنید. توجه داشته باشید که به ازای $n=۳$ داریم

$$P\{X\le b\}=[F(b)]^{۲}[۳-۲F(b)]$$

که در آن $F(b)$ معرف CDF یکی از متغیرهای تصادفی تشکیل دهنده نمونه تصادفی است، یعنی CDF یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و انحراف معیار ۲.

پاسخ:

$$\begin{cases}H:\mu=۷۲\\A:\mu\ne۷۲\end{cases}\qquad\begin{cases}U=\tilde{x}\\A=[۷۰,۷۴]\end{cases}\qquad\begin{cases}n=۳\\x\sim N(\mu,۴)\end{cases}$$

$$\alpha=P\{U\notin A|\theta\in D\}=P\{\tilde{x}\notin A|\mu=۷۲\}$$

$$\mu=۷۲\Rightarrow P\{\tilde{x}\le۷۴\}=[۱-\varphi(۱)]^{۲}[۱+۲\varphi(۱)]\approx۰/۹۳۲$$

$$P\{\tilde{x}\le۷۰\}=\{\varphi(۱)^{۲}[۳-۲\varphi(۱)]=۰/۰۶۸\}$$

$$\Rightarrow۱-\alpha\approx P\{\tilde{x}\le۷۴\}-P\{\tilde{x}<۷۰\}=۰/۸۶۴\Rightarrow\alpha=۰/۱۳۶$$

$$\beta(۷۳)=P\{\tilde{x}\in A|\theta\notin D\}=P\{۷۰\le\tilde{x}\le۷۴|\mu=۷۳\}=P\{\tilde{x}\le۷۴\}-P\{\tilde{x}\le۷۰\}$$

$$(۱-\varphi(۰/۵))^{۲}(۱+۲\varphi(۰/۵))-\varphi(۱/۵)^{۲}(۳-۲\varphi(۱/۵))=۰/۷۷۲-۰/۰۱۳$$

$$\beta(۷۳)\approx۰/۷۶$$

۵-۲۸) ناحیه پذیرش متقارن، A، (حول ۷۲) را براساس میانه یک نمونه تصادفی ۳ تایی طوری پیدا کنید که $P\{X\in A|\mu=۷۲\}=۰/۸۰۶$ باشد، یعنی، سطح معنادار بودن

این شیوه معادل سطح معنادار بودن شیوه $d_{\overline{X}}$ شود. در مورد توزیع $\overline{X}$ به توضیح ارائه شده در مساله ۲۷ نگاه کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} H_0 : \mu \neq ۷۲ \\ H_1 : \mu = ۷۲ \end{cases} \qquad ۱-\alpha = ۰/۸۰۶ \qquad \Rightarrow \alpha = ۰/۱۹۴$$

$$A = [۷۲ - k\sigma, ۷۲ + k\sigma]$$

$$P\{۷۲ - k\sigma \leq \tilde{x} \leq ۷۲ + k\sigma\} = P\{۷۲ - ۲k \leq \tilde{x} \leq ۷۲ + ۲k\} = ۰/۸۰۶$$

$$= ۱ - ۲P\{\tilde{x} > ۷۲ + ۲k\} = ۱ - ۲[۱ - P\{\tilde{x} \leq ۷۲ + ۲k\}] = ۲P\{\tilde{x} \leq ۷۲ + ۲k\} - ۱$$

$$= ۲(۱ - \varphi(k))^۲ (۱ + ۲\varphi(k)) - ۱ = ۰/۸۰۶ \Rightarrow \varphi(k) = ۰/۱۹۳$$

$$\Rightarrow k = ۲/۰۷ \qquad \Rightarrow A = [۷۲ - ٤/۱٤, ۷۲ + ٤/۱٤] = [٦۷/۸٦, ۷٦/۱٤]$$

البته این نتیجه بدون حل مسائل نیز قابل پیش بینی بود زیرا بـه دلیـل قرینگـی مسـاله واضح است که $P\{\tilde{x} < ۷۲ - k\sigma | \mu = ۷۲\}$ باید برابر با $۰/۹۷ = \frac{۱ - ۰/۸۰٦}{۲}$ باشد.

۵–۲۹) α و $\beta(۷۳)$ را در مورد شیوه d_{X_M} به شرح بخـش ٤.۵ پیـدا کنیـد. بایـد توجـه داشت که به ازای $n = ٤$ داریم:

$$P\{X_M \leq b\} = [F(b)]^٤$$

که در آن $F(b)$ به شرح مساله ۲۷ است.

پاسخ:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = ۷۲ \\ H_1 : \mu \neq ۷۲ \end{cases} \qquad \begin{cases} U = X_{\max} \\ A = [۷۰, ۷٤] \end{cases} \qquad \begin{cases} n = ٤ \\ x \sim N(\mu, ٤) \end{cases}$$

$$P\{X_{\max} \le b\} = F_x(b)^n = \left[1-\varphi(\frac{b-\mu}{\sigma})\right]^n$$

$$\pi(\mu) = P\{x_{\max} \in A|\mu\} = P\{۷۰ \le X_M \le ۷۴|\mu = ۷۲\}$$

$$= \left[1-\varphi(\frac{۷۴-\mu}{۲})\right]^۴ - \left[1-\varphi(\frac{۷۰-\mu}{۲})\right]^۴$$

$$\alpha = 1-\pi(۷۲) = 1-((1-\varphi(1))^۴ - (\varphi(1)^۴) \approx ۰/۵$$

$$\beta(۷۳) = \pi(۷۳) = (1-\varphi(۰/۵))^۴ - \varphi(1/۵)^۴ \approx ۰/۲۲$$

۵-۳۰) ناحیه پذیرش متقارن A، (حول ۷۲) را طوری بیابید کـه بـر اسـاس بزرگتـرین متغیر تصادفی در یک نمونه تصادفی چهارتایی، رابطه

$$P\{X_M \in A|\mu = ۷۲\} = ۰/۸۰۶$$

برقرار باشد، یعنی، سطح معنادار بودن ایـن شـیوه و شـیوه $d_{\overline{X}}$ مسـاوی باشـد. بـه توضیح مساله ۲۹ نگاه کنید.

پاسخ:

$$A = [۷۲-۲k, ۷۲+۲k]$$

$$\pi(۷۲) = 1-\alpha = P\{X_M \in A|\mu = ۷۲\} = ۰/۸۰۶$$

$$[1-\varphi(k)]^۴ - [\varphi(k)]^۴ = ۰/۸۰۶ \qquad \Rightarrow \varphi(k) \approx ۰/۰۵ \Rightarrow k \approx 1/۶۴۵$$

$$\Rightarrow A = [۷۲-۲\times 1/۶۴۵, ۷۲+۲\times 1/۶۴۵] = [۶۸/۷1, ۷۵/۲۹]$$

۵-۳۱) ۵-۳۱) به ازای $n=۳$ ، مساله ۳۰ را تکرار کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} n = ۳ \\ \sigma_M = ۲ \end{cases}$$

$$P\{X_M \in A | \mu = ۷۲\} = ۰/۸۰۶$$

$$P\{۷۲ - ۲k \leq X_M \leq ۷۲ + ۲k\} = P\{X_M \leq ۷۲ + ۲k\} - P\{X_M \leq ۷۲ - ۲k)\}$$

$$= [۱ - \varphi(k)]^{۳} - [\varphi(k)]^{۳} = ۰/۸۰۶ \quad \Rightarrow \varphi(k) \approx ۰/۰۷$$

$$\Rightarrow k \approx ۱-٤۷۷ \quad \Rightarrow \qquad A = [٦۹/۰٤٦, ۷٤/۹٥٤]$$