حل المسائل کتاب آمار مهندسی

تالیف: لیبرمن، ترجمه: دکتر محلوجی

مولف:

ابوالفضل کاظمی

مهدی عزیز محمدی

فصل سوم:

توزیع نرمال

1- اگر X دارای توزیع نرمال با میانگین 14 و واریانس 4 باشد، الف) P{8<X<12} را پیدا کنید.
ب) P{X<20} را پیدا کنید. ج) P{X>5} را پیدا کنید.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله داریم: $X \sim N(14,4)$ ،حال خواهیم داشت:

الف)

$$P(8<X<12)=P\left(\frac{8-14}{2}<\frac{X-14}{2}<\frac{12-14}{2}\right)=P(-3<Z<-1)=P(Z<-1)-P(Z<-3)$$
$$=P(Z>1)-P(Z>3)=$$

ب)

$$P(X<20)=P\left(\frac{X-14}{2}<\frac{20-14}{2}\right)=P(Z<3)=1-P(Z>3)=$$

ج)

$$P(5<X)=P\left(\frac{5-14}{2}<\frac{X-14}{2}\right)=P(-4.5<Z)=1-P(Z<-4.5)=1-P(Z>-4.5)$$
$$=1-0=1$$

توجه: از آنجا که توزیع نرمال قرینه می باشد لذا: $P(Z>Z_a)=P(Z<-Z_a)=a$

2- عدد K را طوری بیابید که برای متغیر تصادفی X، با توزیع نرمال و میانگین m و واریانس s^2
$P\{m-ks<X<m+ks\}=0.683,0.90,0.95,0.99,0.995$
باشد. K را طوری بیابید که $P\{X<m+ks\}=0.841,0.95,0.975,0.99$ باشد.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$X \sim N(m,s^2)$$
$$P(m-ks<X<m+ks)=0.683 \Rightarrow P\left(\frac{m-ks-m}{s}<\frac{X-m}{s}<\frac{m+ks-m}{s}\right)=0.683$$
$$P(-k<Z<k)=0.683 \Rightarrow P(Z<K)-P(Z<-K)=0.683 \Rightarrow 1-P(Z>K)-P(Z>K)=0.683$$
$$1-2P(Z>K)=0.683 \Rightarrow P(Z>K)=\frac{1-0.683}{2} \Rightarrow P(Z>K)=0.158$$

و از طرفی نیز با توج به جدول داریم: $P(Z>1)=0.1587$

در نتیجه خواهیم داشت: K=1

$$X \sim N(m,s^2)$$
$$P(m-ks<X<m+ks)=0.90 \Rightarrow P\left(\frac{m-ks-m}{s}<\frac{X-m}{s}<\frac{m+ks-m}{s}\right)=0.90$$
و
$$P(-k<Z<k)=0.90 \Rightarrow P(Z<K)-P(Z<-K)=0.90 \Rightarrow 1-P(Z>K)-P(Z>K)=0.90$$
$$1-2P(Z>K)=0.90 \Rightarrow P(Z>K)=\frac{1-0.90}{2} \Rightarrow P(Z>K)=0.05$$

از طرفی نیز با توج به جدول داریم: $P(Z>1.64)=0.0505$

در نتیجه خواهیم داشت: K=1/64

$$X \sim N(m, s^2)$$

$$P(m-ks < X < m+ks) = 0.95 \Rightarrow P\left(\frac{m-ks-m}{s} < \frac{X-m}{s} < \frac{m+ks-m}{s}\right) = 0.95$$

$$P(-k < Z < k) = 0.95 \Rightarrow P(Z < K) - P(Z < -K) = 0.683 \Rightarrow 1 - P(Z > K) - P(Z > K) = 0.95$$

$$1 - 2P(Z > K) = 0.95 \Rightarrow P(Z > K) = \frac{1-0.95}{2} \Rightarrow P(Z > K) = 0.025$$

و از طرفی نیز با توج به جدول داریم: $P(Z > 1.96) = 0.025$

در نتیجه خواهیم داشت: K=1/96

$$X \sim N(m, s^2)$$

$$P(m-ks < X < m+ks) = 0.99 \Rightarrow P\left(\frac{m-ks-m}{s} < \frac{X-m}{s} < \frac{m+ks-m}{s}\right) = 0.99$$

$$P(-k < Z < k) = 0.99 \Rightarrow P(Z < K) - P(Z < -K) = 0.99 \Rightarrow 1 - P(Z > K) - P(Z > K) = 0.99$$

$$1 - 2P(Z > K) = 0.99 \Rightarrow P(Z > K) = \frac{1-0.99}{2} \Rightarrow P(Z > K) = 0.005$$

و از طرفی نیز با توجه به جدول داریم: $P(Z > 2.57) = 0.00508$

در نتیجه خواهیم داشت: K=2/57

$$X \sim N(m, s^2)$$

$$P(m-ks < X < m+ks) = 0.995 \Rightarrow P\left(\frac{m-ks-m}{s} < \frac{X-m}{s} < \frac{m+ks-m}{s}\right) = 0.995$$

$$P(-k < Z < k) = 0.995 \Rightarrow P(Z < K) - P(Z < -K) = 0.995 \Rightarrow 1 - P(Z > K) - P(Z > K) = 0.995$$

$$1 - 2P(Z > K) = 0.995 \Rightarrow P(Z > K) = \frac{1-0.995}{2} \Rightarrow P(Z > K) = 0.0025$$

و از طرفی نیز با توج به جدول داریم: $P(Z > 2.81) = 0.00248$

در نتیجه خواهیم داشت: K=2/81

$$P(X < m+ks) = 0.99 \Rightarrow P\left(\frac{X-m}{s} < \frac{m+ks-m}{s}\right) = 0.99 \Rightarrow P(Z < k) = 0.99$$

$$1 - P(Z > K) = 0.99 \Rightarrow P(Z > K) = 0.01$$

و از طرفی نیز با توج به جدول داریم: $P(Z > 2.32) = 0.0.0102$

در نتیجه خواهیم داشت: K=2/32

$$P(X < m+ks) = 0.841 \Rightarrow P\left(\frac{X-m}{s} < \frac{m+ks-m}{s}\right) = 0.841 \Rightarrow P(Z < k) = 0.841$$

$$1 - P(Z > K) = 0.841 \Rightarrow P(Z > K) = 0.159$$

و از طرفی نیز با توج به جدول داریم: $P(Z > 1) = 0.1587$

در نتیجه خواهیم داشت: K=1

$$P(X < m+ks) = 0.95 \Rightarrow P\left(\frac{X-m}{s} < \frac{m+ks-m}{s}\right) = 0.95 \Rightarrow P(Z<k) = 0.95$$
$$1-P(Z>K) = 0.95 \Rightarrow P(Z>K) = 0.05$$

و از طرفی نیز با توج به جدول داریم: $P(Z>1.64) = 0.0505$

در نتیجه خواهیم داشت: K=1/64

$$P(X < m+ks) = 0.975 \Rightarrow P\left(\frac{X-m}{s} < \frac{m+ks-m}{s}\right) = 0.975 \Rightarrow P(Z<k) = 0.975$$
$$1-P(Z>K) = 0.975 \Rightarrow P(Z>K) = 0.025$$

و از طرفی نیز با توج به جدول داریم: $P(Z>1.96) = 0.025$

در نتیجه خواهیم داشت: K=1/96

3- دوام کفشهای ارتشی، توزیع نرمال با میانگین 12 ماه و انحراف معیار 2 ماه دارد. اگر 10000 جفت کفش توزیع شود، انتظار میرود که چند جفت از آنها پس از 15 ماه نیاز به تعویض داشته باشند؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله احتمال آنکه کفشها بیشاز 15 ماه عمر نکنند برابر است با:

$$X \sim N(12, 2^2)$$
$$P(X>15) = P\left(\frac{X-12}{2} > \frac{15-12}{2}\right) = P(Z>1.5) = 0.0668$$

حال با توجه به احتمال بالا ارزش انتظاری کفشهایی که دوام دارند برابر خواهد بود با:

$$E(X) = 0.0668 * 10000 = 668$$

در نتیجه انتظار میرود تعداد 9332 جفت از کفشها نیاز به تعویض داشته باشند.

4- قطر پرداخت شده کابل الکتریکی مسلح، توزیع نرمال با میانگین 0/775 و انحراف معیار 0/010 دارد. احتمال بیشتر شدن قطر از 0/795 چقدر است؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$X \sim N(0.775, (0.01)^2)$$
$$P(X>0.795) = P\left(Z > \frac{0.795-0.775}{0.01}\right) = P(Z>2) = 0.0228$$

5- عرض شکافی بر روی یک قطعه دورالیوم که با ریختگری تولید می شود، توزیع نرمال با میانگین 0/9000 اینچ و انحراف معیار 0/0020 اینچ دارد. حدود مشخصات طراحی $0/9000 \pm 0/0050$ اینچ است. چند درصد از قطعات ریخته گری شده ناقص است؟

پاسخ:

با توجه به حدود طراحی ارائه شده برای ناقص شمردن قطعات عرض شکاف باید بزرگتر از 0/905 و یا کوچکتر از 0/895 باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$X \sim N\left(0.9, (0.002)^2\right)$$

$$P(X > 0.905) + P(X < 0.895) = P\left(Z > \frac{0.905 - 0.9}{0.002}\right) + P\left(Z < \frac{0.895 - 0.9}{0.002}\right)$$

$$= P(Z > 2.5) + P(Z < -2.5) = P(Z > 2.5) + P(Z > 2.5) = 2 * P(Z > 2.5) = 2 * 0.00621 = 0.01242$$

6- اندازه گیری قطر فاصله رزوه نوعی قطعه، دارای توزیع نرمال با میانگین 0/4008 اینچ و انحراف معیار 0/0003 اینچ است. حدود مشخصات طراحی به صورت 0/0010 ± 0/4000 اینچ ارائه شده است. احتمال ناقص بودن یک قطعه چقدر است؟

پاسخ:

احتمال ناقص بودن قطعه تولیدی با توجه به حدود مشخصات طراحی ارائه شده برابر است با:

$$X \sim N\left(0.4008, (0.0003)^2\right)$$

$$P(X > 0.4001) + P(X < 0.3999) = P\left(\frac{X - 0.4008}{0.0003} > \frac{0.4001 - 0.4008}{0.0003}\right) + P\left(\frac{X - 0.4008}{0.0003} < \frac{0.3999 - 0.4008}{0.0003}\right)$$

$$= P(Z > -2.33) + P(Z < -0.66) = 1 - P(Z > 2.33) + P(Z > 0.66) =$$

7- قطر نوعی مهره در تولید انبوه آن دارای توزیع نرمال با میانگین 0/25 اینچ و انحراف معیار 0/01 اینچ است. حدود مشخصات طراحی مهره ناظر به قرار گرفتن قطر در محدوده 0/02 ± 0/24 اینچ است. احتمال تولید یک مهره ناقص چقدر است؟

پاسخ:

با توجه به حدود مشخصات طراحی ارائه شده احتمال ناقص بودن مهره تولیدی برابر است با:

$$X \sim N\left(0.25, (0.01)^2\right)$$

$$P(X > 0.26) + P(X < 0.22) = P\left(\frac{X - 0.25}{0.01} > \frac{0.26 - 0.25}{0.01}\right) + P\left(\frac{X - 0.25}{0.01} < \frac{0.22 - 0.25}{0.01}\right)$$

$$= P(Z > 1) + P(Z < -3) = P(Z > 1) + P(Z > 3) = 0.1587 + 0.00135 = 0.16005$$

8- در مسئله 5، اگر عرض شکافها توزیع نرمال با میانگین 0/9000 اینچ داشته باشد بزرگترین انحراف معیار مجاز را طوری بیابید که تعداد اقلام ناقص معادل سه درهزار باشد.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$X \sim N\left(0.9, s^2\right)$$

$$P(X > 0.905) = 0.0015 \Rightarrow P\left(Z > \frac{0.905 - 0.9}{s}\right) = 0.0015$$

با مراجعه به جدول توزیع نرمال در میابیم:

$$P(Z > 2.97) = 0.00149$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{0.905 - 0.9}{s} = 2.97 \Rightarrow s \le 0.0017$$

توجه داشته باشید بدلیل متقارن بودن توزیع نرمال و احتمال ناقص بودن یکسان قطعه از حد بالا و پایین در این سئوال تنها احتمال خروج از حد بالا مد نظر قرار داده شده و بهمین دلیل از تعداد اقلام ناقص 0/0015 که نیمی از 0/003 می باشد استفاده شده است.

9- در مسئله 6، اگر قطر فاصله رزوه دارای توزیع نرمال با میانگین منطبق بر بعد اسمی باشد، بزرگترین انحراف معیار مجاز برای بیشتر نبودن تعداد اقلام ناقص از یک در هزار چقدر است؟

پاسخ:

از آنجا که نباید تعداد اقلام معیوب از 0/001 بیشتر باشد خواهیم داشت:

$$X \sim N\left(0.4, s^{2}\right)$$
$$P(X > 0.4001) + P(X < 0.3999) = 0.001 \Rightarrow P(X > 0.4001) = 0.0005$$
$$\Rightarrow P\left(\frac{X - 0.4}{s} > \frac{0.4001 - 0.4}{s}\right) = 0.0005 \Rightarrow \frac{0.4001 - 0.4}{s} = Z_{0.0005}$$

حال با مراجعه به جدول توزیع نرمال عدد مربوط به 0/0005 را از داخل جدول بدست می آوریم و خواهیم داشت:

$$\frac{0.4001 - 0.4}{s} = 3.3 \Rightarrow s = \frac{0.0001}{3.3} = 0.00003$$

10- در مسئله4، اگر قرار باشد احتمال بیشتر شدن اندازه قطرها از 0/795 معادل 0/01 شود، میانگین قطرها چقدر باید باشد؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات سئوال 4 خواهیم داشت:

$$X \sim N\left(m, (0.01)^{2}\right)$$
$$P(X > 0.795) = 0.01 \Rightarrow P\left(Z > \frac{0.795 - m}{0.01}\right) = 0.01$$

با مراجعه به جدول توزیع نرمال در میابیم:

$$P(Z > 2.33) = 0.0099$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{0.795 - m}{0.01} = 2.33 \Rightarrow m = 0.7717$$

11- در مسئله 6، اگر انحراف معیار قطر فاصله رزوه 0/0003 اینچ باشد، میانگین در چه مقدار باید تنظیم شود تا اطمینان حاصل شود بیش از 0/5% اقلام تولید شده از حد بالای مشخصات طراحی تجاوز نکند.

پاسخ:

$$X \sim N\left(m, 0.0003^{2}\right)$$
$$P(X > 0.4001) = 0.0005 \Rightarrow P\left(\frac{X - m}{0.0003} > \frac{0.4001 - m}{0.0003}\right) = 0.0005 \Rightarrow \frac{0.4001 - m}{0.0003} = Z_{0.0005}$$

حال با مراجعه به جدول توزیع نرمال عدد مربوط به 0/0005 را از داخل جدول بدست می آوریم و خواهیم داشت:

$$\frac{0.4001 - m}{0.0003} = 3.3 \Rightarrow m = 0.39911$$

12- کالای جدید قرار است تولید شود که باید با حدود مشخصات 3 ±10 واحد تطبیق کند. با شروع تولید مشخص می شود که حدود تلرانس طبیعی بین 12 و 14 قرار می گیرد (فرآیند نرمال و a =27/10000 است). الف) چند درصد از اقلام در خارج از حدود مشخصات طراحی قرار می گیرند؟ ب) به منظور تولید کالای قابل قبول (با فرض که میانگین قابل تنظیم باشد)، کمترین میزان تنظیمی که باید در مورد میانگین انجام گیرد چقدر است؟ از درصد اقلامی که از حد پایین مشخصات طراحی بیرون می افتد، صرف نظر کنید.

پاسخ:

الف) با توجه به مفروضات مسئله باید درصد اقلام خارج از حدود طراحی را بدست آوریم، بنابراین خواهیم داشت:

$$P(X>13)+P(X<7)=P\left(\frac{X-m}{s}>\frac{13-13}{s}\right)+P\left(\frac{X-m}{s}<\frac{7-13}{s}\right)=?$$

حال از آنجا که توزیع X را نداریم بنابراین مقادیر میانگین (m) و انحراف معیار(s) مجهول می باشند، برای یافتن آن با استفاده از مقدار a داده شده در متن سئوال استفاده می کنیم و خواهیم داشت:

$$P(X>14)=0.00135\Rightarrow P\left(Z>\frac{14-m}{s}\right)=0.00135$$

حال با مراجعه به جدول نرمال برای عدد 0/00135 عدد 3 بدست خواهد آمد و خواهیم داشت:

$$\frac{14-m}{s}=3\Rightarrow 14-m=3s$$

و بهمین صورت را نیز برای حد پایین محاسبه می نماییم:

$$P(X<12)=0.00135\Rightarrow P\left(Z<\frac{12-m}{s}\right)=0.00135$$

حال با مراجعه به جدول نرمال برای عدد 0/00135 عدد 3- بدست خواهد آمد و خواهیم داشت:

$$\frac{12-m}{s}=-3\Rightarrow 12-m=-3s$$

حال با استفاده از دو معادله بالا خواهیم داشت:

$$m=13$$

$$s=\frac{1}{3}$$

حال با استفاده از مقدار بدست آمده برای انحراف معیار پاسخ بند الف را بشرح زیر بدست می آوریم:

$$P(X>13)+P(X<7)=P\left(\frac{X-13}{\frac{1}{3}}>\frac{13-13}{\frac{1}{3}}\right)+P\left(\frac{X-13}{\frac{1}{3}}<\frac{7-13}{\frac{1}{3}}\right)=$$

$$=P(Z>0)+P\left(Z<\frac{7-13}{\frac{1}{3}}\right)=P(Z>0)+P(Z<-18)=P(Z>0)+P(Z>18)=0.5+0=0.5$$

ب)

$$P(X>13)=0.0027 \Rightarrow P\left(Z>\frac{13-m}{\frac{1}{3}}\right)=0.0027 \Rightarrow \frac{13-m}{\frac{1}{3}}=Z_{0.0027} \Rightarrow \frac{13-m}{\frac{1}{3}}=2.78$$

$$\Rightarrow m=12.07$$

13- اگر برای قابل استفاده بودن نوعی شافت لازم باشد که قطر آن از 1/500 اینچ کمتر باشد و اگر شافتها طی فرآیندی تولید شوند که میانگین قطر آنها 1/490 اینچ با انحراف معیار 0/004 اینچ باشد، چند درصد از شافتها بدون استفاده می مانند؟ به علاوه، اگر لازم باشد که قطر هر شافت از 1/480 اینچ بیشتر باشد، چند درصد از شافتها بدون استفاده می مانند؟ فرض کنید قطر شافتها دارای توزیع نرمال است.

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله شافتهایی مورد استفاده هستند که قطری کمتر از 1/5 داشته باشند و قطر بالاتر از این مقدار باعث عدم استفاده از قطعه میشود بنابراین خواهیم داشت:

$$X \sim N\left(1.49,(0.004)^2\right)$$

$$P(X>1.5)=P\left(Z>\frac{1.5-1.49}{0.004}\right)=P(Z>2.5)=0.00621$$

بنابراین 0/621 درصد از شافتها بدون استفاده می مانند.

حال اگر حد پایین را 1/480 فرض کنیم در مورد شافتهای بدون استفاده خواهیم داشت:

$$1-P(1.48<X<1.5)=1-P\left(\frac{1.48-1.49}{0.004}<Z<\frac{1.5-1.49}{0.004}\right)=1-P(-2.5<Z<2.5)$$

$$=1-P(Z<2.5)-P(Z<-2.5)=1-1+P(Z>2.5)+P(Z>2.5)=2*0.00621=0.01242$$

بنابراین 1/242 درصد از شافتها بدون استفاده می مانند.

14- در موقعیت مسئله 4، میانگین و انحراف معیار میانگین نمونه ای متشکل از نه قطر را تعیین کنید و درصد میانگینهایی را بیابید که باید از 0/770 کمتر باشند. درصد میانگینهای بالاتر از 0/795 چقدر است؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات دو مسئله خواهیم داشت:

$$X \sim N\left(0.775,(0.01)^2\right)$$

$$\overline{X} \sim N\left(m,\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(0.775,\frac{0.01}{\sqrt{9}}\right)$$

$$P(\overline{X}<0.77)=P\left(Z<\frac{0.77-0.775}{\frac{0.01}{3}}\right)=P\left(Z<\frac{-0.015}{0.01}\right)=P(Z<-1.5)=P(Z>1.5)=$$

$$P(\overline{X}>0.795)=P\left(Z>\frac{0.795-0.775}{\frac{0.01}{3}}\right)=P\left(Z>\frac{0.06}{0.01}\right)=P(Z>6)\approx 0$$

15- در موقعیت مسئله 5، هر ساعت نمونه هایی 5 تایی از آلیاژ ریخته گیری گرفته شده و میانگین آن محاسبه می شود. چند درصد از این میانگینهای نمونه در خارج از حدود مشخصات طراحی قرار می گیرند؟ حدود را طوری طراحی کنید که درصد بیرون افتاده از آن برابر با 0/27 درصد باشد.

پاسخ:

چنانچه متغییر X را عرض شکاف فرض کنیم آنگاه داریم:

$$X \sim N\left(0.9,(0.002)^2\right)$$

$$\overline{X} \sim N\left(m,\frac{s^2}{n}\right) \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(0.9,\frac{0.002^2}{5}\right)$$

$$P\left(\overline{X} > 0.905\right)+P\left(\overline{X} < 0.895\right)=P\left(Z > \frac{0.905-0.9}{\frac{0.002}{\sqrt{5}}}\right)+P\left(Z < \frac{0.895-0.9}{\frac{0.002}{\sqrt{5}}}\right)=2*P(Z > 5.59)\approx 0$$

حال برای محاسبه حدود طراحیی که درصد بیرون افتادگی آن برابر 0/27 درصد باشد، از آنجا که توزیع نرمال توزیعی متقارن است می بایستی احتمال بیرون افتادن نمونه ها از حد بالای و پایین طراحی را جداگانه و برابر با نیمی از 0/27 درصد فرض کنیم، بنابراین خواهیم داشت:

$$P\left(\overline{X} > U\right)=0.00135 \Rightarrow P\left(Z > \frac{U-m}{s}\right)=0.00135$$

حال با مراجعه به جدول توزیع نرمال در می یابیم:

$$P(Z > 3)=0.00135$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{U-m}{s}=3 \Rightarrow U=m+3s$$

و بهمین صورت برای حد پایین طراحی هم خواهیم داشت:

$$P\left(\overline{X} < L\right)=0.00135 \Rightarrow P\left(Z < \frac{L-m}{s}\right)=0.00135$$

حال با مراجعه به جدول توزیع نرمال در می یابیم:

$$P(Z < -3)=0.00135$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{L-m}{s}=-3 \Rightarrow L=m-3s$$

حال با توجه به حدود طراحی بدست آمده و میانگین و انحراف معیار متغییر عرض شکاف، حدود مشخصات طراحی برابر است با: $m \pm 3s \Rightarrow 0.9 \pm 0.006$

16- در موقعیت مسئله6، نمونه های 4 تایی از قطر فاصله رزوه گرفته می شود. احتمال اینکه یک میانگین نمونه در داخل حدود مشخصات طراحی قرار گیرید چقدر است؟ احتمال تجاوز یک میانگین از 0/4005 چقدر است؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات دو مسئله خواهیم داشت:

$$X \sim N\left(0.4008, (0.0003)^2\right)$$

$$\overline{X} \sim N\left(m, \frac{s^2}{n}\right) \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(0.4008, \frac{0.0003^2}{4}\right)$$

$$P\left(0.3999 < \overline{X} < 0.4001\right) = P\left(\frac{0.3999 - 0.4008}{\frac{0.0003}{2}} < Z < \frac{0.4001 - 0.4008}{\frac{0.0003}{2}}\right) = P(-3 < Z < -4.8)$$

حال برای محاسبه احتمال تجاوز یک میانگین از 0/4005 خواهیم داشت:

$$P\left(\overline{X} > 0.4005\right) = P\left(Z > \frac{0.4005 - 0.4008}{\frac{0.0003}{2}}\right) = P(Z > 2) = 0.0228$$

17- قطر میخ پرچهای تولید شده توسط نوعی ماشین دارای توزیع نرمال با میانگین 6/75 و واریانس 0/0016 و اندازه گیری برحسب صدم اینچ است. از محصول این ماشین نمونه تصادفی متشکل از 4 میخ پرچ می گیریم. الف) احتمال اینکه قطر یک میخ پرچ، که بطور تصادفی از محصول ماشین انتخاب شده، از 6/6716 صدم اینچ کمتر باشد، چقدر است؟ ب) احتمال اینکه میانیگین قطر نمونه یک نمونه تصادفی متشکل از 4 میخ پرچ تولید شده توسط این ماشین از 6/7829 بیشتر باشد، چقدر است؟

پاسخ:

الف)

$$X \sim N(6.75, 0.0016)$$

$$P(X < 6.6716) = P\left(Z < \frac{6.6716 - 6.75}{0.04}\right) = P(Z < -1.96) = P(Z > 1.96) = 0.025$$

ب)

$$\overline{X} \sim N\left(m, \frac{s}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(6.75, \frac{0.04}{\sqrt{4}}\right)$$

$$P\left(\overline{X} > 6.7829\right) = P\left(Z > \frac{6.7829 - 6.75}{0.02}\right) = P(Z > 1.645) = 0.05$$

18- قطر بیلیتهای مترو دارای توزیع نرمال با میانگین 1/0 اینچ و انحراف معیار 0/03 اینچ است. حدود مشخصات ماشینهای تهیه بلیت 1.0 ± 0.05 اینچ است. الف) چند درصد از بلیتهای جدید در داخل این حدود مشخصات خواهد بود؟ ب) اگر یک نمونه 9 تایی از بیلیتها گرفته شود احتمال اینکه میانگین قطر نمونه در داخل حدود مشخصات فنی قرار گیرد، چقدر است؟

پاسخ:

الف)

$$X \sim N\left(1,0.03^2\right)$$
$$P(0.95 < X < 1.05) = P\left(\frac{0.95-1}{0.03} < Z < \frac{1.05-1}{0.03}\right) = P\left(\frac{-5}{3} < Z < \frac{5}{3}\right) = 2 * P\left(Z < \frac{5}{3}\right)$$
$$= 1 - 2P\left(Z > \frac{5}{3}\right) = 1 - 2P(Z > 1.66) = 0.0485$$

ب)

$$\overline{X} \sim N\left(1, \frac{0.03^2}{9}\right)$$
$$P\left(0.95 < \overline{X} < 1.05\right) = P\left(\frac{0.95-1}{0.01} < Z < \frac{1.05-1}{0.01}\right) = P(-5 < Z < 5) = 2 * P(Z < 5)$$
$$= 1 - 2 * P(Z > 5) = 1 - 2 * (0) = 1$$

19- توزیع نمرات در یک امتحان تقریبا نرمال، با میانگین 70 و انحراف معیار 7 است. الف) احتمال گرفتن نمره کمتر از 80 چقدر است؟ ب) اگر 49 نفر در امتحان شرکت کنند، احتمال اینکه معدل نمراتشان بین 68 و 72 قرار گیرد چقدر است؟ ج) احتمال اینکه تفاوت نمرات دو نفر (که بطور تصادفی انتخاب شده اند) بین 5- و 5+ قرار گیرد چقدر است؟

پاسخ:

الف)

$$X \sim N\left(70,7^2\right)$$
$$P(X < 80) = P\left(Z < \frac{80-70}{7}\right) = 1 - P(Z > 1.42) = 1 - 0.0778 = 0.9222$$

ب)

$$\overline{X} \sim N\left(70, \frac{7^2}{49}\right)$$
$$P\left(68 < \overline{X} < 72\right) = P\left(\frac{68-70}{1} < Z < \frac{72-70}{1}\right) = P(-2 < Z < 2) = 2 * P(Z < 2)$$
$$= 1 - 2 * P(Z > 2) = 1 - 2 * (0.0228) = 0.9544$$

ج)

با توجه به مفروضات مسئله ابتدا می بایست توزیع اختلاف نمرات را همراه با میانگین و واریانس آن بدست آورد، بنابراین خواهیم داشت:

$$X_1 \sim N\left(70,7^2\right)$$
$$X_2 \sim N\left(70,7^2\right)$$
$$Y = X_1 - X_2 \sim N\left(m_1 - m_2, s_1^2 + s_2^2\right) \Rightarrow Y \sim N(0,98)$$
$$P(-5 < Y < 5) = P\left(\frac{-5-0}{\sqrt{98}} < Z < \frac{5-0}{\sqrt{98}}\right) = 2 * P\left(Z < \frac{5}{\sqrt{98}}\right) = 1 - 2 * P\left(Z > \frac{5}{\sqrt{98}}\right) = 0.383$$

20- فرض کنید X_1 و X_2 متغیر تصادفی مستقل با توزیع نرمال به ترتیب، با میانگین و واریانس $m_1 = 0, s_1^2 = 4, m_2 = 1, s_2^2 = 9$ باشند. الف) $P\{X_2 \le 0\}$ را پیدا کنید. ب)

$P\{X_1+X_2>1\}$ را پیدا کنید. ج) اگر از X_1 و X_2 نمونه های تصادفی بترتیب 9 تایی و 16 تایی گرفته شود، توزیع متغییر تصادفی $Y=\overline{X}_1-\overline{X}_2$ چگونه است؟

پاسخ:

الف)

$$X_2 \sim N(1,9)$$

$$P(X_2 \le 0)=P\left(Z<\frac{0-1}{3}\right)=P\left(Z<\frac{-1}{3}\right)=P\left(Z>\frac{1}{3}\right)=0.3707$$

ب)

$$X_1 \sim N(0,4)$$

$$X_2 \sim N(1,9)$$

$$Y=X_1+X_2 \sim N\left(m_1+m_2, s_1^2+s_2^2\right) \Rightarrow Y \sim N(1,13)$$

$$P(X_1+X_2>1)=P(Y>1)=P\left(Z>\frac{1-1}{\sqrt{13}}\right)=P(Z>0)=0.5$$

ج)

$$\overline{X}_1 \sim N\left(0,\frac{4}{9}\right)$$

$$\overline{X}_2 \sim N\left(1,\frac{9}{16}\right)$$

$$Y=\overline{X}_1-\overline{X}_2 \sim N\left(m_1-m_2,\frac{s_1^2}{\sqrt{n_1}}+\frac{s_2^2}{\sqrt{n_2}}\right) \Rightarrow Y \sim N\left(-1,\frac{145}{144}\right)$$

21- میانگین نمونه دو نمونه تصادفی مستقل n تایی را با $\overline{X}_1$ و $\overline{X}_2$ مشخص کنید. مشاهدات تشکیل دهنده هر میانگین نمونه، دارای توزیع نرمال با میانگین مشترک m و واریانس مشترک 2 است. n را طوری تعیین کنید که احتمال کمتر بودن تفاوت $\overline{X}_1$ و $\overline{X}_2$ از 2، معادل 0/98 باشد، یعنی n را طوری پیدا کنید که $P\{-2\le \overline{X}_1-\overline{X}_2 \le 2\}=0.98$ باشد.

پاسخ:

$$\overline{X}_1 \sim N\left(m,\frac{2}{n}\right)$$

$$\overline{X}_2 \sim N\left(m,\frac{2}{n}\right)$$

$$Y=\overline{X}_1-\overline{X}_2 \sim N\left(m-m,\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\right) \Rightarrow Y \sim N\left(0,\frac{4}{n}\right)$$

$$P(-2\le Y\le 2)=0.98 \Rightarrow P\left(\frac{-2-0}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\le Z\le \frac{2-0}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)=0.98 \Rightarrow P\left(-\sqrt{n}\le Z\le \sqrt{n}\right)=0.98$$

$$\Rightarrow P\left(Z\le\sqrt{n}\right)-P\left(Z\le-\sqrt{n}\right)=0.98 \Rightarrow 1-P\left(Z\ge\sqrt{n}\right)-P\left(Z\ge\sqrt{n}\right)=0.98 \Rightarrow P\left(Z\ge\sqrt{n}\right)=0.01$$

حال با مراجعه به جدول توزیع نرمال در می یابیم:

$$P(Z \geq 2.32) = 0.01$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\sqrt{n} = 2.32 \Rightarrow n = 5.38 \Rightarrow n \approx 6$$

22-معلوم شده است که عمر نوعی لامپ الکتریکی، متغیر تصادفی با توزیع نرمال، میانگین مجهول m و انحراف معیار 200 ساعت است. ارزش یک دسته 1000 تایی از این لامپها m (1/5000)(1000) واحد پول است. قرار است خریدار یک نمونه تصادفی متشکل از n لامپ بگیرد و $\overline{X}$ (1/5000)(1000) واحد پول به سازنده پرداخت کند. بمنظور اینکه با احتمال 0/95 پول پرداخت شده توسط خریدار با مبلغ واقعی بیشتر از 20 واحد تفاوت نداشته باشد n چقدر باید باشد؟

پاسخ:

اگر متغییر X را طول عمر لامپ فرض نماییم آنگاه:

$$X \sim N(m,200^2)$$

$$\overline{X} \sim N\left(m,\frac{200^2}{n}\right)$$

$$P\left(\left|\left[1000*\frac{1}{5000}\overline{X}\right]-\left[1000*\frac{1}{5000}m\right]\right|<20\right)=0.95 \Rightarrow P\left(\frac{1}{5}\left|\overline{X}-m\right|<20\right)=0.95$$

$$\Rightarrow P\left(-100<\left|\overline{X}-m\right|<100\right)=0.95 \Rightarrow P\left(\frac{-100}{\frac{200}{\sqrt{n}}}<Z<\frac{100}{\frac{200}{\sqrt{n}}}\right)=1-2P\left(Z>\frac{100}{\frac{200}{\sqrt{n}}}\right)=0.95$$

$$\Rightarrow P\left(Z>\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.025 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{2}=1.96 \Rightarrow n=15.3\approx 16$$

توجه داشته باشید که درصورت مراجعه به جدول توزیع نرمال درمی یابیم: $P(Z>1.96)=0.025$

23-انحراف معیار قطرهای یک شافت و یاتاقان مقدار یکسان 0/001 اینچ است. میانگین فاصله بین قطرهای قطعه برابر با 0/0035 است. اگر هر قطر دارای توزیع نرمال باشد. احتمال عدم امکان سوار کردن شافت در یاتاقان چقدر است؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله چنانچه متغیرX را قطر شافت و متغیر Y را قطر یاتاقان فرض کنیم، شرط عدم سوار شدن این دوX>Y می باشد، بنابراین داریم:

$$X \sim N(0.0035,0.001^2)$$

$$Y \sim N(0.0035,0.001^2)$$

$$T = X - Y \sim N(0,0.00002)$$

$$P(X>Y)=P(X-Y>0)=P(T>0)=P\left(Z>\frac{0-0}{0.00002}\right)=P(Z>0)=0.5$$

24-دو مقاومت را بطور سری بهم متصل می کنیم. مقدار اسمی هر مقاومت معادل 10 اهم است. معلوم است که مقاومتها حول مقدار اسمی توزیع نرمال دارند و انحراف معیار هر یک برابر با 0/5 اهم است. احتمال اینکه مقاومت یک سیستم متشکل از دو مقاومت بیش از 21/5 اهم باشد چقدر است؟ انحراف معیارها چقدر باید باشند تا احتمال بیشتر بودن مقاومت سیستم از 21/5 اهم برابر با 0/01 باشد؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله برای بخش نخست خواهیم داشت:

$$R_1 \sim N(10,0.5^2)$$
$$R_2 \sim N(10,0.5^2)$$
$$R = R_1 + R_2 \sim N(20,0.5)$$
$$P(R_1 + R_2 > 21.5) = P(R > 21.5) = P\left(Z > \frac{21.5-20}{\sqrt{0.5}}\right) = P\left(Z > \frac{1.5}{\sqrt{0.5}}\right) = 0.0170$$

در پاسخ به قسمت دوم سئوال داریم:

$$R \sim N(20, s^2)$$
$$P(R > 21.5) = 0.01 \Rightarrow P\left(Z > \frac{21.5-20}{s}\right) = 0.01 \Rightarrow P\left(Z > \frac{1.5}{s}\right) = 0.01$$

حال با مراجعه به جدول توزیع نرمال درمی یابیم:

$$P(Z > 2.33) = 0.01$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{1.5}{s} = 2.33 \Rightarrow s = \frac{1.5}{2.33} = 0.6437$$

25-یک کامیون به حمل کارتنهای مملو از یک کلال اشتغال دارد. اگر وزن هر کارتن تقریبا توزیع نرمال با میانگین 50 پوند و انحراف معیار 5 پوند داشته باشد، کامیون می تواند چند کارتن حمل کند تا احتمال بیشتر شدن وزن محموله از یک تن تنها 0/01 باشد؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله چنانچه متغیرX را وزن هر کارتن و Y را وزن محموله فرض کنیم آنگاه خواهیم داشت:

$$X \sim N(50,5^2)$$
$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n*50, n*25)$$
$$P(Y > 1_{Ton}) = 0.01 \Rightarrow P(Y > 2008) = 0.01 \Rightarrow P\left(Z > \frac{2008-50n}{\sqrt{25n}}\right) = 0.01$$

حال با مراجعه به جدول توزیع نرمال درمی یابیم:

$$P(Z > 2.33) = 0.01$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{2008-50n}{\sqrt{25n}} = 2.33 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2008}{61.6} = 32.6$$

توجه داشته باشید از آنجا که هر پوند 0/498 کیلوگرم است، یک تن را برابر 2008 پوند لحاظ نموده ایم.

26-فرض کنید X,Y وZ متغیرهای مستقل نرمال، هریک با میانگین صفر و انحراف معیار یک است. $P\{X > Y + Z\}$ را پیدا کنید؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله و از آنجا که X,Y وZ متغییرهای نرمال استاندارد و مستقلند خواهیم داشت:

$$X \sim N(0,1)$$
$$Y \sim N(0,1)$$
$$Z \sim N(0,1)$$
$$T = X - Y - Z \sim N(0,3)$$
$$P(X > Y + Z) = P(T > 0) = P\left(Z > \frac{0-0}{\sqrt{3}}\right) = P(Z > 0) = 0.5$$

27- با در کنارهم قرار دادن شش قطعه مختلف یک شافت تشکیل می شود. طول قطعات مستقل شناخته شده است و توزیع نرمال با میانگینها و واریانسهای به ترتیب (0/05، 8/10)، (0/05، 7/25)، (0/06، 9/75)، (0/04، 3/45)، (0/10، 17/15)، (0/07، 6/20) دارد. اگر حدود مشخصات ناظر به قرار گرفتن طول شافت مونتاژ شده در فاصله 52 ± 1.5 باشد یک یافت با چه احتمالی در این فاصله قرار می گیرد؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$X_1 \sim N(8.1, 0.05)$$
$$X_2 \sim N(7.25, 0.05)$$
$$X_3 \sim N(9.75, 0.06)$$
$$X_4 \sim N(3.45, 0.04)$$
$$X_5 \sim N(17.15, 0.1)$$
$$X_6 \sim N(6.2, 0.07)$$
$$Y = \sum_{i=1}^{6} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{6} m_i, \sum_{i=1}^{6} s_i^2\right) \Rightarrow Y \sim N(51.9, 0.36)$$
$$P(50.5 < Y < 53.5) = P\left(\frac{50.5-51.9}{0.6} < Z < \frac{53.5-51.9}{0.6}\right) = P(-2.33 < Z < 2.66)$$
$$= P(Z < 2.66) - P(Z < -2.33) = 1 - P(Z > 2.66) - P(Z > 2.33) = 0.9861$$

28-خصیصه قابل سنجش یک وسیله برقی دارای توزیع نرمال با میانگین 10 واحد و انحراف معیار 3 واحد است. وسیله سنجش در معرض خطاست . توزیع احتمال این وسیله نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار 0/5 واحد است. احتمال اینکه نتیجه یک اندازه گیری توسط این وسیله از 13 واحد بیشتر باشد چقدر است؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله چنانچه متغییر X را خصیصه قابل سنجش، متغییر Y را میزان خطای دستگاه و T را مقدار اندازه گیری شده فرض نماییم خواهیم داشت:

$$X \sim N(10,3^2)$$
$$Y \sim N\left(0,\frac{1}{4}\right)$$
$$T = X + Y \sim N\left(10,\frac{37}{4}\right)$$
$$P(T > 13) = P\left(Z > \frac{13-10}{\sqrt{\frac{37}{4}}}\right) = P(Z > 0.98) = 0.1635$$

29- آلودگی هوا هر ساعت اندازه گیری می شود. میزان قابل قبول یک ماده که باعث آلودگی می شود 7/7 درصد اعلام شده است. اگر میزان واقعی این ماده دارای توزیع نرمال با میانگین 7/6 و واریانس 0/0016 باشد، و اگر خطای اندازه گیری متغییری تصادفی با میانگین صفر و واریانی 0/0009 باشد، الف) احتمال بیشتر شدن نتیجه یک اندازه گیری از 7/7 را پیدا کنید. ب) احتمال بیشتر شدن میانگین نتیجه سه اندازه گیری از 7/7 را پیدا کنید.

پاسخ:

الف)

با توجه به مفروضات مسئله چنانچه متغییر X را میزان واقعی ماده، متغییر Y را خطای اندازه گیری و T را مقدار اندازه گیری شده فرض نماییم خواهیم داشت:

$$X \sim N(7.6,0.0016)$$
$$Y \sim N(0,0.0009)$$
$$T = X + Y \sim N(7.6,0.0025)$$
$$P(X + Y > 7.7) = P(T > 7.7) = P\left(Z > \frac{7.7-7.6}{0.05}\right) = P(Z > 2) = 0.0228$$

ب)

$$T_1 \sim N(7.6,0.0025)$$
$$T_2 \sim N(7.6,0.0025)$$
$$T_3 \sim N(7.6,0.0025)$$
$$T_1 + T_2 + T_3 \Rightarrow \overline{T} \sim N\left(7.6,\frac{0.0025}{3}\right)$$
$$P(\overline{T} > 7.7) = P\left(Z > \frac{7.7-7.6}{\frac{0.05}{\sqrt{3}}}\right) = P(Z > 3.46) \approx 0$$

30- قطعه A در داخل قطعه B سوار می شود. این دو قطعه تقریبا دارای توزیع نرمال با خصوصیات زیر هستند: $m_A = 3$ اینچ، $m_B = 3.005$ اینچ، $s_A = 0.001$ اینچ، $s_B = 0.002$ اینچ. احتمال عدم امکان سوار شدن A در داخل B چقدر است؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$X_A \sim N\left(3, 0.001^2\right)$$
$$X_B \sim N\left(3.005, 0.002^2\right)$$
$$Y = X_A - X_B \sim N(-0.005, 0.000005)$$
$$P(X_A > X_B) = P(X_A - X_B > 0) = P(Y > 0) = P\left(Z > \frac{0+0.005}{\sqrt{0.000005}}\right) = P(Z > 2.23) = 0.0129$$

31- در مسئله 30، m_A چقدر باید باشد تا احتمال عدم امکان مونتاژ 0/01 شود؟

پاسخ:

$$X_A \sim N\left(m_A, 0.001^2\right)$$
$$X_B \sim N\left(3.005, 0.002^2\right)$$
$$T = X_A - X_B \sim N(m_A - 3.005, 0.000005)$$
$$P(X_A > X_B) = 0.01 \Rightarrow P(X_A - X_B > 0) = P(T > 0) = P\left(Z > \frac{0-(m_A - 3.005)}{\sqrt{0.000005}}\right) = 0.01$$

حال با مراجعه به جدول توزیع نرمال درمی یابیم:

$$P(Z > 2.33) = 0.01$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{0-(m_A - 3.005)}{\sqrt{0.000005}} = 2.33 \Rightarrow m_A = 2.99$$

32- قطعه A در داخل قطعه B سوار می شود. این دو قطعه تقریبا توزیع نرمال داشته باشند: $m_A = 3$ اینچ، $m_B = 3.005$ اینچ باشند و بعلاوه اگر، $s_A = s_B$ باشد مقدار مشترک انحراف معیارها را طوری تعیین کنید که احتمال کمتر شدن فاصله از 0/001 بیش از 1 درصد نباشد.

پاسخ:

$$X_A \sim N\left(3, s^2\right)$$
$$X_B \sim N\left(3.005, s^2\right)$$
$$T = X_B - X_A \sim N\left(0.005, 2 * s^2\right)$$
$$P(X_B - X_A < 0.001) = 0.01 \Rightarrow P(T < 0.001) = P\left(Z < \frac{0.001-0.005}{\sqrt{2}s}\right) = 0.01$$
$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{-0.004}{\sqrt{2}s}\right) = 0.001 \Rightarrow P\left(Z > \frac{0.004}{\sqrt{2}s}\right) = 0.001$$

حال با مراجعه به جدول توزیع نرمال درمی یابیم:

$$P(Z > 2.33) = 0.01$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{0.004}{\sqrt{2}s} = 2.33 \Rightarrow s = \frac{0.004}{\sqrt{2} * 2.33} = 0.013 \Rightarrow s^2 = 0.00017$$

33- اطلاعات قبلی دال بر این است که انحراف معیار ابعاد دو قطعه که یکی در داخل دیگری سوار می شود، یکسان و برابر با 0/0012 اینچ است. مطلوب است که احتمال کمتر شدن یک فاصله از 0/003 اینچ معادل 0/02 باشد. طراح باید چه مقداری را به عنوان میانگین تفاوت تعیین کند؟ توزیعها را نرمال فرض کنید و مونتاژ قطعات را تصادفی بگیرید.

پاسخ:

$$X_A \sim N\left(m_A, 0.0012^2\right)$$
$$X_B \sim N\left(m_B, 0.0012^2\right)$$
$$T = X_B - X_A \sim N\left(m_B - m_A, 0.00000288\right) \Rightarrow T \sim N\left(m_T, 0.00000288\right)$$
$$P\left(X_B - X_A < 0.003\right) = 0.02 \Rightarrow P\left(T < 0.003\right) = 0.02 \Rightarrow P\left(Z < \frac{0.003 - m_T}{\sqrt{0.00000288}}\right) = 0.02$$

حال با مراجعه به جدول توزیع نرمال درمی یابیم:

$$P\left(Z > 2.05\right) = 0.02$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{0.003 - m_T}{\sqrt{0.00000288}} = 2.05 \Rightarrow m_T = -0.00047$$

توجه داشته باشید علات منفی شدن m_T آن است که m_T اختلاف میانگین قطعهB از میانگین قطعهA می باشد و بدیهی است چنانچه اختلاف میانگین قطعهA از میانگین قطعهB را محاسبه نماییم عددی مثبت خواهد بود.

34- دو مقاومت 8 اهمی به صورت سری به هم وصل می شوند به طوری که مونتاژ نهایی 16 ± 0.25 اهم باشد. الف) با این فرض که مقاومتها طبق توزیع نرمال واحدی تعریف می شوند، حدود مشخصات قطعات را پیدا کنید. ب) اگر حدود تلرانس طبیعی (حدودی که به استثنای 5 درصد، بقیه اقلام باید در آن قرار گیرند) بر حدود مسخصات طراحی منطبق باشد، با چه احتمالی مقاومت متوسط 5 مونتاژ نهایی از 16/05 اهم بیشتر می شود؟

پاسخ:

الف) از آنجا که مقاومتها را بصورت سری بهم متصل نموده ایم، مقاومت نهایی حاصل از اتصال آن دو بهم برابر با مجموع مقاومتها می باشدحال با توجه به سایر مفروضات مسئله خواهمیم داشت:

$$a = 0.0027 \Rightarrow \frac{a}{2} = 0.00135$$
$$R_1 \sim N\left(m, s^2\right)$$
$$R_2 \sim N\left(m, s^2\right)$$
$$R = R_1 + R_2 \sim N\left(2m, 2s^2\right)$$
$$P\left(R_1 > U\right) = 0.00135 \Rightarrow P\left(Z > \frac{U - m}{s}\right) = 0.00135$$

حال با مراجعه به جدول توزیع نرمال در می یابیم:

$$P\left(Z > 3\right) = 0.00135$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{U-m}{s}=3 \Rightarrow U=m+3s$$

و بهمین صورت برای حد پایین طراحی هم خواهیم داشت:

$$P(R_1<L)=0.00135 \Rightarrow P\left(Z<\frac{L-m}{s}\right)=0.00135$$

حال با مراجعه به جدول توزیع نرمال در می یابیم:

$$P(Z<-3)=0.00135$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{L-m}{s}=-3 \Rightarrow L=m-3s$$

حال با توجه به حدود طراحی بدست آمده و میانگین و انحراف معیار متغییر عرض شکاف، حدود مشخصات طراحی برابر است با: $m\pm 3s$، درنتیجه می بایستی مقادیر m و s را با استفاده از مقادیر احتمال خروج مقاومت سری شده از حدود بالا و پایین محاسبه نماییم، بنابراین خواهیم داشت:

$$P(15.75<R<16.25)=0.0027$$

$$P(R>16.25)=\frac{a}{2}=0.00135 \Rightarrow P\left(Z>\frac{16.25-2m}{\sqrt{2}s}\right)=0.00135$$

$$P(R<15.75)=\frac{a}{2}=0.00135 \Rightarrow P\left(Z<\frac{15.75-2m}{\sqrt{2}s}\right)=0.00135$$

با توجه به مقادیر بدست آمده در بالا و با مراجعه به جدول توزیع نرمال در می یابیم:

$$P(Z>3)=0.00135$$
$$P(Z<-3)=0.00135$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\dfrac{16.25-2m}{\sqrt{2}s}=3\\[2mm]\dfrac{15.75-2m}{\sqrt{2}s}=-3\end{cases}$$

با حل دو معادله بالا حدود مشخصات طراحی برابر خواهد بود با:

$$m=8$$
$$s=0.059$$
$$m\pm 3s \Rightarrow 8\pm 3(0.059)$$

توجه داشته باشید بدلیل متقارن بودن توزیع نرمال احتمال خروج از حد بالا و پایین را با یکدیگر برابر و مساوی با $\frac{a}{2}$ فرض کردیم.

ب) با توجه به اینکه 5 مونتاژ نهایی یعنی 5 سری از 2 مقاومت که بطور سری بهم متصل شده اند با یکدیگر سیستمی را ایجاد می کنند داریم:

$$R = R_1 + R_2 \sim N\left(2m, 2s^2\right)$$

$$\overline{R} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} R_i \sim N\left(2m, \frac{2s^2}{5}\right)$$

$$P\left(\overline{R} > 16.05\right) = P\left(Z > \frac{16.05 - 2m}{\frac{\sqrt{2}s}{\sqrt{5}}}\right) = P\left(Z > \frac{16.05 - 2(8)}{\frac{\sqrt{2}(0.059)}{\sqrt{5}}}\right) = P(Z > 1.33) = 0.0918$$

35- در مرحله ای از تولید یک کالا، باید یک میله استوانه ای با سطح مقطع دایره ای شکل در داخل یک قطعه مجوف قرار داده شود. اندازه گیریهای کنترل کیفیت نشان می دهد که توزیعهای قطر میله و قطر حفره، نرمال با ثابتهای زیر است:

قطر میله: میانگین 5/01 سانتی متر، انحراف معیار 0/03 سانتی متر

قطر حفره: میانگین 5/1 سانتی متر، انحراف معیار 0/04 سانتی متر

اگر قطعات بطور تصادفی برای مونتاژ انتخاب شوند، احتمال عدم امکان مونتاژ چقدر است؟

پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله شرط عدم مونتاژ دو قطعه در یکدیگر بزرگ بودن قطر میله از حفره می باشد، بر همین اساس خواهیم داشت:

$$X \sim N\left(5.01, 0.03^2\right)$$

$$Y \sim N\left(5.1, 0.04^2\right)$$

$$X - Y \sim N(-0.09, 0.0025)$$

$$P(X > Y) = P(X - Y > 0) = P\left(Z > \frac{0 + 0.09}{\sqrt{0.0025}}\right) = P(Z > 1.8) = 0.0359$$

36- الف) فرض کنید عمر نوعی لامپ الکترونیکی بر حسب ساعت توزیع نرمال با میانیگن 160 ساعت داشته باشد. حدود مشخصات طراحی ناظر بر این است که محصول به احتمال 0/95 در فاصله 120 ساعت تا 200 ساعت قرار گیرد. بزرگترین انحراف معیار مجاز برای فرآیند که کیفیت آن را حفظ کند چقدر است؟ ب) اگر فرآیند مقدار s بدست آمده در بند الف) را داشته باشد، به چه احتمالی متوسط یک نمونه دوتایی در خارج حدود مشخصات قرار می گیرد؟

پاسخ:

الف)

اگر متغییر X را عمر لامپ در نظر بگیریم داریم:

$$X \sim N\left(160, s^2\right)$$

$$P(120 < X < 200) = 0.95 \Rightarrow P\left(\frac{120 - 160}{s} < Z < \frac{200 - 160}{s}\right) = 0.95 \Rightarrow P\left(\frac{-40}{s} < Z < \frac{40}{s}\right) = 0.95$$

$$\Rightarrow 1 - 2 * P\left(Z > \frac{40}{s}\right) = 0.95 \Rightarrow P\left(Z > \frac{40}{s}\right) = 0.025$$

حال با مراجعه به جدول توزیع نرمال درمی یابیم:

$$P(Z>1.96)=0.025$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{40}{s}=1.96\Rightarrow s=\frac{40}{1.96}=20.4$$

ب)

$$X_1\sim N(160,20.4^2)$$
$$X_2\sim N(160,20.4^2)$$
$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\Rightarrow\overline{X}\sim N\left(m,\frac{s^2}{n}\right)\Rightarrow\overline{X}\sim N\left(160,\frac{20.4^2}{2}\right)$$
$$P(\overline{X}>200)+P(\overline{X}<120)=P\left(Z>\frac{200-160}{\frac{20.4}{\sqrt{2}}}\right)+P\left(Z<\frac{120-160}{\frac{20.4}{\sqrt{2}}}\right)=P(Z>2.77)+P(Z<-2.77)$$
$$=2*P(Z>2.77)=2*0.00280=0.0056$$

37- یک نیروی محرکه E ولتی، یک جریان I آمپری را از مقاومت R اهمی می گذراند. به موجب قانون اهم، داریم E=IR. فرض کنید E و R متغییرهای تصادفی با توزیع نرمال باشند که تلرانس طبیعی 3 انحراف معیار آنها، اهم $R=6\pm0.2$ و ولت $E=60\pm2$ است. با فرضهای معمول تلرانس طبیعی I را پیدا کنید. با عبارت $I=\frac{E}{R}$ شروع کنید.

پاسخ:

$$R=m\pm3s=6\pm0.2\Rightarrow m_R=6,s_R=\frac{0.2}{3}$$
$$E=m\pm3s=60\pm2\Rightarrow m_E=60,s_E=\frac{2}{3}$$
$$E=IR\Rightarrow \mathrm{E}(E)=\mathrm{E}(I)*\mathrm{E}(R)\Rightarrow 60=\mathrm{E}(I)*6\Rightarrow\mathrm{E}(I)=10$$
$$Var(E)=Var(I*R)=\mathrm{E}(I^2*R^2)-(\mathrm{E}(I*R))^2$$

حال مقدار هریک از دو عبارت $(\mathrm{E}(I*R))^2$ و $\mathrm{E}(I^2*R^2)$ را بطور جداگانه محاسبه می نماییم:

$$(\mathrm{E}(I*R))^2=(\mathrm{E}(I)*\mathrm{E}(R))^2=(10*6)^2=3600$$
$$\mathrm{E}(I^2*R^2)=\mathrm{E}(I^2)*\mathrm{E}(R^2)$$

حال از آنجا که مقادیر هیچیک از دو مقدار $\mathrm{E}(R^2)$ و $\mathrm{E}(I^2)$ را نمی توان بصورت مستقل بدست آورد از رابطه محاسبه واریانس و فرمول اولیه همانند زیر عمل می کنیم:

$$Var(R^2)=\mathrm{E}(R^2)-(\mathrm{E}(R))^2\Rightarrow\left(\frac{0.2}{3}\right)^2=\mathrm{E}(R^2)-(6)^2\Rightarrow\mathrm{E}(R^2)=\left(\frac{0.2}{3}\right)^2+36=36.0044$$
$$Var(E)=\mathrm{E}(I^2*R^2)-(\mathrm{E}(I*R))^2\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^2=\mathrm{E}(I^2*R^2)-3600\Rightarrow\mathrm{E}(I^2*R^2)=3600.44$$
$$\Rightarrow\mathrm{E}(R^2)*\mathrm{E}(I^2)=3600.44\Rightarrow 36.0044*\mathrm{E}(I^2)=3600.44\Rightarrow\mathrm{E}(I^2)=100$$

حال با بدست آمدن مقادیر مجهول و با استفاده از فرمول واریانس خواهیم داشت:

$$Var(I) = \mathrm{E}(I^2) - (\mathrm{E}(I))^2 = 100 - (10)^2 = 0$$

با توجه به مقادیر بالا تلرانس طبیعی I برابر است با: $m \pm 3s = 10 \pm 3*0 = 10$

38- در یک قطعه فلز چها گوش با قطر T ، عرضX و طول Y دو سوراخ مدور با قطرهای R_1 و R_2 ایجاد می شود. وزن فلز باقی مانده پس از ایجاد سوراخها $W = cT\left(XY - pR_1^2 - pR_2^2\right)$ است. تصور کنید که تمام ابعاد متغییرهای تصادفی مستقل با توزیع نرمال حول مقادیر اسمی خود باشند، به طوری که 99/9 درصد از هر توزیع در داخل حدود معلوم مشخصات طراحی قرار گیرد. یک تقریب منطقی برای انحراف معیار W پیدا کنید.

پاسخ:

39-معلوم است که: فاصله = سرعت * زمان، با استفاده از بست تیلور حول میانگینهای سرعت و زمان رابطه ای برای ارائه تقریبی واریانس فاصله برحسب واریانس سرعت و واریانس زمان ارائه کنید.

پاسخ:

40-مقدار ثابت جاذبه باید از طریق مشاهده سقوط یک جسم و از طریق رابطه $g = 2S/t^2$ تعیین شود. تجربه گر آزاد است که S را در 4 پا و t را حدود 0/5 ثانیه یا S را در 16 پا و t را حدود 1 ثانیه انتخاب کند. فرض کنید انحراف معیار S معادل 0/002 و انحراف معیار زمان ثبت شده معادل 0/04 باشد. اگر امید ریاضی S برابر با 4 و امید ریاضی t برابر با 0/5 باشد، واریانس g را پیدا کنید. در تعیین g با واریانس کمتر، کدام S بهتر است؟

پاسخ:

با توجه به امکان انتخاب، واریانس g را با هر دو انتخاب محاسبه کرده و آنگاه کمترین را انتخاب می کنیم:

$$(S_0, t_0) = \left(4, \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad (S_0^{'}, t_0^{'}) = (16,1)$$

$$g = g_0 + \nabla g \begin{pmatrix} S - S_0 \\ t - t_0 \end{pmatrix}$$

از آنجا که استفاده از این فرمول مشکل می باشد از روش زیر استفاده می نماییم:

$$f(S,t)= f(S_0,t_0)+\nabla f(S_0,t_0)\begin{pmatrix} S-S_0 \\ t-t_0 \end{pmatrix}$$

$$f(S_0,t_0)=g=\frac{2S}{t^2}=\frac{2*4}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=32$$

$$\nabla f(S,t)=\left(\frac{\partial f}{\partial S},\frac{\partial f}{\partial t}\right)=\left(\frac{2}{t^2},\frac{-4S}{t^3}\right)\Rightarrow \nabla f(S_0,t_0)=\left(\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2},\frac{-4(4)}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}\right)=(8,-128)$$

$$\Rightarrow f(S,t)=32+(8,-128)\begin{pmatrix} S-4 \\ t-\frac{1}{2} \end{pmatrix}=32+8S-32-128t+64=8S-128t+64$$

$$\Rightarrow Var(g)=Var(8S)+Var(-128t)+Var(64)=8^2Var(S)+128^2Var(t)+0$$
$$=(64*0.002^2)+(128^2*0.04^2)=26.2146$$

حال بهمین صورت برای گزینه دوم عمل نموده و واریانس g را محاسبه می نماییم:

$$f(S,t)= f(S_0,t_0)+\nabla f(S_0,t_0)\begin{pmatrix} S-S_0 \\ t-t_0 \end{pmatrix}$$

$$f(S_0,t_0)=g=\frac{2S}{t^2}=\frac{2*16}{(1)^2}=32$$

$$\nabla f(S,t)=\left(\frac{\partial f}{\partial S},\frac{\partial f}{\partial t}\right)=\left(\frac{2}{t^2},\frac{-4S}{t^3}\right)\Rightarrow \nabla f(S_0,t_0)=\left(\frac{2}{(1)^2},\frac{-4(16)}{(1)^3}\right)=(2,-64)$$

$$\Rightarrow f(S,t)=32+(2,-64)\begin{pmatrix} S-16 \\ t-1 \end{pmatrix}=32+2S-32-64t+64=2S-64t+64$$

$$\Rightarrow Var(g)=Var(2S)+Var(-64t)+Var(64)=2^2Var(S)+64^2Var(t)+0$$
$$=(4*0.002^2)+(64^2*0.04^2)=6.55$$

حال از آنجا که گزینه با کمترین واریانس مد نظر می باشد، لذا $(S_0^{'},t_0^{'})=(16,1)$ مورد قبول است و انتخاب می گردد.