

$$A \cap B = \emptyset$$

$$(A \cup B)^c$$

$$1 - P(A) + P(B^c)$$

$$(P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$(A \Delta B)$$

$$P(A) - P(A \cap B)$$

$$E\left(\frac{X_1}{X_1 + X_2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{y}$$

$$\frac{\sin}{\cos} = \tan$$

$$-\infty$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{x} \times \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{y} = 0$$

$$N(0, 1)$$

$$(x, y) = \frac{1}{y}$$

$$(x, z) = 0$$

$$\rightarrow \text{مستقل}$$

$$y + \frac{z}{x} < 1$$

$$x < \frac{1-0}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$B(2, 1)$$

$$\left(\frac{x}{y} \leq 0.5\right)$$

$$(x \leq 0.5y)$$

۵۱- اگر A و B دو پيشامد غير تهی و ناسازگار باشند، کدام يك از روابط زیر همواره صحيح است؟

$$P(A^c \cap B) = 1 - P(A) + P(B) \quad (1)$$

$$P[(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)] = P(A) + P(B) \quad (2)$$

$$P(A \cap B^c) = 1 + P(A) - P(B) \quad (3)$$

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) \quad (4)$$

۵۲- اگر X_1 و X_2 متغيرهای مستقل با توزيع نمایی و میانگين يك باشند، در اين

$$Exp(\lambda=1)$$

شرایط $E\left(\frac{X_1}{X_1 + X_2}\right)$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{2}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

۵۳- اگر تابع توزيع تجمعی احتمال متغير تصادفی X به صورت زیر در دست باشد،

$$F_X(x) = \alpha + \beta \left(\text{Arctan} \frac{x}{\gamma}\right); -\infty < x < \infty$$

$$\alpha + \beta \frac{\pi}{\gamma} = 1$$

آنگاه ثابت‌های α و β به ترتیب عبارتند از:

$$\pi \text{ و } 1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{\pi} \text{ و } \frac{1}{\gamma}$$

$$\frac{1}{\pi} \text{ و } 1 \quad (4)$$

$$\pi \text{ و } \frac{1}{\gamma} \quad (3)$$

۵۴- اگر X و Y و Z متغيرهای تصادفی نرمال با میانگين صفر و واریانس يك باشند و

همچنين ضريب همبستگی بين X و Y برابر $\frac{1}{\gamma}$ ، ضريب همبستگی بين Y و Z

برابر صفر، و X و Z مستقل از هم باشند، مقدار تقریبی $P(X + Y + Z < 1)$

به کدام يك از گزینه‌های زیر نزديک است؟

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$

$$1 \quad (3)$$

۵۵- اگر متغيرهای تصادفی X و Y يك نمونه تصادفی دوتایی از جمعیتی با توزيع

احتمال $f_X(x) = 2x$; $0 \leq x \leq 1$ باشند، مقدار $P\left(\frac{X}{Y} \leq 0.5\right)$ چند است؟

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{16} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{8} \quad (3)$$

۵۶- اگر X_1 و X_2 و X_3 یک نمونه تصادفی ۳ تایی از جمعیتی با توزیع پواسون با میانگین ۲ باشند، مقدار $P(\bar{X} < \frac{1}{3})$ چند است؟

$$2e^{-2} \quad (2)$$

$$2e^{-6} \quad (1)$$

$$e^{-6} \quad (3)$$

تعداد ساعتی که یک ماشین تولیدی در ماه بیکار است متغیر تصادفی X است که از یک توزیع گاما با پارامترهای $\alpha = 3$ و $\beta = 2$ برخوردار است. زمانی که بابت بیکار بودن ماشین به بار می آید از طریق رابطه $L = 3 \circ X + 2X^2$ مشخص شده است. مقدار مورد انتظار زیان چقدر است؟ (ضمناً در این مسئله فرم تابع چگالی گاما به صورت زیر است)

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

$$276 \quad (2)$$

$$175 \quad (1)$$

$$480 \quad (4)$$

$$346 \quad (3)$$

۵۸- یک معدنچی در معدنی گرفتار شده است که دارای سه مسیر است. مسیر اول منجر به تونلی می شود که بعد از ۲ ساعت معدنچی نجات می یابد ولی مسیرهای دوم و سوم منجر به تونلهایی می شوند که به ترتیب بعد از ۳ و ۵ ساعت او را به جای اولش برمی گردانند. اگر فرض کنیم معدنچی در هر بار که می خواهد یکی از سه مسیر را انتخاب کند، آن ها را با احتمال یکسان انتخاب نماید و X زمان نجات معدنچی باشد، تابع مولد گشتاور X کدام است؟

$$\frac{e^{2t}}{3 - e^{3t} - e^{5t}} \quad (2)$$

$$\frac{e^{3t} + e^{5t}}{3 - e^{2t}} \quad (1)$$

$$e^{2t} + e^{3t} + e^{5t} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3}(e^{2t} + e^{3t} + e^{5t})$$

۵۹- فرض کنید متغیرهای تصادفی مستقل X_1, X_2, \dots, X_n دارای واریانس یکسان σ^2 باشند و متغیرهای تصادفی U و V به صورت زیر تعریف شوند، در این شرایط ضریب همبستگی بین U و V کدام است؟

$$U = 2X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1}$$

$$\sigma^2$$

$$V = X_2 + X_3 + \dots + 2X_n$$

$$\frac{n}{n+2} \quad (2)$$

$$\frac{n-2}{n+2} \quad (1)$$

$$\frac{n+1}{n+2} \quad (4)$$

$$\frac{n-1}{n+2} \quad (3)$$

$$2+4$$

$$(n-2)+4$$

$$x_1 + x_2 < 1$$

$$< 1$$

$$x=0 = e^{-2}$$

$$x, \lambda=2$$

$$+2x^2$$

$$(2 \circ x + 2x^2)$$

$$+2$$

$$h+2$$

$$E(XY)$$

$$(n+2)^2 6^{-2}$$

$$V(U, V)$$

$$\text{Var}(U), \text{Var}(V)$$

$$n+2$$

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با شرایط $P(X \geq 0) = 1$ و

$P(X \geq 15) = \frac{1}{5}$ باشد. گزینه صحیح کدام است؟

$V(X) = \frac{1}{3}$ (۲) $V(X) \geq 1$ (۱)

$E(X) \geq 3$ (۴) $E(X) \leq 2$ (۳)

متغیر تصادفی X از توزیع $f(x) = 0.5e^{-0.5x}$, $0 < x$ پیروی می کند. نمونه

تصادفی X_1, X_2 را از این توزیع می گیریم و متغیر تصادفی $Y = \frac{X_2}{X_1}$ را تعریف

می کنیم. در این صورت در مورد امید ریاضی متغیر تصادفی $Z = Y - 2$ کدام گزینه درست است؟

(۱) وجود ندارد. (۲) کوچکتر از ۱- است.

(۳) مساوی با ۱- است. (۴) از امید ریاضی Y کوچکتر است.

متغیر تصادفی X از توزیع $f(x) = \theta e^{-\theta x}$, $0 < x$ پیروی می کند. به منظور

آزمون فرض دو طرفه $H_0: \text{Var}(x) = 4$ نمونه تصادفی X_1, X_2 را گرفته

و آماره آزمون را به صورت $Z = X_1 + X_2$ تعریف کرده ایم. در این صورت کدام

اظهار نظر در مورد آماره Z صحیح است؟

(۱) تنها وقتی واریانس Z بزرگتر از میانگین آن خواهد بود که فرض صفر صحیح باشد.

(۲) اگر فرض صفر صحیح باشد تابع چگالی Z یکنوا توزی خواهد بود.

(۳) هرگاه فرض صفر صحیح باشد Z از توزیع مربع کای با چهار درجه آزادی

پیروی می کند. (۴) صرف نظر از اینکه فرض صفر صحیح است یا نه، Z از توزیع گاما با میانگین

چهار پیروی می کند.

متغیرهای تصادفی X و Y با توزیع های، به ترتیب، $t(n)$ و $F(1, n)$ مفروض اند و

می دانیم $P\{X > c\} = 0.995$ و $P\{Y < b\} = 0.99$ است به طوری که

$b - c = 12$ باشد. در این صورت گزینه درست کدام است؟

$c = 3$ (۲) $b = 16$ (۱)

$b = 8$ (۴) $b = 9$ (۳)

فرض کنید $0.9, 0.7, 0.5, 0.4$ یافته های یک نمونه تصادفی از توزیعی

با تابع چگالی احتمال زیر باشند، برآورد ناریب θ کدام است؟

$\bar{X} =$ $f_{\theta}(x) = \frac{2x}{\theta^2}$, $0 < x < \theta$

0.74 (۱) 0.84 (۲)

0.56 (۳) 0.65 (۴)

$0 \leq P \leq 1$

$x) = 2$

$\geq a) \leq \frac{E(x)}{a}$

$\geq 15) \leq \frac{E(x)}{15} = \frac{1}{5}$

$) = \frac{1}{3}$

$\lambda = \frac{1}{4}$

$\frac{x_2}{x_1}$

$\frac{x_2}{x_1} - 2$

$\frac{x_2}{x_1} - 2)$

$\frac{x_2}{x_1} - 2)$

θ

$\delta^2 = 4$

$\frac{p}{x^2}$

$(t_n > c) = 0.995$

$(t_n < b) = 0.99$

$b - c = 12$

$\int_0^{\theta} x^2 dx = \frac{\theta^3}{3}$

$\frac{\theta^3}{3} \times \frac{2}{\theta^2} = \frac{2}{3} \theta = \bar{X}$

-۶۵

متغیرهای تصادفی X و Y مستقلاً از توزیع‌های نرمال، به ترتیب $N[0, \sigma_x^2]$ و $N[1, \sigma_y^2]$ پیروی می‌کنند. به منظور آزمودن فرضی یک طرفه در مورد همگنی واریانس‌ها، دو نمونه تصادفی X_1, X_2, \dots, X_n و Y_1, Y_2, \dots, Y_n را مستقل از هم می‌گیریم و مقدار 0.05 را برای α انتخاب می‌کنیم. ابتدا فرض صفر را به گونه‌ای می‌نویسیم که فرض ۱ متناظر با آن به صورت $H_1: \sigma_x > \sigma_y$ باشد. تصور کنید تحت این شرایط مقدار 20 برای هر توان‌ترین آماره آزمون به دست آید. با این داده‌ها کدام فرض را پذیرفته‌ایم و ناحیه پذیرش کدام است؟

$$\begin{aligned} & \sigma_x > \sigma_y \quad (1) \quad (-\infty, 19] \text{ و } \sigma_x \leq \sigma_y \quad (2) \quad [19, \infty) \\ & \sigma_x \leq \sigma_y \quad (3) \quad [0.053, \infty) \text{ و } \sigma_x > \sigma_y \quad (4) \quad [0.053, \infty) \end{aligned}$$

-۶۶

در مدل رگرسیون خطی $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon$ اگر $x_1 = 1, x_2 = 0$ و $x_3 = -1$ باشند، برآورد به روش حداقل مربعات (α, β) کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left(\bar{y}, \frac{y_1 - y_2}{2} \right) \\ (2) \quad & (2\bar{y}, 2(y_1 - y_2)) \\ (3) \quad & \left(2\bar{y}, \frac{y_1 - y_2}{2} \right) \\ (4) \quad & \left(\bar{y}, \frac{y_1 - y_2}{2} \right) \end{aligned}$$

-۶۷

فرض کنید $0.65, 0.41, 0.81, 0.94, 0.49, 0.19, 0.59, 0.27$ و 0.33 یافته‌های یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\theta, 1)$ باشند. برای آزمون $H_0: \theta = 0$ در مقابل $H_1: \theta = 1$ مقدار p - مقدار (P-value) آزمون کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & 0.0945 \\ (2) \quad & 0.0549 \\ (3) \quad & 0.0594 \\ (4) \quad & 0.0495 \end{aligned}$$

$$(0, \infty)$$

-۶۸

رابطه ذاتی بین متغیر تصادفی Y و متغیر مستقل x به صورت $E(Y|x) = Bx$ است به طوری که $B > 0$ باشد. اگر به ازای سطوح متمایز x_1, x_2, \dots, x_n همه Y_i ها به طور مستقل از هم از توزیع نمایی منفی با میانگین‌های Bx_1, Bx_2, \dots, Bx_n پیروی کنند، کدام اظهار نظر داده شده در زیر در مورد برآوردگر حداقل مربع انحرافات B ، یعنی \hat{B} ، درست است؟

$$(1) \quad \hat{B} \text{ برای } B \text{ اریب است.}$$

$$(2) \quad \hat{B} \text{ از توزیع نمایی منفی پیروی می‌کند.}$$

$$(3) \quad \hat{B} \text{ قطعاً ترکیبی خطی از } y_i \text{ هاست.}$$

$$(4) \quad \text{برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر } B \text{ همان } \hat{B} \text{ خواهد بود.}$$

۱
۲
۳
۴
۵

H_0
 $\bar{x} < 4.41$
 \bar{x}

۰.۴۹

+ ۱.۴

۰.۲

۱.۵۹

۰.۴۹

۲.۱۸

۴.۹۱

$$\mu_y = \frac{SSTr}{K-1}$$

$$MSE = \frac{SSTr}{N-K}$$

$$\frac{\bar{x} - \bar{y} + \frac{\mu_x - \mu_y}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}}$$

$$SSE = \frac{SSTr}{n-2}$$

SSTr

داروی جدید تنظیم کننده فشار خون به بازار عرضه شده است. جهت بررسی اثر این دارو ۲۵ نفر مورد آزمایش قرار می گیرند. فشار خون این افراد قبل از مصرف دارو (x) و پس از مصرف دارو (y) به مدت ۶ ماه اندازه گرفته می شود. خلاصه اطلاعات زیر بدست آمده است. برای آزمون $H_0: \mu_x - \mu_y = 0$ مقدار آماره آزمون کدام است؟

$$\bar{x} = 18 \text{ و } \bar{y} = 15 \text{ و } S_x^2 = \frac{1}{24} \sum (x_i - \bar{x})^2 = 25 \text{ و } S_y^2 = 26$$

$$S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -19.5$$

$$2.5 \text{ (۲)} \quad 3.2 \text{ (۱)}$$

$$1.5 \text{ (۴)} \quad 3.0 \text{ (۳)}$$

می خواهیم میزان محصول تولیدی سه ماشین صنعتی را با هم مقایسه کنیم. خلاصه اطلاعات ارائه شده در زیر متوسط تولید ماشین ها در نوبت های مختلف است. با فرض نرمال بودن و همگن بودن واریانس ها، مقدار مجموع مربعات اختلاف میانگین هر تیمار از میانگین کل (SSTr) کدام است؟

	۱	۲	۳	n	
اندازه نمونه	۷	۹	۸		۲۸ (۱)
میانگین نمونه ای	۵۰	۵۰	۵۲	μ	۲۸.۵ (۲)
انحراف معیار نمونه ای	۱	۱/۱	۱	σ	۸۴ (۳)
					۸۴.۵ (۴)

تحقیق در عملیات ۱

مدل برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید: $Max \ z = 3x_1 + x_2 + 2x_3$

$$s.t. \quad x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 20$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

اگر جدول بهینه مدل فوق به شکل زیر باشد، الف) C_2 (ضریب متغیر x_2 در تابع هدف) در چه بازه ای می تواند قرار داشته باشد تا جواب همچنان بهینه باقی بماند؟

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	۱	۸	۰	۰	۳	۴	۱۰۰
x_3	۰	۳	۰	۱	۱	۱	۳۰
x_2	۰	۵	۱	۰	۱	۲	۴۰

$$C_2 \geq -\frac{3}{5} \text{ (۱)} \quad C_2 \geq \frac{2}{5} \text{ (۱)}$$

$$C_2 \leq -\frac{3}{5} \text{ (۴)} \quad C_2 \leq \frac{2}{5} \text{ (۳)}$$

$$8 + 5\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -\frac{8}{5} + 1$$

$$4 + 5\Delta \geq -3 \Rightarrow \Delta \geq -\frac{7}{5}$$

$$4 + 2\Delta \geq -2 \Rightarrow \Delta \geq -3$$