۵۱.

تعداد زیرمجموعه های ۸ عنصری مجموعه $\{۱,۲,...,۱۲\}$ که حداقل ۴ عنصر آن از مجموعه $\{۱,۲,...,۶\}$ باشند، برابر است با:

$$\binom{۶}{۴}\binom{۶}{۴}+\binom{۶}{۵}\binom{۶}{۳}+\binom{۶}{۶}\binom{۶}{۲}=۳۶۰$$

۵۲. مثال نوع ۳ اشیاء و ظرفها ، صفحه ۱۶ جلد اول جزوه کلاسی امسال دکتر ایوزیان

تعداد حالات تقسیم ۸ توپ متفاوت در ۵ ظرف یکسان طوریکه در ۳ ظرف هریک ۲ توپ و در ۲ ظرف دیگر هر یک ۱ توپ قرار گیرد، برابر است با:

$$\frac{۸!}{۲!\times ۲!\times ۲!\times ۱!\times ۱!}\times\frac{۱}{۳!\times ۲!}=۴۲۰$$

۵۳. شبیه مثال ص ۴۹ جزوه کلاسی ج اول امسال دکتر ایوزیان

احتمال آنکه C قبل از B بازی را ببرد، برابر است با:

$$\frac{۵}{۷}\times\frac{۳}{۱۰}+\frac{۵}{۷}\times\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۵}{۷}\times\frac{۳}{۱۰}+...=\frac{\frac{۵}{۷}\times\frac{۳}{۱۰}}{۱-\frac{۵}{۷}\times\frac{۷}{۱۰}}=\frac{\frac{۱۵}{۷۰}}{\frac{۳۵}{۷۰}}=\frac{۱۵}{۳۵}=\frac{۳}{۷}$$

۵۴. دقیقا تست ۹۲ فصل ۲ کتاب دکتر ایوزیان

E_i: توپ i انتخاب شود.

احتمال اینکه توپ ۱ انتخاب شود و توپ ۲ انتخاب نشود برابر است با:

$$P(E_۱\cap E_۲^c)=P(\text{۲ انتخاب نشود})-P(\text{۱ انتخاب نشود و ۲ انتخاب نشود})=(\frac{۹}{۱۰})^۲-(\frac{۸}{۱۰})^۲=\frac{۱۷}{۱۰۰}$$

۵۵. دقیقا تست ۵۳ فصل ۳ کتاب دو جلدی دکتر ایوزیان و مثال ص ۴۷ جزوه کلاسی ج ۱ دکتر ایوزیان

$$P(\text{سال اول}\cap\text{پسر})=P(\text{سال اول})\,P(\text{پسر})$$

$$\Rightarrow\ \frac{۴}{۱۶+n}=\frac{۱۰}{۱۶+n}\times\frac{۱۰}{۱۶+n}\ \Rightarrow\ ۴(۱۶+n)=۱۰۰\ \Rightarrow\ n=۹$$

البته برای این سؤال ۳ رابطه دیگر نیز باید بررسی شود که با برقراری این رابطه آنها هم خودبخود برقرار می شوند، زیرا:

$$P(E\cap F)=P(E)\times P(F)\Rightarrow P(E\cap F^c)=P(E)\times P(F^c)$$

۵۶. دقیقا تست ۳۲ فصل ۳ کتاب دکتر ایوزیان. تاکید شده توسط دکتر ایوزیان در رفع اشکال آزمون هشتم

$$P(\text{سه توپ سفید}\mid\text{اولی و سومی سفید})=P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۴}{۱۲}\right)+\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۴}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\right)}{\binom{۴}{۳}\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۴}{۱۲}}=\frac{۱}{۲}$$

۵۷. تست ۷۸ فصل ۵ کتاب دوجلدی دکتر ایوزیان

$$X \sim P(\lambda) \qquad \lambda \sim Exp(\lambda = ۱)$$

$$P(X=n) = \int_{۰}^{\infty} \underbrace{P(X=n \mid \lambda = a)}_{\frac{e^{-a}a^n}{n!}} \underbrace{f_\lambda(a)}_{e^{-a}}\, da = \frac{۱}{n! \times ۲}\int_{۰}^{\infty} ۲e^{-۲a}.a^n da = \frac{۱}{۲\times n!}.\frac{n!}{۲^n} = \frac{۱}{۲^{n+۱}}$$

۵۸. مثال صفحه ۴۹ جزوه کلاسی امسال دکتر ایوزیان و نکته صفحه ۲۵۷ ج ۱

تعداد مشتری های بانک $P(\lambda = ۳) \sim$

$$\frac{۵+۱۰}{۶۰} = \frac{۱}{۴}$$

۵۹.

$$f(x,y) = ۴y(x-y)e^{-(x+y)}, ۰ < y < x$$

$$f(x \mid y=۱) = \frac{c(x-۱)e^{-x}}{c}, x > ۱$$

$$= k(x-۱)e^{-(x-۱)}, x > ۱$$

$X \mid Y = ۱$ این تابع گامایی است که یک واحد از صفر جلو رفته

$$U = X - ۱ \mid Y = ۱ \sim \Gamma(\alpha = ۲, \lambda = ۱)$$

$$P(X < ۳ \mid Y = ۱) = P(U < ۲) = ۱ - P(U > ۲) = ۱ - \frac{e^{-۲}۲^{۰}}{۰!} - \frac{e^{-۲}۲^{۱}}{۱!} = ۱ - ۳e^{-۲}$$

۶۰. سوالات ۸۰ و ۱۲۱ فصل ۷ که تو رفع اشکال آزمونها توسط دکتر ایوزیان حل شده است.

$$\frac{۱}{p} + \frac{۱}{p^۲} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{\frac{۱}{۹}} = ۱۲$$

۶۱.

$$X \sim Exp(\lambda) \quad Y \sim Exp(\mu)$$

$$M = \max\{X,Y\} \Rightarrow F_M(m) = P(M \le m) = P(X \le m, Y \le m) = (۱-e^{-\lambda m})(۱-e^{\mu m})$$

$$= ۱ - e^{\mu m} - e^{-\lambda m} + e^{-(\mu+\lambda)m}$$

$$\Rightarrow f_M(m) = \lambda e^{-\lambda m} + \mu e^{-\mu m} - (\mu+\lambda)e^{-(\mu+\lambda)m}, m > ۰$$

$$E(M^۲) = \int_{۰}^{\infty} m^۲ f_M(m) dm = \frac{۲!}{\lambda^۲} + \frac{۲!}{\mu^۲} + \frac{۲!}{(\lambda+\mu)^۲} = \frac{۲}{\lambda^۲} + \frac{۲}{\mu^۲} + \frac{۲}{(\lambda+\mu)^۲}$$

۶۲. صفحه ۴۲ جزوه کلاسی امسال دکتر ایوزیان(ج۲ جزوه)

$$\sum_{i=۱}^{n}(X_i - \mu)^۲ = \sum_{i=۱}^{n}(X_i - \bar{X})^۲ + n(\bar{X} - \mu)^۲$$

$$\Rightarrow \sum_{i=۱}^{n}(X_i - \mu)^۲ \ge \sum_{i=۱}^{n}(X_i - \bar{X})^۲$$

$$\Rightarrow \sum_{i=۱}^{n}(X_i - \mu)^۲ > \sum_{i=۱}^{n}(X_i - \bar{X})^۲ \quad \mu \ne \bar{X}$$

.۶۳

$$\mathbf{MLE}(\theta)=X_{(n)}$$

$$E(X_{(n)})=\frac{n}{n+1}\theta \Rightarrow E(\frac{n+1}{n}X_{(n)})=\theta$$

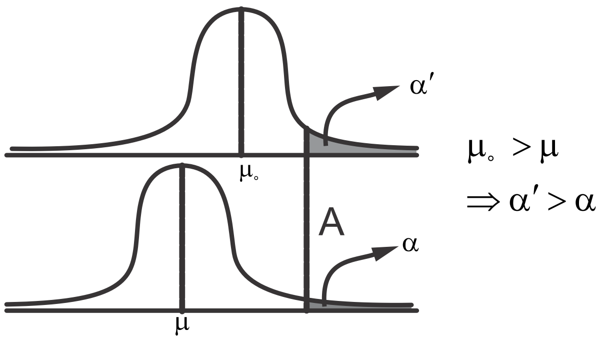
$$\frac{n+1}{n}X_{(n)}=\frac{۶}{۵}\times ۲۰=۲۴$$

.۶۴ سوال ایراد دارد چون α را نداده است.

$$b_L=E(L)-\mu=\mu-Z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}-\mu=-Z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

.۶۵ زمانی فرض صفر را می پذیریم که برآورد فاصله ای $\mu_x-\mu_y$ شامل صفر باشد و برآورد فاصله ای $\frac{\sigma_x^۲}{\sigma_y^۲}$ شامل ۱ شود. در غیر اینصورت فرض صفر را رد می کنیم. پس گزینه $[-۲/۱, ۸/۲]$ برای $\mu_x-\mu_y$ و $[۰/۲۹, ۲۹/۱]$ برای $\frac{\sigma_x^۲}{\sigma_y^۲}$ درست است.

.۶۶



الف- دو منحنی نرمال عادی با واریانس برابر اما با میانگینهای متفاوت

$$\alpha=P(\text{آماره در ناحیه رد}\,|\,H_0)=P(\text{آماره در ناحیه رد}\,|\,\mu\le\mu_0)$$

$$\alpha=P(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}>k\,|\,\mu\le\mu_0)=P(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}+\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}>k)=P(Z>k-\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})\le P(Z>k)=\Phi(-k)=\alpha'$$

توجه داشته باشید که مقدار $\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ تحت H_0 منفی است.

به ازای مقادیر $\mu\le\mu_0$ مقدار خطای نوع ۱ کمتر یا مساوی $\underset{\varphi(-K)}{\alpha'}$ است و مقدار خطای نوع ۱ در $\mu=\mu_0$ همان سطح معنادار بودن است.

.۶۷

$$\sum_{i=1}^{۵}(y_i-\hat{y}_i)=0\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{۴}(y_i-\hat{y}_i)}_{۱/۷}+\underbrace{(y_۵-\hat{y}_۵)}_{-۱/۷}=0$$

پس $y_۵$ کمتر از $\hat{y}_۵$ است.

.۶۸

$$Var(\hat{B}) = \frac{\sigma^۲}{\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x})^۲}$$

n زیاد شود $Var(\hat{B})$ کم می شود.

تغییر پذیری x زیاد شود، $Var(\hat{B})$ کم می شود.

کاهش واریانس y (کاهش $\sigma^۲$) باعث کاهش $Var(\hat{B})$ می شود.

* پس افزایش واریانس y (افزایش $\sigma^۲$) باعث افزایش $Var(\hat{B})$ نمی شود.

.۶۹ دقیقاً شبیه تست ۶۵ آزمون ۷ دپارتمان (فقط در آنجا آزمون ۲ طرفه بود)

$$\frac{S_x^۲}{S_y^۲} = \frac{۶}{۳} \qquad P-Value = P(\frac{S_x^۲}{S_y^۲} \le ۲ \mid H_۰) = P(F_{۲,۲} \le ۲) = ۱ - \frac{۱}{۱+۲} = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

.۷۰

$$MSE = \frac{SSE}{N-K} = \frac{\sum(n_i - ۱)S_i^۲}{۱۸-۳} = \frac{(۶-۱)[(۰/۲)^۲ + (۰/۳)^۲ + (۰/۲)^۲]}{۱۵} = \frac{۰/۱۷}{۱۵} = ۰/۰۵۶۷$$

راه دوم:

$$MSE \xrightarrow{n_i \text{ ها یکسان}} = \frac{S_۱^۲ + S_۲^۲ + S_۳^۲}{۳} = \frac{(۰/۲)^۲ + (۰/۳)^۲ + (۰/۲)^۲}{۳}$$

۹۰/۱۱/۲۷