حل المسائل کتاب آمار مهندسی

تالیف: لیبرمن، ترجمه: دکتر محلوجی

مولف:

ابوالفضل کاظمی

مهدی عزیز محمدی

فصل ششم:

آزمون فرضها در مورد یک پارامتر

1- لازم است که میانگین مقاومت پارگی تارهای یک نوع پارچه از $m = 180 psi$ کمتر نباشد. بر اساس تجربیات گذشته انحراف معیار معادل $4 psi$ است. محموله ای مرکب از یک عدل از این پارچه از فروشنده دریافت، و از سه قطعه نمونه برداری می شود. این نمونه ها آزمایش می شوند و نتایج زیر بدست می آید.

قطعه اول: $182 psi$ **قطعه دوم**: $172 psi$ **قطعه سوم**: $177 psi$

آیا به ازای سطح معنا دار بودن 5 درصد باید عدل پارچه را پذیرفت؟ احتمال پذیرش عدلی از پارچه که میانگین مقاومت پارگی تارهایش $m = 170 psi$ باشد چقدر است؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$X \sim N(m,16)$$
$$\overline{X} = \frac{177+172+182}{3} = 177$$
$$\begin{cases} H_0 : m \geq 180 \\ H_1 : m < 180 \end{cases}$$

با توجه به فرض صفر ($H_0 : m \geq 180$)، ناحیه پذیرش را بصورت زیر خواهیم داشت:

$$A = [-Z_a, +\infty) = [-Z_{0.05}, +\infty) = [-1.645, +\infty)$$
$$Z = \frac{\overline{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{177-180}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = -1.299$$

حال از آنجا که مقدار Z در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد عدل پارچه پذیرفته می شود. پس فرض صفر ($H_0 : m \geq 180$) را می پذیریم.

جهت محاسبه احتمال پذیرش عدلی که میانگین مقاومت پارگی تارهایش $m = 170 psi$ باشد می بایستی احتمال وقوع خطای نوع دوم یعنی b را که عبارتست از پذیرش فرض صفر در حالتی که این فرض غلط است را محاسبه نماییم چرا که در اینجا عدلی مورد پذیرش قرار گرفته که میانگین مقاومت پارگی تارهایش $m = 170 psi$ است نه $m = 180 psi$ ، بنابراین داریم:

$$b = P\left(\frac{\overline{X} - 180}{\frac{4}{\sqrt{3}}} \geq -1.645 \mid m = 170 \right) = P\left(\frac{\overline{X} - 170}{\frac{4}{\sqrt{3}}} \geq -1.645 - \frac{170-180}{\frac{4}{\sqrt{3}}} \right) = P(Z \geq 2.68) = 0.0036$$

2- یک سازنده لاستیک مصنوعی مدعی است که میانگین سختی محصولش مساوی 64/3 درجه است. احساس می شود که ممکن استاین ادعا درست نباشد. در نتیجه قرار استتجربه ای انجام شود. سوابق حاکی از آنند که انحراف معیار متغییر تصادفی (سختی لاستیک) دو درجه است. اگر میانگین واقعی (m)، 64/3 باشد، احتمال رسیدن به این نتیجه باید 0/95 باشد، به علاوه اگر مقاومت تا ± 1.5 درجه تفاوت داشته باشد، شیوه باید با احتمال بیش از 0/80 به این نتیجه بینجامد که m مساوی 64/3 نیست. الف) اندازه نمونه مورد نیاز برای این تجربه چقدر است؟ ب) بر اساس پاسخ بند الف، اگر $\overline{X} = 65$ درجه باشد، آیا باید نتیجه گرفت که سختی 64/3 است؟ ج) وقتی که میانگین واقعی سختی معادل 65 درجه است، با استفاده از نمونه بند الف به طور دقیق احتمال این نتیجه گیری را که میانگین سختی لاستیک 64/3 باشد، محاسبه کنید. از منحنی های

OC موجود در کتاب استفاده نکنید، بلکه احتمال دقیق را محاسبه کنید. می توانید مقدار پاسخ خود را با مقدار خوانده شده از منحنی مقایسه کنید.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$X \sim N(m,4)$$
$$1-a = 0.95 \Rightarrow a = 0.05$$
$$\begin{cases} H_0 : m = 64.3 \\ H_1 : m \neq 64.3 \end{cases}$$

الف) با توجه به دوطرفه بودن آزمون فرض داریم:

$$n = \frac{\left(Z_{a/2} + Z_b\right)^2 s^2}{(m_1 - m_0)^2}$$

حال از آنجا که مقدار b مجهول می باشد ابتدار می بایستی این مقدار محاسبه گردد، با توجه به مفروضات مسئله احتمال کشف ($1-b$)(رد فرض صفر به شرط غلط بودن فرض صفر)، 0/80 عنوان گردیده است. بنابراین داریم:

$$1-b = 0.8 \Rightarrow b = 0.2$$

$$n = \frac{\left(Z_{a/2} + Z_b\right)^2 s^2}{(m_1 - m_0)^2} = \frac{(Z_{0.025} + Z_{0.2})^2 4}{(1.5)^2} = 15$$

ب) از آنجا که آزمون فرض دو طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A = \left[-Z_{a/2}, Z_{a/2}\right] = [-1.96, 1.96]$$

$$Z = \frac{\overline{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{65 - 64.3}{\frac{2}{\sqrt{15}}} = 1.356$$

حال از آنجا که مقدار Z در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد پس فرض صفر ($H_0 : m = 64.3$) را می پذیریم یعنی ادعای سازنده لاستیک را قبول می کنیم.

ج) جهت محاسبه احتمال این که میانگین سختی لاستیک 64/3 اندازه گیری شود، می بایستی احتمال وقوع خطای نوع دوم یعنی b را که عبارتست از پذیرش فرض صفر در حالتی که این فرض غلط است را محاسبه نماییم چرا که در اینجا لاستیکی مورد پذیرش قرار گرفته که میانگین سختی آن 65 است نه 64/3 ، بنابراین داریم:

$$b = P\left(-1.96 \le \frac{\overline{X} - 64.3}{\frac{2}{\sqrt{15}}} \le 1.96 \mid m = 65\right) = P\left(-1.96 - \frac{65 - 64.3}{\frac{2}{\sqrt{15}}} \le Z \le 1.96 - \frac{65 - 64.3}{\frac{2}{\sqrt{15}}}\right)$$
$$= P(-3.316 \le Z \le 0.604) = P(Z \ge -3.316) - P(Z \ge 0.604) = [1 - P(Z \ge 3.316)] - P(Z \ge 0.604)$$
$$= 0.7286$$

3- در یک فرآیند شیمیایی بسیار مهم است که محلول خاصی که بعنوان عامل واکنشدار به کار می رود، دارای PH برابر با 8/30 باشد. برای سنجش PH روشی وجود دارد که می دانیم برای محلولهایی از این نوع مقادیری با انحراف معیار $s = 0.02$ از آن حاصل می شود. تمایل بر این است که آزمایش طوری طراحی شود

که اگر PH واقعا 8/30 باشد، با احتمال 0/95 بتوان به این نتیجه دست یافت. از سوی دیگر اگر PH به مقدار 0/03 در هر جهت از 8/30 انحراف داشته باشد، تمایل بر این است که احتمال کشف چنین تفاوتی از 0/98 بیشتر باشد. الف) کدام شیوه تصمیم گیری را باید مورد استفاده قرار داد؟ ب) اندازه نمونه مورد نیاز چقدر است؟ ج) اگر $\overline{X}=8.31$ باشد نتیجه چگونه خواهد بود؟ د) اگر PH واقعی مساوی 8/32 باشد، با استفاده از شیوه فوق احتمال کسب این نتیجه که PH معادل 8/30 نیست چقدر است؟

پاسخ:

الف)

با توجه به مفروضات مسدله خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
& X \sim N\left(m,(0.02)^2\right)\\
& 1-a=0.95 \Rightarrow a=0.05\\
& 1-b=0.98 \Rightarrow b=0.02\\
& \begin{cases} H_0: m=8.3\\ H_1: m\neq 8.3\end{cases}
\end{aligned}
$$

ب) با توجه به دوطرفه بودن آزمون فرض داریم:

$$
n=\frac{\left(Z_{a/2}+Z_b\right)^2 s^2}{(m_1-m_0)^2}=\frac{(Z_{0.05}+Z_{0.02})^2(0.02)^2}{(0.03)^2}=7
$$

ج) از آنجا که آزمون فرض دو طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$
A=\left[-Z_{a/2},Z_{a/2}\right]=[-1.96,1.96]
$$

$$
Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}=\frac{8.31-8.3}{\frac{0.02}{\sqrt{7}}}=1.323
$$

حال از آنجا که مقدار Z در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد پس فرض صفر ($H_0: m=8.3$) را می پذیریم.

د) از آنجا که نیاز به کشف غلط بودن فرض صفر می باشد نیاز به محاسبه احتمال $1-b$ (رد فرض صفر به شرط غلط بودن آن) می باشد. لذا خواهیم داشت:

$$
1-b=1-P\left(\frac{\left|\overline{X}-8.3\right|}{\frac{0.02}{\sqrt{7}}}\le 1.96 \mid m=8.32\right)=1-P\left(-1.96-\frac{8.32-8.3}{\frac{0.02}{\sqrt{7}}}\le Z\le 1.96-\frac{8.32-8.3}{\frac{0.02}{\sqrt{7}}}\right)
$$

$$
=1-P(-4.6\le Z\le -0.68)=1-\left[\left(1-P(Z\ge 4.6)\right)-\left(1-P(Z\ge 0.68)\right)\right]=0.7517
$$

توجه داشته باشید در سئوال فوق احتمال پی بردن $1-a$ و احتمال کشف کردن $1-b$ لحاظ شده است. و این قانون در کلیه سئوالات این کتاب مورد توجه می باشد.

4- به منظور شروع انفجار مواد منفجره از چاشنی استفاده می شود. تراکم چاشنی بر این قدرت شروع موثر است. برای تعیین اینکه آیا بسته ای این چاشنی قابل قبول است یا نه به شیوه ای نیاز است. بر اساس تجارب قبلی، انحراف معیار مساوی 0/03 است و میانگین تراکم تحت شرایط عادی معادل 1/54 است. برای حصول اطمینان از این امر که بسته های مطلوب چاشنی تقریبا همواره پذیرفته ، و بسته های نا مطلوب نیز تقریبا همواره رد خواهند شد، تصمیم گرفته شد که ضوابط زیر رعایت شود: 1) اگر میانگین واقعی تراکم معادل

مقدار متداول، یعنی 1/54 باشد، احتمال پذیرش باید 0/95 شود. 2) اگر میانگین تراکم 1/50 باشد، احتمال رد باید 90% شود. الف) اندازه مورد نیاز نمونه را تعیین و آن شیوه تصمیم گیری را که دارای مخاطرات فوق است ارائه کنید. ب) اگر میانگین واقعی تراکم 1/52 باشد، احتمال پذیرش محموله چقدر است؟ ج) اگر $\overline{X}=1.53$ شود، آیا بسته را می پذیرید؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$1-\alpha=0.95\Rightarrow\alpha=0.05$$
$$1-\beta=0.9\Rightarrow\beta=0.1$$
$$X\sim N\left(\mu,(0.03)^2\right)$$
$$\begin{cases}H_0:\mu\ge 1.54\\ H_1:\mu<1.54\end{cases}$$

الف) با توجه به یکطرفه بودن آزمون فرض داریم:

$$n=\frac{(Z_\alpha+Z_\beta)^2\sigma^2}{(\mu_1-\mu_0)^2}=\frac{(Z_{0.05}+Z_{0.1})^2(0.03)^2}{(0.04)^2}=5$$

از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد با تشکیل ناحیه پذیرش $A=[-Z_\alpha,+\infty)=[-Z_{0.05},+\infty)$ و محاسبه مقدار آماره آزمون $Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$، چنانچه مقدار آماره آزمون در داخل ناحیه پذیرش قرار داشته باشد فرض را پذیرفته و در غیر اینصورت فرض صفر را رد می کنیم.

ب) از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A=[-Z_\alpha,+\infty)=[-Z_{0.05},+\infty)=[-1.645,+\infty)$$

احتمال پذیرش محموله اگر میانگین واقعی تراکم 1/52 باشد، برابر با احتمال β که همان پذیرش فرض صفر درحالی که این فرض غلط می باشد است. بنابراین داریم:

$$\beta=P\left(\frac{\overline{X}-1.54}{\frac{0.03}{\sqrt{5}}}\ge -1.645\mid \mu=1.52\right)=P\left(Z\ge -1.645-\frac{1.52-1.54}{\frac{0.03}{\sqrt{5}}}\right)=P(Z\ge -0.15)$$
$$=1-P(Z\ge 0.15)=1-0.440=0.560$$

توجه داشته باشید در سئوال فوق احتمال پی بردن $1-\alpha$ و احتمال کشف کردن $1-\beta$ لحاظ شده است..

ج) از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد و با توجه به ناحیه پذیرش زیر خواهیم داشت:

$$A=[-Z_\alpha,+\infty)=[-Z_{0.05},+\infty)=[-1.645,+\infty)$$
$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{1.53-1.54}{\frac{0.03}{\sqrt{5}}}=-0.745$$

حال از آنجا که مقدار Z در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد پس فرض صفر ($H_0:\mu\ge 1.54$) را می پذیریم.

5- یک سازنده کفش مدعی است که می تواند برای مصرف ارتش پوتینهایی بسازد که از پوتینهایی که ارتش می خرد پر دوامتر باشد و قیمتی در سطح معادل آنچه که ارتش می پردازد داشته باشد. سوابق ارتش نشان می

دهد که میانگین عمر پوتینهای سپاهیان مساوی 12 ماه و انحراف معیار آن نیز معادل 2 ماه است. ارتش روابط بدی با فروشنده فعلی داشته است و از هر تغییری استقبال خواهد کرد. بمنظور آزمودن ادعای سازنده ارتش 64 جفت پوتین را به طور تصادفی در میان سپاهین توزیع می کند. میانگین (نمونه) مدتی که طول می کشد تا 64 جفت پوتین غیر قابل استفاده شود 12/5 ماه است. به ازای سطح معنا دار بودن 0/05، آیا ارتش باید ادعای تولید کننده جدید را بپذیرد؟ درصورتی که میانگین واقعی عمر $11\frac{3}{8}$ ماه باشد، احتمال پذیرش این فرض چقدر است؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$X \sim N(12,2^2)$$
$$\overline{X} = 12.5$$
$$n = 64$$
$$a = 0.05$$
$$\begin{cases} H_0 : m \geq 12 \\ H_1 : m < 12 \end{cases}$$

از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A = [-Z_a, +\infty) = [-1.645, +\infty)$$
$$Z = \frac{\overline{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{12.5 - 12}{\frac{2}{\sqrt{64}}} = 2$$

حال از آنجا که مقدار Z در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد ادعای سازنده پوتین پذیرفته می شود. پس فرض صفر ($H_0 : m \geq 12$) را می پذیریم.

از آنجا که میانگین واقعی عمر $11\frac{3}{8}$ ماه می باشد و این کمتر از فرض صفر می باشد لذا احتمال پذیرش آن برابر با احتمال b (فرض صفر را بپذیریم بشرط غلط بودن فرض صفر) می باشد. لذا خواهیم داشت:

$$b = P\left(\frac{\overline{X} - 12}{\frac{2}{\sqrt{64}}} \geq -1.645 \mid m = 11.375 \right) = P\left(Z \geq -1.645 - \frac{11.375 - 12}{\frac{2}{\sqrt{64}}} \right) = P(Z \geq 0.855) = 0.1963$$

6- یک نوع موشک به مدت دو سال در انبار نگهداری شده است. دو سال قبل به هنگام پذیرش این موشکها، میانگین برد معادل 2500 یارد و انحراف معیار آن 150 یارد بوده است. در حال حاضر باید در مورد حفظ و یا عدم حفظ دسته موشکها تصمیمی اتخاذ شود. اگر میانگین برد به میزان 150 یارد کاهش یافته باشد، چنین کاهشی باید با احتمال 0/90 کشف شود. به منظور اجرای آزمونی با سطح معنا دار بودن 0/05 به چند مشاهده نیاز است؟ اگر میانگین نمونه 2401 یارد باشد، آیا نباید موشکها حفظ شوند؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$X \sim N\left(2500,(150)^2\right)$$
$$a = 0.05$$
$$1-b = 0.9 \Rightarrow b = 0.1$$
$$\begin{cases} H_0 : m \geq 2500 \\ H_1 : m < 2500 \end{cases}$$

با توجه به یک طرفه بودن آزمون فرض داریم:

$$n = \frac{\left(Z_a + Z_b\right)^2 s^2}{\left(m_1 - m_0\right)^2} = \frac{\left(Z_{0.05} + Z_{0.1}\right)^2 (150)^2}{(150)^2} = 9$$

از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A = \left[-Z_a, +\infty\right) = \left[-1.645, +\infty\right)$$
$$Z = \frac{\overline{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{2401 - 2500}{\frac{150}{\sqrt{9}}} = -1.98$$

حال از آنجا که مقدار Z در داخل ناحیه پذیرش قرار نداردموشکها نباید حفظ شوند. پس فرض صفر ($H_0 : m \geq 2500$) را رد می کنیم.

7- میانگین برشی نوعی نقطه جوش، 400psi و انحراف معیار آن 20psi است. ماده ای مورد بررسی قرار گرفته است که گفته می شود با استفاده از آن میانگین مقاومت برشی افزایش می یابد. به منظور حصول اطمینان از خواص ماده جدید، قرار است آزمایشی انجام گیرد. اگر میانگین مقاومت برشی تا میزان 25psi افزایش یابد، چنین تغییری باید با احتمال 0/98 کشف شود. به عدم ایجاد تغییر باید با احتمال 0/95 پی برده شود. الف) چند مشاهده مورد نیاز است؟ ب) اگر میانگین نمونه مساوی 460psi شود، آیا باید نتیجه گرفت که میانگین مقاومت برشی افزایش یافته است؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$X \sim N\left(400,(20)^2\right)$$
$$1-a = 0.95 \Rightarrow a = 0.05$$
$$1-b = 0.98 \Rightarrow b = 0.02$$
$$\begin{cases} H_0 : m \geq 400 \\ H_1 : m < 400 \end{cases}$$

الف) با توجه به یک طرفه بودن آزمون فرض داریم:

$$n = \frac{\left(Z_a + Z_b\right)^2 s^2}{\left(m_1 - m_0\right)^2} = \frac{\left(Z_{0.05} + Z_{0.02}\right)^2 (20)^2}{(25)^2} = 9$$

ب) از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A = \left[-Z_a, +\infty\right) = \left[-1.645, +\infty\right)$$
$$Z = \frac{\overline{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{460 - 400}{\frac{20}{\sqrt{9}}} = 9$$

حال از آنجا که مقدار Z در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد لذا می توان نتیجه گرفت میانگین مقاومت برشی افزایش یافته است . پس فرض صفر ($H_0 : m \geq 400$) را می پذیریم.

8- در مسئله1، اگر میانگین مقاومت پارگی پارچه یک عدل، معادل 170psi باشد، نمونه به چه اندازه مورد نیاز است تا احتمال کشف آن دست کم 0/99 باشد؟ اگر $\overline{X}$ معادل 177psi و اندازه نمونه برابر با اندازه بالا باشد، آیا عدل پذیرفته می شود؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات سئوال 1 و این سئوال خواهیم داشت:

$$X \sim N(m,16)$$
$$a = 0.05$$
$$1-b = 0.99 \Rightarrow b = 0.01$$
$$\begin{cases} H_0 : m \geq 180 \\ H_1 : m < 180 \end{cases}$$

با توجه به یک طرفه بودن آزمون فرض داریم:

$$n = \frac{(Z_a + Z_b)^2 s^2}{(m_1 - m_0)^2} = \frac{(Z_{0.05} + Z_{0.01})^2 16}{(10)^2} = 3$$

ب) از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A = [-Z_a, +\infty) = [-1.645, +\infty)$$
$$Z = \frac{\overline{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{177-180}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = -1.299$$

حال از آنجا که مقدار Z در داخل ناحیه پذیرش قرار عدل پارچه پذیرفته می شود. پس فرض صفر $(H_0 : m \geq 180)$ را می پذیریم.

9- در مسئله 2، فرض کنید که اندازه نمونه 10 مورد استفاده قرار گیرد، اگر $m = 65.8$ درجه باشد، احتمال پذیرش فرض 64/3 بودن سختی چقدر است؟ اگر میانگین واقعی سختی 65 درجه باشد، احتمال پذیرش این فرض چقدر می شود؟ به منظور یافتن جواب از روش تحلیلی استفاده کنید.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله 2 و این مسئله خواهیم داشت:

$$X \sim N(m,4)$$
$$1-a = 0.95 \Rightarrow a = 0.05$$
$$n = 10$$
$$\begin{cases} H_0 : m = 64.3 \\ H_1 : m \neq 64.3 \end{cases}$$

جهت محاسبه احتمال این که میانگین سختی لاستیک 64/3 اندازه گیری شود، می بایستی احتمال وقوع خطای نوع دوم یعنی b را که عبارتست از پذیرش فرض صفر در حالتی که این فرض غلط است را محاسبه نماییم چرا که در اینجا لاستیکی مورد پذیرش قرار گرفته که میانگین سختی آن 65/8 است نه 64/3 ، بنابراین داریم:

$$b = P\left(-1.96 \le \frac{\overline{X}-64.3}{\frac{2}{\sqrt{15}}} \le 1.96 \mid m = 65.8\right) = P\left(-1.96 - \frac{65.8-64.3}{\frac{2}{\sqrt{15}}} \le Z \le 1.96 - \frac{65.8-64.3}{\frac{2}{\sqrt{15}}}\right)$$
$$= P(-4.33 \le Z \le -0.41) = P(Z \ge -4.33) - P(Z \ge -0.41) = [1 - P(Z \ge 4.33)] - [1 - P(Z \ge 0.41)]$$
$$= 0.3409$$

حال اگر میانگین واقعی 65 درجه باشد داریم:

$$b = P\left(-1.96 \le \frac{\overline{X}-64.3}{\frac{2}{\sqrt{15}}} \le 1.96 \mid m = 65\right) = P\left(-1.96 - \frac{65-64.3}{\frac{2}{\sqrt{15}}} \le Z \le 1.96 - \frac{65-64.3}{\frac{2}{\sqrt{15}}}\right)$$
$$= P(-3.316 \le Z \le 0.604) = P(Z \ge -3.316) - P(Z \ge 0.604) = [1 - P(Z \ge 3.316)] - P(Z \ge 0.604)$$
$$= 0.7286$$

10- در مسئله 5، اگر میانگین عمر، m، واقعا 11/5 ماه باشد، برای کشف آن، یعنی رد کردن فرض $m \ge 12$ با احتمال 95 درصد، نمونه ای با چه اندازه مورد نیاز است؟ اگر این نمونه به نتیجه $\overline{X} = 11.5$ ماه بینجامد، آیا این فرض را می پذیرید؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله5 و این مسئله خواهیم داشت:

$$X \sim N(12, 2^2)$$
$$\overline{X} = 12.5$$
$$a = 0.05$$
$$1 - b = 0.95 \Rightarrow b = 0.05$$
$$\begin{cases} H_0 : m \ge 12 \\ H_1 : m < 12 \end{cases}$$

با توجه به یک طرفه بودن آزمون فرض داریم:

$$n = \frac{(Z_a + Z_b)^2 s^2}{(m_1 - m_0)^2} = \frac{(Z_{0.05} + Z_{0.05})^2 4}{(0.5)^2} = 174$$

از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A = [-Z_a, +\infty) = [-1.645, +\infty)$$
$$Z = \frac{\overline{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{11.5 - 12}{\frac{2}{\sqrt{174}}} = -3.30$$

حال از آنجا که مقدار Z در داخل ناحیه پذیرش قرار ندارد فرض صفر $(H_0 : m \ge 12)$ را نمی پذیریم.

11- در مورد کیفیت زغال سرند شده استاندارد شماره 5، شکایاتی به سرپرست واحد تولید زغال رسیده است. چنین ابراز شده که ممکن است عامل تخلخل، X ، که برحسب تفاوتهای وزن زغال خشک و خیس خورده سنجیده می شود. موجب این شکایت شده باشد. محموله ها به صرف عنوان کردن ادعاهای فروشنده مبنی

بر 2 پوند بودن میانگین عامل تخلخل خریداری شده اند. از دیدگاه تولید کننده، هم مقادیر بزرگ برای میانگین عامل تخلخل نامطلوب است. بر اساس تجربه قبلی معلوم است که X انحراف معیار $\frac{1}{2}$ پوند دارد. به ازای مقدار 5% برای سطح معنادار بودن، فرض تطبیق محموله ها با ادعای فوق را آزمایش کنید. داده ها به شرح زیرند:

2/16	2/17	2/34	1/98	1/97	1/89	2/19	2/23	2/15	2/47
2/31	1/94	2/31	1/86	2/25	2/14	2/15	2/16	2/30	2/48
2/11	2/15	2/24	2/14	2/25	1/90	2/04	2/09	2/08	2/25

اگر میانگین واقعی به بزرگی 2/10 پوند یا به کوچکی 1/90 باشد، آیا انتخاب یک نمونه 30 تایی ضامن مناسبی بر عدم پذیرش فرض است؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$X \sim N\left(m,\frac{1}{4}\right)$$

$$a = 0.05$$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{30} X_i}{30} = \frac{64.62}{30} = 2.154$$

$$\begin{cases} H_0 : m = 2 \\ H_1 : m \neq 2 \end{cases}$$

از آنجا که آزمون فرض دو طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A = \left[-Z_{a/2}, Z_{a/2}\right] = [-1.96,1.96]$$

$$Z = \frac{\overline{X}-m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{2.154-2}{\frac{0.5}{\sqrt{30}}} = 1.687$$

حال از آنجا که مقدار Z در داخل ناحیه پذیرش قرار دارد فرض تطبیق محموله با ادعای مذکور صحیح می باشد. پس فرض صفر ($H_0 : m = 2$) را می پذیریم.

برای پاسخ به این سئوال می بایست احتمال b را که عبارتست از پذیرش فرض صفر در حالی که این فرض غلط است، محاسبه نماییم. بنابراین خواهیم داشت: با توجه به دوطرفه بودن آزمون فرض داریم:

$$b = P\left(-1.96 \le \frac{\overline{X}-2}{\frac{0.5}{\sqrt{30}}} \le 1.96 \mid m = 2.10\right) = P\left(-1.96 - \frac{2.10-2}{\frac{0.5}{\sqrt{30}}} \le Z \le 1.96 - \frac{2.10-2}{\frac{0.5}{\sqrt{30}}}\right)$$

$$= P(-3.055 \le Z \le 0.865.) = P(Z \ge -3.055) - P(Z \ge 0.865) = [1-P(Z \ge 3.055)] - P(Z \ge 0.865)$$

$$= 0.806$$

حال از آنجا که احتمال رد فرض صفر در شرایطی که فرض صفر غلط است یعنی $1-b$ برابر با 0/193 می باشد و این مقدار بسیار ناچیز است بنابراین این تعداد نمونه کفایت نمی کند.

12- در مسئله 11 فرض کنید که هرگاه میانگین واقعی 2/10 پوند باشد، تمایلی مبنی بر اعلام 2/00 پوند بودن میانگین عامل تخلخل، حداکثر، با احتمال 0/20 وجود دارد، اگر قرار باشدآزمایش با سطح معنا دار بودن 5% اجرا شود، نمونه با چه اندازه موزد نیاز است؟ مسئله را هم از طریق شکل و هم از طریق تحلیلی حل کنید.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله 11 و همچنین این مسئله خواهیم داشت:

$$X \sim N\left(m, \frac{1}{4}\right)$$
$$a = 0.05$$
$$\overline{X} = 2.10$$
$$\begin{cases} H_0 : m = 2 \\ H_1 : m \neq 2 \end{cases}$$

و از آنجا که احتمال b یعنی قبول فرض صفر در حالی که فرض صفر غلط است برابر با 0/20 است ("هرگاه میانگین واقعی 2/10 پوند باشد، تمایلی مبنی بر اعلام 2/00 پوند بودن میانگین عامل تخلخل، حداکثر، با احتمال 0/20 وجود دارد ") داریم:

راه حل تحلیلی:

$$b = P\left(-1.96 \leq \frac{\overline{X}-2}{\frac{0.5}{\sqrt{n}}} \leq 1.96 \mid m = 2.10\right) = 0.2 \Rightarrow P\left(-1.96 - \frac{2.10-2}{\frac{0.5}{\sqrt{n}}} \leq Z \leq 1.96 - \frac{2.10-2}{\frac{0.5}{\sqrt{n}}}\right) = 0.2$$
$$\Rightarrow P\left(-1.96 - 0.2\sqrt{n} \leq Z \leq 1.96 - 0.2\sqrt{n}\right) = 0.2$$

با توجه به حل مسئله 11 خواهیم دید کهn=30 بدست می آید و با توجه به حل همین سئوال این تعداد نمونه بدلیل بالا بودن احتمال b مردود می باشد لذا خواهیم داشت:

$$b = P\left(-1.96 \leq \frac{\overline{X}-2}{\frac{0.5}{\sqrt{n}}} \leq 1.96 \mid m = 2.10\right) = 0.2 \Rightarrow P\left(-1.96 - \frac{2.10-2}{\frac{0.5}{\sqrt{n}}} \leq Z \leq 1.96 - \frac{2.10-2}{\frac{0.5}{\sqrt{n}}}\right) = 0.2$$
$$\Rightarrow P\left(-1.96 - 0.2\sqrt{n} \leq Z \leq 1.96 - 0.2\sqrt{n}\right) = 0.2 \Rightarrow P\left(Z \leq 1.96 - 0.2\sqrt{n}\right) = 0.2$$
$$\Rightarrow P\left(Z \geq 0.2\sqrt{n} - 1.96\right) = 0.2 \Rightarrow 0.2\sqrt{n} - 1.96 = Z_{0.2} \Rightarrow 0.2\sqrt{n} - 1.96 = 2.05 \Rightarrow n \approx 403$$

راه حل از طریق شکل:

با مراجعه به شکل 4/6 صفحه 225 کتاب و اعمال نقطه $b(0.2) = 0.20$ مقدار 100 برای تعداد نمونه بدست خواهد آمد.

در حل سئوال فوق توجه به دو نکته الزامی است، ابتدا آنکه عبارت $P\left(-1.96 - 0.2\sqrt{n} \leq Z \leq 1.96 - 0.2\sqrt{n}\right)$ بدلیل ناچیز بودن مقدار $P\left(-1.96 - 0.2\sqrt{n} \leq Z\right)$ به $P\left(Z \leq 1.96 - 0.2\sqrt{n}\right)$ تبدیل گردید. از طرفی دیگر در حل با استفاده از شکا توجه داشته باشید $d = \frac{2.1-2}{0.5} = 0.2$

13- صاحب شعب متعدد یک رستوران زنجیره ای بشکه های 30گالنی نوشابه را در مجموعه های بزرگ (هر دفعه صدها بشکه) می خرد. این نوشابه، در لیوان به قسمت 0/25 واحد پول به مشتری فروخته می شود. صاحب

رستوران قصد بررسی این مسئله را دارد که آیا میانگین تعداد گالنهای بشکه ها به اندازه کافی است یا نه. فرض کنید که فرآِند پر کردن بشکه ها چنان است که در قالب آن تعداد گالنهای یک بشکه متغییری تصادفی با انحراف معیار $\frac{2}{3}$ گالن است. اگر میانگین به کوچکی 29 گالن باشد، صاحب رستوران مایل خواهد بود که با احتمال بیش از 90 درصد مجموعه بشکه هارا رد کند. اگر میانگین با مقدار مقرر (30 گالن) مساوی باشد میل او بر این خواهد بود که با احتمال بیش از 0/99 مجموعه را بپذیرد. الف) چند بشکه باید برای نمونه گیری آماده شود؟ ب) اگر $\overline{X}$ معادل 28/5 گالن باشد، آیا باید مجموعه را پذیرفت؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$X \sim N\left(m, \frac{4}{9}\right)$$
$$1-b = 0.9 \Rightarrow b = 0.1$$
$$1-a = 0.99 \Rightarrow a = 0.01$$
$$\begin{cases} H_0 : m \geq 30 \\ H_1 : m < 30 \end{cases}$$

توجه داشته باشید که احتمال کشف کردن همان $1-b$ می باشد که در جمله " اگر میانگین به کوچکی 29 گالن باشد، صاحب رستوران مایل خواهد بود که با احتمال بیش از 90 درصد مجموعه بشکه هارا رد کند" مستتر می باشد چرا که در این جمله رد فرض صفر به شرط غلط بودن آن مطرح می شود. از سویی دیگر احتمال پذیرفتن فرض صفر در حالی که درست است همان پی بردن و $1-a$ می باشد که در جمله " اگر میانگین با مقدار مقرر (30 گالن) مساوی باشد میل او بر این خواهد بود که با احتمال بیش از 0/99 مجموعه را بپذیرد" مستتر است.

الف) با توجه به یک طرفه بودن آزمون فرض داریم:

$$n = \frac{(Z_a + Z_b)^2 s^2}{(m_1 - m_0)^2} = \frac{(Z_{0.01} + Z_{0.1})^2 \left(\frac{4}{9}\right)}{(1)^2} = 6$$

ب) از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A = [-Z_a, +\infty) = [-2.33, +\infty)$$
$$Z = \frac{\overline{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{28.5 - 30}{\left(\frac{2}{3}\right)} * \sqrt{6} = -5.51$$

حال از آنجا که مقدار Z در داخل ناحیه پذیرش قرار ندارد رستوران مجموعه پذیرفته نمی شود. پس فرض صفر $(H_0 : m \geq 30)$ را رد می کنیم.

14- براساس فرآیندی ورقهای اسفنج تولید می شود. نرمی اسفنج متغییری تصادفی است که می توان فرض کرد میانگین 73 و انحراف معیار معلوم و مساوی با 2 دارد. یک مهندس شیمی ادعا می کند فرمولی برتر از آنچه قبلا مورد استفاده قرار دارد بدست آورده است. اگر فرآیند جدید بتواند میانگین نرمی را به اندازه یک برابر انحراف معیار، s، افزایش دهد، مدیر کارخانه قصد تغییر به فرمول جدید را خواهد کرد و مایل به کشف تغییری به این میزان با احتمال 0/90 خواهد بود. اما اگر میانگین تاثیری نپذیرد، او تمایل خواهد داشت که با احتمال 0/95 فرآِند فعلی را حفظ کند. الف) فرض آماری و گزینه دوم را مشخص کنید. ب) آماره آزمون و

ناحیه پذیرش را تعیین کنید. ج) اندازه مورد نیاز نمونه برای تامین احتمالات مفروض خطای نوع I و II را مشخص کنید. د) اگر میانگین به اندازه 1/2 انحراف معیار انتقال یافته باشد، احتمال پذیرش فرض چقدر است؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$X \sim N(m,4)$$
$$1-b=0.9 \Rightarrow b=0.1$$
$$1-a=0.95 \Rightarrow a=0.05$$

الف)

$$\begin{cases} H_0: m \le 73 \\ H_1: m > 73 \end{cases}$$

ب) از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش و آماره آزمون، عبارت خواهد بود از:

$$A=(-\infty, Z_{0.05}]=(-\infty,1.645]$$
$$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}=\frac{\overline{X}-73}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$$

ج) با توجه به مفروضات ذکر شده در ابتدای حل سئوال احتمال ارتکاب خطای نوع I یعنی a برابر با0/05 و احتمال ارتکاب خطای نوع II یعنی b برابر با0/1 می باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$b=P\left(\frac{\overline{X}-73}{\frac{2}{\sqrt{n}}} \le 1.645 \mid m \ne 73\right)=0.1 \Rightarrow P\left(\frac{\overline{X}-73}{\frac{2}{\sqrt{n}}} \le 1.645 \mid m=73+s\right)=0.1$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{\overline{X}-73}{\frac{2}{\sqrt{n}}} \le 1.645 \mid m=73+2=75\right)=0.1 \Rightarrow P\left(Z \le 1.645-\frac{75-73}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)=0.1$$

$$\Rightarrow P\left(Z \ge \sqrt{n}-1.645\right)=0.1 \Rightarrow \sqrt{n}-1.645=Z_{0.1} \Rightarrow \sqrt{n}-1.645=1.28 \Rightarrow n \approx 9$$

د)

$$b=P\left(\frac{\overline{X}-73}{\frac{2}{\sqrt{9}}} \le 1.645 \mid m=73+1.2s\right)=P\left(\frac{\overline{X}-73}{\frac{2}{\sqrt{9}}} \le 1.645 \mid m=73+1.2(2)=75.4\right)$$

$$=P\left(Z \le 1.645-\frac{75.4-73}{\frac{2}{\sqrt{9}}}\right)=P(Z \le -1.95)=P(Z \ge 1.95)=0.0256$$

15- یک سازنده لامپهای رشته ای موفق به ابداع فرآِند تولید جدیدی شده که امیدوار است میانگین کارائی محصولش را نسبت به میانگین 9/5 فعلی افزایش دهد. نتایج تجربه ای که با 10 لامپ اجرا شده بشرح زیر است:

9/271	12/045
9/971	13/024
10/250	9/871
11/461	11/578
11/515	10/851

$$\sum X^2 = 1218.451898$$

آیا سازنده باید معتقد شود که کارایی افزایش یافته است؟ از سطح معنا دار بودن 5% استفاده کنید. اگر کارایی معادل 11 باشد، احتمال اظهار این مطلب که کارایی افزایش نیافته، چقدر است؟ (بمنظور استفاده از منحنی های OC از S بعنوان مقدار برآورد شده s استفاده کنید.)

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$n = 10$$
$$a = 0.05$$
$$\sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 1218.451898$$
$$\begin{cases} H_0 : m \le 9.5 \\ H_1 : m > 9.5 \end{cases}$$
$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10} = \frac{109.844}{10} = 10.9844$$
$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{9} = \frac{\sum_{i=1}^{10}\left((12.045-10.9844)^2 + (12.271-10.9844)^2 + \ldots + (11.515-10.9844)^2\right)}{9}$$
$$\Rightarrow S^2 = 2.230 \Rightarrow S = 1.1490$$

از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A = \left(-\infty, t_{0.05;9}\right] = \left(-\infty, 1.833\right] =$$
$$t = \frac{\overline{X} - m}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{10.9844 - 9.5}{\frac{1.1490}{\sqrt{10}}} = 4.0854$$

حال از آنجا که مقدار Z در داخل ناحیه پذیرش قرار نمی گیرد فرض صفر $(H_0 : m \le 9.5)$ را نمی پذیریم. یعنی کارایی افزایش نیافته است.

با در نظر گرفتن مطالب ارائه شده در سئوالات قبلی و عبارت " اگر کارایی معادل 11 باشد، احتمال اظهار این مطلب که کارایی افزایش نیافته، چقدر است" در می یابیم باید احتمال پذیرفتن فرض صفر را در حالتی که این فرض غلط است یعنی احتمال b را محاسبه نماییم، بنابراین داریم:

$$b = P\left(\frac{\overline{X}-9.5}{\frac{1.1490}{\sqrt{10}}} \le t_{0.05;9} \mid m=11\right) = P\left(\frac{\overline{X}-9.5}{\frac{1.1490}{\sqrt{10}}} \le 1.833 \mid m=11\right) = P\left(t_9 \le 1.833 - \frac{11-9.5}{\frac{1.1490}{\sqrt{10}}}\right)$$
$$= P(t_9 \le -2.295) = P(t_9 \ge 2.295) = 0.024$$

16- یک تولید کننده پارچه مدعی است که میانگین مقاومت پارگی تارهای محصولش 90 پوند یا بیشتر است. شرکتی که برایش کار می کنید مایل به خریداری کردن این پارچه است، اما تصمیم می گیرد ابتدا به ازای سطح معنا دار بودن 5%، این ادعا را مورد آزمایش قرار دهد. اگر آزمایش به پذیرش ادعا بینجامد، شرکت این کالا را خواهد خرید. جبهه گیری در مورد آن مقادیر میانگین مقاومت پارگی تار، که کمی از 90 پوند کمتر است، مهم تلقی نمی شود، ولی مقادیر خیلی کمتر از 90 پوند، بحرانی بشمار می آیند. بر اساس تجربه قبلی در مورد این کالا، معلوم است که انحراف معیار مقاومت پارگی تارها تقریبا 12 پند است (s مجهول است). الف) انجام آزمایش ناظر به گرفتن یک نمونه متشکل از 25 قطعه پارچه است. روش اجرای آزمون را مشخص کنید. ب) اگر میانگین واقعی مقاومت پارگی معادل 86 پوند باشد، توصیه خرید کالا به شرکت در چارچوب آزمون بند الف چه مخاطره ای را در بر دارد؟ ج) اگر میانگین واقعی مقاومت پارگی 90 پوند باشد، مخاطره رد کردن این ادعا چقدر می شود؟ د) آزمایش را طبق طرح بند الف انجام می دهید و در می یابید که میانگین مقاومت نمونه پارچه مورد آزمایش 85 پوند است. آیا خریدن پارچه را به شرکت توصیه می کنید یا نه؟ $S=12.5$ است.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$a = 0.05$$
$$S = 12$$
$$\begin{cases} H_0 : m \ge 90 \\ H_1 : m < 90 \end{cases}$$

الف)ابتدا ناحیه پذیرش را محاسبه می کنیم و سپس پس از گرفتن نمونه 25 تایی، میانگین آنرا محاسبه نموده و در آماره آزمون در جای $\overline{X}$ قرار می دهیم و سپس مقدار بدست آمده را با ناحیه پذیرش مقایسه می کنیم، چنانچه در داخل حدود بود فرض صفر را پذیرفته و در غیر اینصورت آنرا رد می کنیم.

ناحیه پذیرش و آماره آزمون:

$$A = [-t_{0.05;24}, +\infty) = [-1.711, +\infty)$$
$$t = \frac{\overline{X}-m}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}-90}{\frac{12}{\sqrt{25}}}$$

ب)

$$b(86) = P\left(\frac{\overline{X}-90}{\frac{12}{\sqrt{25}}} \ge -1.711 \mid m=86\right) = P\left(t_{24} \ge -1.711 - \frac{86-90}{\frac{12}{\sqrt{25}}}\right) = P(t_{24} \ge -0.044)$$
$$= 1 - P(t_{24} \ge 0.044) = 0.65$$

با توجه به احتمال بدست آمده احتمال پذیرش فرض صفر در حالی که فرض مذکور غلط است 0/65 می باشد که مقدار بالایی می باشد و این باعث زیان است.

ج) در این بند می بایست احتمال a یعنی احتمال رد فرض صفر درحالی که این فرض درست است محاسبه گردد، توجه داشته باشید این امر در جمله " اگر میانگین واقعی مقاومت پارگی 90 پوند باشد، مخاطره رد کردن این ادعا" مستتر است که با توجه به مفروضات مسئله $a = 0.05$ می باشد.

د) با توجه به بند الف داریم:

$$A = [-t_{0.05;24}, +\infty) = [-1.711, +\infty)$$

$$t = \frac{\overline{X} - m}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{85-90}{\frac{12.5}{\sqrt{25}}} = -2$$

حال از آنجا که مقدار t در داخل ناحیه پذیرش قرار ندارد فرض صفر $(H_0 : m \geq 90)$ را نمی پذیریم. بنابراین خرید پارچه را به شرکت توصیه نمی کنیم.

17- تصور کنید قصد بررسی این فرض در میان باشد که نقطه ذوب یک آلیاژ 1200 درجه سانتیگراد است. اگر نقطه ذوب بیش از 20 درجه تفاوت داشته باشد، تمایل به تغییر ترکیب آلیاژ وجود خواهد داشت. فرض کنید که $a = 0.01$، $b = 0.10$ و a تقریبا 15 درجه است. به چند مشاهده نیاز داریم؟ ضابطه ناظر بر رد فرض چه خواهد بود؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$a = 0.01$$
$$b(25) = 0.1$$
$$S = 15$$
$$\begin{cases} H_0 : m = 1200 \\ H_1 : m \neq 1200 \end{cases}$$
$$b(d) = 0.1 \Rightarrow b\left(\frac{m_1 - m_0}{S}\right) = 0.1 \Rightarrow b\left(\frac{20}{15}\right) = 0.1 \Rightarrow b(1.33) = 0.1$$

با مراجعه به شکل 11,6 صفحه 240 و داشتن نقطه $b(1.33) = 0.1$ مقدار تقریبی 15 برای تعداد نمونه های مورد نیاز بدست خواهد آمد.

از آنجا که آزمون فرض دو طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A = [-t_{0.005;14}, t_{0.005;14}] = [-2.977, 2.977]$$

$$t = \frac{\overline{X} - m}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X} - 1200}{\frac{S}{\sqrt{15}}}$$

حال از آنجا که مقدار Z در داخل ناحیه پذیرش قرار گیرد فرض صفر $(H_0 : m = 1200)$ را می پذیریم. و در غیر اینصورت فرض صفر را رد می کینم.

18- برای ساخت میله های استوانه ای با سطح مقطع مدور دستگاه تراش چنان تنظیم می شود که مینگین قطر 5/01 سانتیمتر باشد. حصول اطمینان از تنظیم صحیح دستگاه ضروری تشخیص داده شده است. یک نمونه ده تایی گرفته ایم و نتایج بشرح زیر است:

5/031	**5/036**
5/064	**5/085**
4/942	**4/991**
5/051	**4/935**
5/011	**4/999**

$$\sum X^2 = 251.473971$$

الف) به ازای مقدار 5% برای سطح معنا دار بودن فرض صحت تنظیم دستگاه را آزمایش کنید.

ب) اگر تنظیم دستگاه به مقدار 0/05 سانتیمتر از مقدار مورد نظر انحراف داشته باشد، احتمال تقریبی پی بردن به آن چقدر است؟ (از مقدار به دست آمده برای S در بند الف به عنوان مقدار برآورد شده s استفاده کنید)

ج) به منظور تضمین (با احتمال 0/95) اینکه یک انحراف 0/05 سانتیمتری در تنظیم دستگاه قابل کشف باشد به چند مشاهده نیاز است؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$n = 10$$

$$a = 0.05$$

$$\sum_{i=1}^{10} X_i^{\,2} = 251.473971$$

$$\begin{cases} H_0 : m = 5.01 \\ H_1 : m \neq 5.01 \end{cases}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10} = \frac{50.145}{10} = 5.0145$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{9} = \frac{\sum_{i=1}^{10}\left((5.036-5.0145)^2 + (5.085-5.0145)^2 + \ldots + (5.011-5.0145)^2\right)}{9}$$

$$\Rightarrow S^2 = 0.0024 \Rightarrow S = 0.0493$$

الف) از آنجا که آزمون فرض دو طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A = \left[-t_{0.025;9}, t_{0.025;9}\right] = \left[-2.262, 2.262\right]$$

$$t = \frac{\overline{X} - m}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{5.0145 - 5.01}{\frac{0.0493}{\sqrt{10}}} = 0.289$$

حال از آنجا که مقدار Z در داخل ناحیه پذیرش قرار گیرد فرض صفر $(H_0 : m = 5.01)$ را می پذیریم. یعنی دستگاه تنظیم است.

ب) با توجه به مفروضات ذکر شده مقدار احتمال $1-b$ یعنی رد فرض صفر درحالی که غلط است مدنظر می باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$d = \frac{0.05}{0.0493} = 1.014$$

با مراجعه به شکل 10,6 صفحه 240 و دانستن n=10 و d=1/014 مقدار تقریبی 0/2 برای b بدست خواهد آمد، در نتیجه برای احتمال $1-b$ مقدار 0/8 را خواهیم داشت. بنابراین اگر تنظیم دستگاه به مقدار 0/05 سانتیمتر از مقدار مورد نظر انحراف داشته باشد با احتمال 0/8 به آن پی خواهیم برد.

ج) با مراجعه به شکل 10,6 صفحه 240 و داشتن نقطه $b(1.014)=0.05$ مقدار تقریبی20 برای تعداد نمونه های مورد نیاز بدست خواهد آمد.

19- قصد بررسی این مطلب را داریم که آیا طرز عمل خاصی می تواند بر میانگین مقاومت بتن، که می دانیم 3000psi است، تاثیری داشته باشد یا نه. قرار است با استفاده از یک انباشته از مواد خام بدست آمده با استفاده از طرز عمل جدید، تجربه محدودی انجام شود. شیوه چنان است که اگر بتن دارای همان مقاومت برشی بتن قدیمی باشد، احتمال رسیدن به این نتیجه 0/99 خواهد بود. به علاوه، اگر میانگین مقاومت به میزان 250psi تغییر یابد شیوه باید با احتمال بیش از 0/75 به این نتیجه برسد. برآورد سرانگشتی انحراف معیار 200psi است. الف) اندازه مورد نیاز نمونه چقدر است؟ ب) فرض کنید $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=40103; \overline{X}=3393$ و n مقدار بدست آمده در بند الف باشد. آیا باید نتیجه گرفت که طرز عمل خاص تاثیری بر مقاومت ندارد؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$1-a=0.99 \Rightarrow a=0.01$$
$$1-b=0.75 \Rightarrow b=0.25$$
$$\begin{cases} H_0: m=3000 \\ H_1: m\neq 3000 \end{cases}$$

الف)

$$b(d)=1-0.75 \Rightarrow b\left(\frac{m_1-m_0}{S}\right)=0.25 \Rightarrow b\left(\frac{250}{200}\right)=0.25 \Rightarrow b(1.25)=0.25$$

با مراجعه به شکل 11,6 صفحه 240 و داشتن نقطه $b(1.25)=0.25$ مقدار تقریبی 10 برای تعداد نمونه های مورد نیاز بدست خواهد آمد.

ب) از آنجا که آزمون فرض دو طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A=\left[-t_{0.005;9}, t_{0.005;9}\right]=\left[-3.250, 3.250\right]$$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{10}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n-1}=\frac{40103}{9}=4455.889 \Rightarrow S=66.75$$

$$t=\frac{\overline{X}-m}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\frac{3393-3000}{\frac{66.75}{\sqrt{10}}}=18.62$$

حال از آنجا که مقدار Z در داخل ناحیه پذیرش قرار نمی گیرد فرض صفر $(H_0: m=3000)$ را نمی پذیریم. یعنی طرز عمل خاص بر مقاومت بتن تاثیر دارد.

20- در مسئله 15 چند مشاهده مورد نیاز است تا اگر میانگین کارایی به میزان یک لومن به ازای هر وات افزایش یافت با احتمال 0/90 کشف شود؟ برآوردی غیر دقیق از s برابر با $\frac{1}{2}$ لومن برای هر وات است. اگر $\overline{X}=11$ و $S=0.503$ و تعداد مشاهدات به شرح فوق باشد، آیا فرض پذیرفته خواهد شد؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$a=0.05$$
$$1-b=0.9 \Rightarrow b=0.1$$
$$S=0.5$$
$$\begin{cases} H_0: m \le 9.5 \\ H_1: m > 9.5 \end{cases}$$
$$b(d)=0.1 \Rightarrow b\left(\frac{m_1-m_0}{S}\right)=0.1 \Rightarrow b\left(\frac{1}{0.5}\right)=0.1 \Rightarrow b(2)=0.1$$

با مراجعه به شکل 12,6 صفحه 242 و داشتن نقطه $b(2)=0.1$ مقدار تقریبی 4 برای تعداد نمونه های مورد نیاز بدست خواهد آمد.

از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A=(-\infty, t_{0.05;2}]=(-\infty, 2.353]$$
$$t=\frac{\overline{X}-m}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\frac{11-9.5}{\frac{0.5}{\sqrt{4}}}=5.96$$

حال از آنجا که مقدار Z در داخل ناحیه پذیرش قرار نمی گیرد فرض صفر $(H_0: m \le 9.5)$ را نمی پذیریم.

21- یک شرکت پلاستیک سازی برای مصارف صنعتی ورقهای پلاستیکی عرضه می کند. نوع جدیدی از پلاستیک تولید شده و شرکت مایل به اظهار این ادعاست که میانگین مقاومت تنشی این کالای جدید دست کم 30psi است. در اینجا مقاومت تنشی، X، بر حسب پوند بر اینچ مربع که برای ایجاد ترک در ورق لازم است، سنجیده می شود. نمونه تصادفی زیر از خط تولید گرفته شده است.

30/1	**32/7**	**22/5**	**27/5**
27/7	**29/8**	**28/9**	**31/4**
31/2	**24/3**	**26/4**	**22/8**
29/1	**33/4**	**32/5**	**21/7**

$$\sum X^2=12984.54$$

براساس این نمونه و به ازای مقدار 5% برای سطح معنادار بودن ، آیا شرکت باید ادعای خود را مطرح کند؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله و همچنین مقادیر نمونه ها خواهیم داشت:

$$a = 0.05$$

$$\begin{cases} H_0 : m \geq 30 \\ H_0 : m < 30 \end{cases}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{16} X_i}{16} = \frac{452}{16} = 28.25$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{16}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{16}\left((27.5-28.25)^2 + (31.4-28.25)^2 + \ldots + (29.1-28.25)^2\right)}{15} = 14.369$$

$$\Rightarrow S = 3.79$$

از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A = \left[-t_{0.05;15}, +\infty\right) = \left[-1.753, +\infty\right)$$

$$t = \frac{\overline{X} - m}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{28.25-30}{\frac{3.79}{\sqrt{16}}} = -1.84$$

حال از آنجا که مقدار Z در داخل ناحیه پذیرش قرار نمی گیرد فرض صفر $(H_0 : m \geq 30)$ را نمی پذیریم. و ادعای شرکت بدون شک رد می گردد.

22-یک سازنده وسایل اندازه گیری مدعی است که انحراف معیار سنجش با وسایل ساخته او از 0/0003 بیشتر نیست. از تحلیلگری که از این ادعا بی اطلاع است و این وسیله را به کار می برد خواسته شده است که ضمن انجام وظایف عادی خود، 9 دفعه یک رشته اندازه گیری را تکرا کند. در پایان معلوم شده است که انحراف معیار 9 دفعه اندازه گیری، 0/0006 است. الف) بر اساس این نتیجه آیا رد کردن ادعای سازنده قابل توجیه است؟ از سطح معنادار بودن 1% استفاده کنید. ب) اگر انحراف معیار واقعی معادل 0/0005 باشد، احتمال رد کردن فرض $s = 0.0003$ چقدر می شود؟ پاسخ را هم از طریق شکل و هم از ره تحلیل به دست آورید.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$a = 0.01$$

$$S = 0.0006$$

$$n = 9$$

$$\begin{cases} H_0 : s \leq 0.0003 \\ H_1 : s > 0.0003 \end{cases}$$

الف) از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A = \left[0, c^2_{0.01,8}\right] = \left[0, 20.090\right]$$

$$c^2 = \frac{(n-1)S^2}{s_0^2} = \frac{(9-1)(0.0006)^2}{(0.0003)^2} = 32$$

حال از آنجا که مقدار آماره آزمون در داخل ناحیه پذیرش قرار نمی گیرد فرض صفر $(H_0 : s \leq 0.0003)$ را نمی پذیریم.

ب) با توجه به توضیحات موجود در مسئله می بایست احتمال رد فرض صفر درحالی که این فرض غلط است را بدست آوریم یعنی $1-b$، بنابراین خواهیم داشت:

روش حل تحلیلی:

$$b = P\left(c^2 \le c^2_{0.01;8} \mid s = 0.0005\right) = P\left(\frac{8S^2}{(0.0003)^2} \le 20.090 \mid s = 0.0005\right)$$
$$= P\left(\frac{8S^2}{(0.0003)^2} * \frac{(0.0003)^2}{(0.0005)^2} \le 20.090 * \frac{(0.0003)^2}{(0.0005)^2}\right) = P\left(c_8^2 \le 7.2324\right) = 1 - P\left(c_8^2 > 7.2324\right)$$
$$= 1 - 0.50 = 0.50$$
$$\Rightarrow 1 - b = 1 - 0.50 = 0.50$$

روش استفاده از شکل:

$$l = \frac{s}{s_0} = \frac{0.0005}{0.0003} = 1.667$$

با مراجعه به شکل 18,6 صفحه 252 و با توجه به آنکه n=9 و $l = 1.667$ مقدار b در حدود 0/50 بدست میاید، بنابراین مقدار $1-b$ نیز برابر با 0/50 خواهد شد.

23- قصد آزمایش این مطلب را داریم که آیا انحراف معیار اندازه گیریهای بدست آمده از یک دماسنج معادل 0/010 درجه یا بیشتر است. حد 0/005 درجه برای تلرانس انحراف معیار ارائه شئه است و مایلیم که هرگونه تجاوز از این حد را با احتمال 0/90 کشف و رد کنیم. به ازای مقدار 1 درصد برای سطح معنادار بودن، به چند اندازه گیری نیاز داریم و ضابطه پذیرشمان چه خواهد بود؟ اگر $S = 0.012$ شود، آیا فرض را می پذیریم؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$a = 0.01$$
$$S = 0.012$$
$$1 - b = 0.9 \Rightarrow b = 0.1$$
$$\begin{cases} H_0 : s \le 0.01 \\ H_1 : s > 0.01 \end{cases}$$

با توجه به یکطرفه بودن آزمون فرض داریم:

$$\frac{c^2_{1-b;n-1}}{c^2_{a;n-1}} = \frac{s_0^2}{s_1^2} \Rightarrow \frac{c^2_{0.9;n-1}}{c^2_{0.01;n-1}} = \frac{(0.01)^2}{(0.015)^2} \Rightarrow n \approx 40$$

از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A = \left[0, c^2_{0.01,39}\right] = [0,62.411]$$
$$c^2 = \frac{(n-1)S^2}{s_0^2} = \frac{(40-1)(0.012)^2}{(0.01)^2} = 56.16$$

حال از آنجا که مقدار آماره آزمون در داخل ناحیه پذیرش قرار می گیرد فرض صفر ($H_0 : s \le 0.01$) را می پذیریم.

24-صفحات فلزی با ضخامت استاندارد را تا قطر معینی با لعاب زرین می پوشانیدند. صفحات پوشیده از لعاب سپس انبار می شد و مقاومت لعاب زرین مورد آزمایش قرار می گرفت. به منظور تعیین مقاومت، یک ساچمه بوسیله ماشین از یک طرف صفحه به داخل آن رانده می شد تا لعاب زرین در طرف دیگر آن قدر کشیده شود که ترک بخورد. با ایجاد ترک، از طریق برقراری جریان برق بین دو صفحه و یک دستگاه رابط، ماشین

متوقف می شد. عمق نفوذ ساچمه، معیاری برای مقاومت لعاب بود. بر اساس تعداد آزمایشهای فرآوران، بطور دقیق معلوم شده بود که دقت اندازه گیری روش اصلی که بر حسب انحراف معیار سنجیده می شود، مساوی 4 واحد است، که این میزان رضایت بخش محصوب نشد و آزمایشهای مختلفی به هدف بهبود آن اجرا شد. در یکی از این آزمایشها کوشش بعمل آمد تا از طریق آماده کردن صفحات به نحو خاص پس از پوشانیدن آنها با لعاب زرین دقت اندازه گیری را بهبود بخشند. سطح انتخاب شده برای معنادار بودن $a = 0.05$ بود. تصمیم گرفته شد که آزمایش مناسب باید آزمایشی باشد که کاهش واریانس به نصف مقدار عادی را با احتمال 0/80 کشف کند. الف) شیوه تصمصم مورد استفاده کدام است؟ ب) اندازه مورد نیاز نمونه چقدر است؟ ج) اگر $S^2 = 12.2$ باشد، نتیجه گیری در این مورد چگونه است؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$a = 0.05$$
$$1-b = 0.8 \Rightarrow b = 0.2$$
$$\begin{cases} H_0 : s \geq 4 \\ H_1 : s < 4 \end{cases}$$

الف)پس از محاسبه تعداد نمونه، مقدار انحراف معیار نمونه (S) را با استفاده از شکل 19,6 صفحه 253 تخمین زده و با قرار دادن آن در آماره آزمون که در بند ج آورده شده و مقایسه آن با ناحیه پذیرش، چنانچه در این ناحیه قرار داشت فرض صفر را می پذیریم و در غیر اینصورت آنرا رد می کنیم.

ب) با توجه به یکطرفه بودن آزمون فرض داریم:

$$\frac{c^2_{1-b;n-1}}{c^2_{a;n-1}} = \frac{s_0^2}{s_1^2} \Rightarrow \frac{c^2_{0.8;n-1}}{c^2_{0.05;n-1}} = \frac{(4)^2}{(4.05)^2} \Rightarrow n \approx 9$$

ج)از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A = \left[c^2_{0.95,9}, +\infty\right) = [2.733, +\infty)$$
$$c^2 = \frac{(n-1)S^2}{s_0^2} = \frac{(9-1)(12.2)}{(4)^2} = 6.1$$

حال از آنجا که مقدار آماره آزمون در داخل ناحیه پذیرش قرار می گیرد فرض صفر ($H_0 : s \geq 4$) را می پذیریم.

25- روش تحلیل خاصی در مورد یک ماده مورد استفاده قرار گرفت و پیشنهادی مبنی بر جانشین کردن آن با روش دیگری که تصور می شد مزایایی دارد عنوان شد. پرسشی که از طریق تجربه قرار بود پاسخ داده شود این بود که آیا روش جدید دارای دقت روش قدیمی هست یا نه. بر اساس تجربه قبلی معلوم بود که انحراف معیار روش پیشین 0/04 واحد است. به علاوه، معلوم شد که روش جدید از نظر سرعت و از نظر صرفه جویی در مواد مزایای کافی دارد که اگر دقت آن به طور قابل ملاحظه ای از دقت روش فعلی کمتر نباشدانتخاب آن توجیه پذیر می شود. سپس بر اساس اجرای آزمون در سطح معنادار بودن $a = 0.01$ قرار شد آزمون طوری طراحی شود که اگر انحراف معیار روش جدید 0/10 واحد باشد، مخاطره عدم کشف چنین تغییری از 0/05 تجاوز نکند. الف) اندازه مورد نیاز نمونه را تعیین کنید. ب) اگر مقدار واقعی انحراف معیار، a، مساوی 0/07 بود، احتمال پذیرش فرض چقدر می شود؟ ج) اگر S=0/06 باشد، آیا فرض را می پذیرید؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$a = 0.01$$
$$b = 0.05$$
$$\begin{cases} H_0 : s \le 0.04 \\ H_1 : s > 0.04 \end{cases}$$

الف) با توجه به یکطرفه بودن آزمون فرض داریم:

$$\frac{c^2_{1-b;n-1}}{c^2_{a;n-1}} = \frac{s_0^2}{s_1^2} \Rightarrow \frac{c^2_{0.95;n-1}}{c^2_{0.01;n-1}} = \frac{(0.04)^2}{(0.14)^2} \Rightarrow n \approx 11$$

ب) با توجه به تیتر مسئله می توان دریافت خواست مسئله محاسبه احتمال b که همان احتمال پذیرش فرض صفر در حالی که این فرض غلط است می باشد، بنابراین داریم:

$$b = P\left(c^2 \le c^2_{0.01;10} \mid s = 0.07\right) = P\left(\frac{10S^2}{(s_0)^2} \le 23.209 \mid s = 0.07\right)$$
$$= P\left(\frac{10S^2}{(0.04)^2} * \frac{(0.04)^2}{(0.07)^2} \le 23.209 * \frac{(0.04)^2}{(0.07)^2}\right) = P\left(c^2_{10} \le 7.578\right) = 1 - P\left(c^2_{10} > 7.578\right)$$
$$= 1 - 0.679 = 0.321$$

ج)از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A = \left[0, c^2_{0.1,10}\right] = [0,23.209]$$
$$c^2 = \frac{(n-1)S^2}{s_0^2} = \frac{(11-1)(0.06)^2}{(0.04)^2} = 22.5$$

حال از آنجا که مقدار آماره آزمون در داخل ناحیه پذیرش قرار می گیرد فرض صفر ($H_0 : s \le 0.04$) را می پذیریم.

26-یک سازنده وسایل اندازه گیری مدعی است که انحراف معیار اندازه گیری با ابزار ساخته او از $s = 0.0003$ تجاوز نمی کند. توسط تحلیلگری که از ادعای فوق بی اطلاع است و این ابزار را بکار می برد، یک رشته اندازه گیری را چند دفعه از اقلام واحدیدر مدت عادی انجام وظیفه وی به دست می آوریم. اگر ادعای سازنده درست باشد، مایل نخواهیم بود با مخاطره ای بیش از 5% ادعای سازنده را رد کنیم، ولی اگر انحراف معیار واقعی، s_1، طوری باشد که $s_1/s_0 = 2$ شود. با احتمال بیش از 0/90 مایل به رد ادعای سازنده وسایل سنجش خواهیم بود. الف) اندازه مورد نیاز نمونه چقدر است؟ ب) اگر مقدار 25/3 برای $(n-1)S^2/(0.0003)^2$ به دست آید، ادعای سازنده را خواهیم پذیرفت یا رد خواهیم کرد؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$a = 0.05$$
$$1 - b = 0.9 \Rightarrow b = 0.1$$
$$\begin{cases} H_0 : s \le 0.0003 \\ H_1 : s > 0.0003 \end{cases}$$

الف) با توجه به یکطرفه بودن آزمون فرض داریم:

$$\frac{c^2_{1-b;n-1}}{c^2_{a;n-1}} = \frac{s_0^2}{s_1^2} \Rightarrow \frac{c^2_{0.9;n-1}}{c^2_{0.05;n-1}} = \frac{1}{4} \Rightarrow n \approx 11$$

ب) از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A=\left[0,\, c^{2}_{0.05,10}\right]=\left[0,18.307\right]$$

$$c^{2}=\frac{(n-1)S^{2}}{s_{0}^{2}}=25.3$$

حال از آنجا که مقدار آماره آزمون در داخل ناحیه پذیرش قرار نمی گیرد فرض صفر $(H_0 : s \le 0.0003)$ را نمی پذیریم و پیشنهاد سازنده را رد می کنیم.

27- یک تولید کننده مدعی است که انحراف معیار طول قطعاتی که می سازد از 0/05 اینچ بیشتر نیست. یک نمونه متشکل از 9 قطعه را اندازه می گیریم و می بینیم که انحراف معیار آن 0/10 اینچ است. به ازای مقدار 5% برای سطح معنادار بودن آیا می توان ادعای تولید کننده را رد کرد؟ در مورد منحنی OC برای آزمون انجام شده بحث کنید.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$a=0.05$$
$$n=9$$
$$S=0.10$$
$$\begin{cases} H_0 : s \le 0.05 \\ H_1 : s > 0.05 \end{cases}$$

از آنجا که آزمون فرض یکطرفه می باشد، ناحیه پذیرش عبارتست از:

$$A=\left[0,\, c^{2}_{0.05;8}\right]=\left[0,15.507\right]$$

$$c^{2}=\frac{(n-1)S^{2}}{s_{0}^{2}}=\frac{(9-1)(0.1)^{2}}{(0.05)^{2}}=32$$

حال از آنجا که مقدار آماره آزمون در داخل ناحیه پذیرش قرار نمی گیرد فرض صفر $(H_0 : s \le 0.05)$ را نمی پذیریم.

28- بر اساس یک نمونه 20 تایی از یک توزیع نرمال، با $\sum\left(X-\overline{X}\right)^{2}=0.225$، فرض $s=0.1$ را به ازای مقدار 0/01 برای خطای نوع اول آزمایش کنید. احتمال پذیرش فرض $s=0.1$ چقدر می شود اگر $s=0.2$ باشد؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$a=0.01$$
$$n=20$$
$$\begin{cases} H_0 : s \le 0.1 \\ H_1 : s > 0.1 \end{cases}$$

احتمال پذیرش فرض $s=0.1$ در صورتی که $s=0.2$ باشد برابر با احتمال b یعنی پذیرش فرض صفر درحالی که این فرض غلط می باشد است. بنابراین داریم:

ابتدا باید ناحیه پذیرش فرض صفر را مشخص نماییم و ببینیم آیا فرض صفر مورد پذیرش قرار می گیرد یا خیر:

از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A=\left[0,\, c^2_{0.01,19}\right]=\left[0,36.191\right]$$

$$c^2=\frac{(n-1)S^2}{s_0^{\,2}}=\frac{\sum\left(X-\overline{X}\right)^2}{s_0^{\,2}}=\frac{0.225}{(0.1)^2}=22.5$$

حال از آنجا که مقدار آماره آزمون در داخل ناحیه پذیرش قرار می گیرد فرض صفر $(H_0 : s \le 0.1)$ را می پذیریم

حال خواهیم داشت:

$$b = P\left(c^2 \le c^2_{0.1;19} \mid s = 0.2\right)=P\left(\frac{19S^2}{(0.1)^2}\le 36.191 \mid s = 0.2\right)$$

$$=P\left(\frac{19S^2}{(0.1)^2}*\frac{(0.1)^2}{(0.2)^2}\le 36.191*\frac{(0.1)^2}{(0.2)^2}\right)=P\left(c^2_{19}\le 9.047\right)=1-P\left(c^2_{19}>9.047\right)$$

$$=1-0.972=0.0280$$

29-دارویی توسط یک شرکت دارو سازی تولید می شود که وزن آن دارای انحراف معیار ذاتی 5 میلی گرم است. گروه تحقیقاتی شرکت روش جدیدی برای تولید این دارو ارائه کرده است. اما این روش متضمن قبولی برخی هزینه هاست و تنها درصورت وجود دلایل قوی مبنی بر کمتر بودن انحراف معیار وزن از 5، مورد استفاده قرار خواهد گرفت. در واقع، اگر انحراف معیار جدید 3 میلی گرم باشد، با احتمال بیش از 80 درصد باید روش جدید را جانشین روش قبلی کرد. اگر $a = 0.05$ باشد، به چند مشاهده نیاز است؟ شرکت تجربه ای را با استفاده از اندازه نمونه n=10 انجام می دهد. داده ها بر حسب گرم در زیر ارائه شده اند.

5/728	**5/731**
5/722	**5/719**
5/727	**5/724**
5/718	**5/726**
5/723	**5/722**

$$\sum_{i=1}^{10}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=148$$

بر اساس این داده ها آیا روش جدید مورد استفاده قرار خواهد گرفت؟ مقدار 10 برای اندازه نمونه انتخاب خوب، متوسط یا بد است؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$a = 0.05$$

$$1-b = 0.8 \Rightarrow b = 0.2$$

$$n=10$$

$$\sum_{i=1}^{10}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=148$$

$$\begin{cases} H_0 : s \ge 5 \\ H_1 : s < 5 \end{cases}$$

با توجه به یکطرفه بودن آزمون فرض داریم:

$$\frac{c^2_{1-b;n-1}}{c^2_{a;n-1}}=\frac{s_0^2}{s_1^2}\Rightarrow\frac{c^2_{0.8;n-1}}{c^2_{0.05;n-1}}=\frac{5}{3}\Rightarrow n\approx 15$$

از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A=\left[c^2_{0.95,9},+\infty\right)=[3.325,+\infty)$$

$$c^2=\frac{(n-1)S^2}{s_0^{\ 2}}=\frac{(9)S^2}{5^2}=\frac{\sum_{i=1}^{10}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{5^2}=\frac{148}{5^2}=5.92$$

حال از آنجا که مقدار آماره آزمون در داخل ناحیه پذیرش قرار می گیرد فرض صفر $(H_0: s \geq 5)$ را می پذیریم، و روش جدید را مورد استفاده قرار خواهیم داد.

30- سازمان فضا نوردی به ساخت موشکی مشغول است تا ماهواره ای را در مدار قرار دهدو مایل است بداند که آیا این موشک از نظر فواصل کوتاه یا بلند دقیق است یا نه. میانگین توزیع را میتوان با سهولت تنظیم کردبطوریکه مسئله اصلی به واریانس توزیع مربوط می شود. یکی از اهداف طرح این است که هرگاه هدف گیری به طریق مناسب صورت گیرد، 99 درصد از موشکها در 2 مایلی محل مورد نظر قرار گیرند. الف) بزرگترین مقدار مجاز برای انحراف معیار چقدر است؟ ب) اگر انحراف معیار واقعی فاصله دو برابر مقدار بدست آمده در بند الف باشد، طرح ساخت موشک برای انجام تغییراتی باید به مقاطعه کار باز گردانیده شود. قرار است این امر از طریق تجربه بررسی شود و سازمان فضا نوردی مایل است مخاطره بیش از 10% را قبول نکند. از سوی دیگر اگر موشک رضایتبخش باشد، با احتمالی که کمتر از 0/99 نباشد، باید مورد تایید قرار گیرد. اندازه مورد نیاز نمونه چقدر است؟ ج) اگر $S^2=2.25$ باشد تکلیف موشک و طرح ساخت آن چیست؟ د) اگر s معادل $\frac{3}{2}$ مقدار بدست آمده در بند الف باشد، احتمال پذیرش موشک را از راه تحلیلی به دست آورید.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$1-a=0.99\Rightarrow a=0.01$$
$$b=0.1$$
$$s_1=2s_0$$

الف)

$$P\left(\left|\overline{X}-m\right|\le 2\right)=0.99\Rightarrow P\left(\left|\overline{X}-m\right|>2\right)=0.01\Rightarrow P\left(\overline{X}-m>2\right)+P\left(\overline{X}-m<-2\right)=0.01$$
$$\Rightarrow 2P\left(\overline{X}-m>2\right)=0.01\Rightarrow P\left(\overline{X}-m>2\right)=0.005$$
$$P\left(\frac{\overline{X}-m}{s}>\frac{2}{s}\right)=0.005\Rightarrow P\left(Z>\frac{2}{s}\right)=0.005\Rightarrow\frac{2}{s}=Z_{0.005}\Rightarrow\frac{2}{s}=2.576\Rightarrow s=0.776$$

ب) حال آزمون فرض عبارت خواهد بود با:

$$\begin{cases}H_0: s\le 0.776\\ H_1: s>0.776\end{cases}$$

با توجه به یکطرفه بودن آزمون فرض داریم:

$$\frac{c^2_{1-b;n-1}}{c^2_{a;n-1}}=\frac{s^2_0}{s^2_1}\Rightarrow\frac{c^2_{0..9;n-1}}{c^2_{0.01;n-1}}=\frac{s^2_0}{2s^2_0}\Rightarrow n\approx 14$$

ج) از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش عبارت خواهد بود از:

$$A=\left[0,c^2_{0.01,13}\right]=[0,27.668]$$

$$c^2=\frac{(n-1)S^2}{s_0^2}=\frac{(13)(2.25)}{(0.776)^2}=48.447$$

حال از آنجا که مقدار آماره آزمون در داخل ناحیه پذیرش قرار نمی گیرد فرض صفر ($H_0: s\leq 0.776$) را نمی پذیریم در نتیجه باید در طراحی تجدید نظر شود.

د)

$$b=P\left(c^2\leq c^2_{0.01;13}\mid s=\frac{3}{2}s_0\right)=P\left(\frac{13S^2}{(0.776)^2}\leq 27.668\mid s=\frac{3}{2}(0.776)\right)$$

$$=P\left(\frac{13S^2}{(0.776)^2}*\frac{(0.776)^2}{(1.164)^2}\leq 27.668*\frac{(0.776)^2}{(1.164)^2}\right)=P\left(c^2_{13}\leq 12.2968\right)=1-P\left(c^2_{13}>12.2968\right)$$

$$\approx 1-0.5\approx 0.5$$

31- در مسئله14، به ازای مقدار 1% برای سطح معنادار بودن، آزمون فرض 2 بودن انحراف معیار فرمول جدید را برای گزینه دوم مبنی بر اینکه فرمول جدید انحراف معیار را افزایش می دهد، انجام دهید. فرض کنید که افزایش از $s=2$ به $s=4$ باید با احتمال 80 درصد کشف شود.الف) آماره آزمون و ناحیه پذیرش را پیدا کنید. ب) اندازه لازم نمونه برای تامین احتمالات مربوط به خطاهای نوع I و II را تعیین کنید. ج) اگر $S^2=11$ باشد، چه تصمیمی باید گرفت؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله 14 و این مسئله خواهیم داشت:

$$a=0.01$$

$$1-b=0.8\Rightarrow b=0.2$$

$$n=10$$

$$\begin{cases}H_0: s\leq 2\\ H_1: s>2\end{cases}$$

الف) از آنجا که آزمون فرض یک طرفه می باشد لذا ناحیه پذیرش و آماره آزمون عبارت خواهند بود از:

$$A=\left[0,c^2_{0.01,9}\right]=[0,21.666]$$

$$c^2=\frac{(n-1)S^2}{s_0^2}=\frac{(10-1)S^2}{(2)^2}=\frac{9S^2}{4}$$

ب) با توجه به یکطرفه بودن آزمون فرض داریم:

$$\frac{c^2_{1-b;n-1}}{c^2_{a;n-1}}=\frac{s^2_0}{s^2_1}\Rightarrow\frac{c^2_{0..8;n-1}}{c^2_{0.01;n-1}}=\frac{2^2}{4^2}\Rightarrow n\approx 10$$

ج) اگر $S^2=11$ باشد آنگاه خواهیم داشت:

$$A = [0, c^2_{0.01,9}] = [0,21.666]$$

$$c^2 = \frac{(n-1)S^2}{s_0^2} = \frac{(10-1)11}{(2)^2} = 24.75$$

حال از آنجا که مقدار آماره آزمون در داخل ناحیه پذیرش قرار نمی گیرد فرض صفر $(H_0 : s \leq 2)$ را نمی پذیریم.

32- در مورد آزمون فرض $m = m_0$ وقتی انحراف معیار معلوم است، رابطه مربوط به اندازه نمونه را برای شیوه دو طرفه به دست آورید.

پاسخ:

با توجه به موارد مطروحه در سئوالات قبلی بدیهی است:

a = خطای نوع اول = احتمال رد فرض صفر در حالی که این فرض درست است.

b = خطای نوع دوم = احتمال پذیرش فرض صفر در حالی که این فرض غلط است.

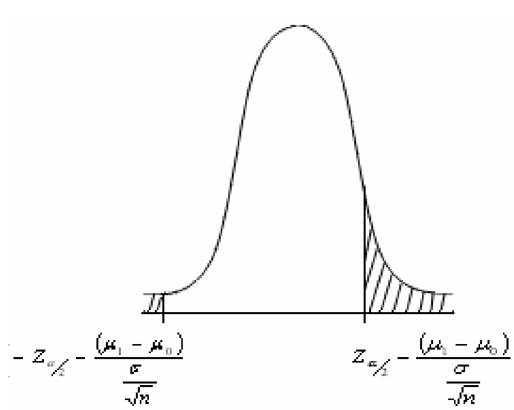
$\left[-Z_{a/2}, Z_{a/2}\right]$ = ناحیه پذیرش در حالت دوطرفه در مورد آزمون فرض $m = m_0$ وقتی انحراف معیار معلوم است.

بنابراین داریم:

$$b = P\left(-Z_{a/2} \leq \frac{(\overline{X} - m_0)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \leq Z_{a/2}\right) = P\left(-Z_{a/2} - \frac{(m_1 - m_0)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \leq Z \leq Z_{a/2} - \frac{(m_1 - m_0)}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right)$$

توجه داشته باشید در حل بالا فرض بر $m_1 > m_0$ می باشد.

حال چنانچه شکل ناحیه مورد بررسی را رسم کنیم، خواهیم دید ناحیه سمت چپ بسیار کوچک می باشد و می توان از آن صرف نظر نمود $P\left(-Z_{a/2} - \frac{(m_1 - m_0)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \leq Z\right) \approx 0$، به شکل زیر توجه کنید:



حال خواهیم داشت:

$$b = P\left(Z \le Z_{a/2} - \frac{(m_1 - m_0)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right) = P\left(Z \ge \frac{(m_1 - m_0)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} - Z_{a/2} \right) \Rightarrow \frac{(m_1 - m_0)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} - Z_{a/2} = Z_b$$

$$\Rightarrow \frac{(m_1 - m_0)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = Z_b + Z_{a/2} \Rightarrow \frac{(m_1 - m_0)^2}{\frac{s^2}{n}} = \left(Z_b + Z_{a/2} \right)^2 \Rightarrow n = \frac{\left(Z_b + Z_{a/2} \right)^2 s^2}{(m_1 - m_0)^2}$$

33- در مورد آزمون فرض $s = s_0$ رابطه مربوط به اندازه نمونه را برای شیوه دو طرفه به دست آورید.

پاسخ:

با توجه به موارد مطروحه در سئوالات قبلی بدیهی است:

a = خطای نوع اول = احتمال رد فرض صفر در حالی که این فرض درست است.

b = خطای نوع دوم = احتمال پذیرش فرض صفر در حالی که این فرض غلط است.

$\left[c^2_{1-\frac{a}{2};n-1}, c^2_{\frac{a}{2};n-1} \right]$ = ناحیه پذیرش در حالت دوطرفه در مورد آزمون فرض $s = s_0$ است.

بنابراین داریم:

$$b = P\left(c^2_{1-\frac{a}{2};n-1} \le \frac{(n-1)S^2}{s_0^2} \le c^2_{\frac{a}{2};n-1} \middle| s = s_1 \ne s_0 \right) = P\left(c^2_{1-\frac{a}{2};n-1} * \frac{s_0^2}{s_1^2} \le c^2_{n-1} \le c^2_{\frac{a}{2};n-1} * \frac{s_0^2}{s_1^2} \right)$$

اگر نسبت $\frac{s_0^2}{s_1^2}$ مقداری کوچکتر از 1 داشته باشد، خواهیم دید ناحیه سمت چپ بسیار کوچک می باشد و می توان از آن صرف نظر نمود $P\left(c^2_{1-\frac{a}{2};n-1} * \frac{s_0^2}{s_1^2} \le c^2_{n-1} \right) \approx 0$، به شکل زیر توجه کنید:

شکل

حال خواهیم داشت:

$$b = P\left(c^2_{n-1} \le c^2_{\frac{a}{2};n-1} * \frac{s_0^2}{s_1^2} \right) \Rightarrow c^2_{1-b;n-1} = c^2_{\frac{a}{2};n-1} * \frac{s_0^2}{s_1^2} \Rightarrow \frac{s_0^2}{s_1^2} = \frac{c^2_{1-b;n-1}}{c^2_{\frac{a}{2};n-1}}$$

حال اگر نسبت $\frac{s_0^2}{s_1^2}$ مقداری بزرگتر از 1 داشته باشد، خواهیم دید ناحیه سمت راست بسیار کوچک می باشد و می توان از آن صرف نظر نمود $P\left(c^2_{n-1} \le c^2_{\frac{a}{2};n-1} * \frac{s_0^2}{s_1^2} \right) \approx 0$، به شکل زیر توجه کنید:

شکل

حال خواهیم داشت:

$$b = P\left(c^2_{1-\frac{a}{2};n-1} * \frac{s_0^2}{s_1^2} \le c^2_{n-1} \right) \Rightarrow c^2_{b;n-1} = c^2_{1-\frac{a}{2};n-1} * \frac{s_0^2}{s_1^2} \Rightarrow \frac{s_0^2}{s_1^2} = \frac{c^2_{b;n-1}}{c^2_{1-\frac{a}{2};n-1}}$$

34- فرض کنید که X معرف عمر لامپ با تابع چگالی زیر است:

$$f_X(Z) = \begin{cases} \frac{1}{q} e^{\frac{-z}{q}} \; ;0 \le Z \le \infty \\ 0; else \end{cases}$$

الف) برای آزمایش فرض $q = 1000$ در برابر گزینه دوم $q > 1000$، آزمون زیر پیشنهاد شده است: مشاهده ای از X، مثلا X_1 را بدست آورید. اگر $X_1 > 1000$ باشد، فرض را رد کنید. رابطه ای برای منحنی OC به دست آورید.

ب) سطح معنادار بودن آزمون شرح داده شده در بند الف چقدر است؟

پاسخ:

الف) برای بدست آوردن رابطه منحنی OC می بایستی احتمال b که همان پذیرش فرض صفر در حالی که این فرض غلط می باشد است را محاسبه نمود، بنابراین دارم:

$$b = P\left(X_1 \le 1000 \middle| q > 1000\right) = \int_0^{1000} \frac{1}{q} e^{\frac{-Z}{q}} dz = -e^{\frac{-Z}{q}} \Big|_0^{1000} = 1 - e^{\frac{-1000}{q}}$$

عبارت بالا رابطه ای برای منحنی OC می باشد بطوریکه به q عدد می دهیم و مقدار b را محاسبه می نماییم و بهمین طریق منحنی OC را رسم می کنیم.

ب) با توجه به مفروضات مسئله و بند الف داریم:

$$\begin{cases} H_0 : q = 1000 \\ H_1 : q > 1000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : q \le 1000 \\ H_1 : q > 1000 \end{cases}$$

ناحیه پذیرش نیز با توجه به اطلاعات بند الف برابر است با: $A = [0,1000]$

برای یافتن سطح معنادار بودن می بایستی احتمال خطای نوع اول یعنی a که رد فرض صفر در حالی که این فرض درست می باشد است. بنابراین داریم:

$$a = P\left(X_1 > 1000 \middle| q = 1000\right) = \int_{1000}^{+\infty} \frac{1}{1000} e^{\frac{-Z}{1000}} dz = -e^{\frac{-Z}{1000}} \Big|_{1000}^{+\infty} = e^{-1}$$