

دوگان (ثانویه) مسایل برنامه ریزی خطی



۱-۱- تعاریف و مفاهیم

در ارتباط با هر مسئله برنامه ریزی خطی اولیه (*primal*) معادل آن به نام مسئله مزدوج (دوگان - همتا - همزاد، *Dual* یا ثانویه) وجود دارد به طوری که این مسئله از ترانهاده کردن کل ماتریس ضرایب با تغییرات جزئی دیگر حاصل می شود.

۱-۱- خواص مسئله ثانویه

- ۱- اعداد سمت راست می توانند منفی باشند.
- ۲- جواب اولیه و ثانویه بطور همزمان در جدول نهایی وجود دارد.
- ۳- در این روش بجای استفاده از تغییر مصنوعی می توان از محدودیت مصنوعی استفاده نمود.

۱-۲- دلایل استفاده از مسئله ثانویه

- ۱- کمتر شدن مقدار محاسبات (تعداد مراحل عملیات بستگی به تعداد محدودیتها دارد نه تعداد متغیرها)
- ۲- جلوگیری از به کار بردن متغیرهای مصنوعی
- ۳- تعبیر اقتصادی مسئله ثانویه در مسئله اولیه b نشان دهنده مقدار منابع در دسترس، و متغیرهای

مزدوج (ولاها) نشان دهنده ارزش منبع نام و سهم قابل وصول فعالیتها از منابع نام می‌باشد.

۴- تجزیه و تحلیل حساسیت

۵- نقطه مبدأ مختصات، جزء ناحیه جواب نباشد.

۴-۲- روابط متقابل مسئله اولیه و ثانویه

یک مسئله ثانویه را به راحتی می‌توان با اطلاعات مسئله اولیه نمایش داد.

مسئله ثانویه (اولیه)		مسئله اولیه (ثانویه)	
تابع هدف	Min	Max	تابع هدف
سمت راست	مقادیر ضرایب تابع هدف	مقادیر سمت راست	ضرایب تابع
ضرایب تابع هدف	مقادیر سمت راست	مقادیر ضرایب تابع هدف	سمت راست
متغیر	\geq \leq $=$	(n) \leq \geq $=$	تعداد محدودیت (m) محدودیت آزاد در علامت
محدودیت	\geq \leq $=$	(n) \geq \leq $=$	متغیر
ضرایب محدودیتها	ترانسپوز ماتریس ضرایب	ماتریس ضرایب	ضرایب محدودیتها
متغیرهای پایه	m n	متغیر اساسی متغیر غیراساسی	متغیرهای پایه

بنابراین مسائل اولیه و ثانویه به صورت مدل‌های زیر نمایش داده می‌شوند:

مسئله اولیه	مسئله ثانویه
$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^n C_j x_j$	$\text{min } Y = \sum_{i=1}^m b_i y_i$
$\text{st : } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \\ x_j \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{cases}$	$\text{st : } \begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ji} y_i \geq C_j \\ y_i \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$

تذکرہ: علامت متغیرها از روی محدودیتها و علامت محدودیتها از روی متغیرها تعیین می شود.

☞ **نکته:** مزدوج مزدوج هر برنامه ریزی خطی خود آن مسئله می باشد.

☞ **تذکرہ:** تعداد محدودیتها مسئله اولیه برابر تعداد متغیرهای مسئله ثانویه و بر عکس می باشد.

☞ **نکته:** مقادیر متغیرهای پایه در هر مرحله از جدول مسئله اولیه در تمام محدودیتها صدق می کند، ولی در مسئله ثانویه این چنین نبوده و فقط در جدول نهایی به این حالت می رسیم. در سایر موارد متغیرها در محدودیتها صدق نمی کند. به عبارت دیگر ثانویه اولین جواب قابل قبولی که حاصل می شود جواب بهینه است.

☞ **نکته:** در طی مراحل سیمپلکس مسئله اولیه مقدار تابع هدف با تابع هدف هم جهت است ولی در مسئله ثانویه در خلاف جهت تابع هدف حرکت می کنیم. (در واقع در حالت *Max* تابع هدف از مقدار کم شروع نموده و به بهینه می رسد ولی در حالت *Min* تابع هدف از مقدار زیاد شروع و به حالت بهینه می رسد).

☞ **نکته:** در سیمپلکس مسئله اولیه عنصر لولا همواره مثبت می باشد ولی در سیمپلکس مسئله ثانویه عنصر لولا منفی است.

☞ **نکته:** در سیمپلکس مسئله اولیه ابتدا متغیر ورودی و سپس خروجی تعیین می شود، در صورتی که در سیمپلکس ثانویه دقیقاً بر عکس این عمل اتفاق می افتد.

☞ **نکته:** در مسئله اولیه زمانی که مسئله، جواب اولیه قابل قبول ندارد از متغیر مصنوعی استفاده می شود، در صورتی که در مسئله ثانویه زمانی که مسئله جواب ثانویه قابل قبول ندارد از محدودیت مصنوعی استفاده می شود تا به جواب قابل قبول مطلوب دست یابیم.

☞ **نکته:** بکارگیری متغیرهای مصنوعی در مسئله اولیه معادل بکارگیری محدودیت مصنوعی در

مسئله ثانویه است.

نکته: تعداد گوشه‌های هر دو مسئله با هم برابر است (زیرا m و n فقط جایشان عوض شده است)

$$\frac{(m+n)!}{m!n!} \quad \text{يعني}$$

نکته: هر جواب اساسی (گوشه) بهینه در مسئله اولیه متناظر با یک جواب اساسی (گوشه) بهینه در مسئله ثانویه است و مشخصه آن داشتن مقادیر تابع هدف برابر است.

نکته: هر دو گوشه متناظر نمی‌توانند در دو مسئله اولیه و ثانویه موجه باشند مگر اینکه آن جواب اساسی یا گوشه بهینه باشد.

نکته: مقدار تابع هدف بهینه در هر دو مسئله اولیه و ثانویه برابر می‌باشد.

نکته: با توجه به جداول سیمپلکس اولیه، برای مسئله ثانویه مقدار متغیرهای اصلی ، در سطر صفر در زیر متغیرهای اصلی جدول سیمپلکس اولیه قرار دارد.

۴-۳- قضایای مسئله دوگان

قضیه ۱ : ثانویه مسئله ثانویه، مسئله اولیه می‌باشد.

قضیه ۲ (قضیه ضعیف دوگان) : اگر x^* جواب قابل قبول برای مسئله اولیه با تابع هدف Max و y^* جواب قابل قبول برای مسئله ثانویه با تابع هدف Min باشد، رابطه زیر همواره برقرار است:

$$\left\{ \begin{array}{l} Cx^* \leq by^* \\ x^* \leq y^* \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مقدار تابع هدف ثانویه } (Min) \leq \text{مقدار تابع هدف اولیه } (Max)$$

حال اگر مسئله اولیه Min و مسئله ثانویه Max باشد علامتها عوض خواهد شد.

نتایج قضیه ضعیف دوگان

۱- مقدار تابع هدف مسئله Min به ازای هر جواب قابل قبول این مسئله، حد بالایی برای بیشترین مقدار تابع هدف مسئله بیشینه سازی می‌باشد.

۲- مقدار تابع هدف مسئله Max به ازای هر جواب قابل قبول این مسئله ، حد پایینی برای کمترین مقدار تابع هدف مسئله کمینه سازی می‌باشد.

۳- اگر مسئله اولیه (Max) جواب قابل قبول داشته باشد و به ازای این جواب مقدار تابع هدف نامحدود باشد ($\infty \rightarrow Z$) در این صورت مسئله ثانویه نمی‌تواند جواب قابل قبولی داشته باشد.

۴- اگر مسئله ثانویه (Min) دارای جواب قابل قبول داشد و به ازای این جواب، مقدار تابع هدف نامحدود باشد ($\infty \rightarrow Y$) در اینصورت مسئله اولیه نمی‌تواند جواب قابل قبول داشته باشد.

۵- اگر یکی از مسائل اولیه یا ثانویه جواب بهینه نامحدود داشته باشد در اینصورت مسئله دیگر جواب قابل قبول نخواهد داشت.

۶- اگر مسئله اولیه یا ثانویه جواب قابل قبول نداشته باشد، مسئله دیگر ممکن است جواب قابل نداشته باشد و یا اینکه مقدار تابع هدف نامحدود داشته باشد.

۷- اگر مسئله اولیه جواب قابل قبول داشته باشد ولی ثانویه جواب قابل قبول نداشته باشد آنگاه مسئله اولیه نامحدود می‌باشد.

۸- اگر مسئله ثانویه جواب قابل قبول داشته باشد ولی اولیه جواب قابل قبول نداشته باشد آنگاه مسئله ثانویه نامحدود می‌باشد.

قضیه ۳ (قضیه معیار بهینگی): اگر x^* و y^* جوابهای قابل قبول مسئله اولیه و ثانویه باشند به گونه‌ای که مقادیر تابع هدف این دو مسئله به ازای این جوابها با یکدیگر مساوی باشند ($cx^* = by^*$) در اینصورت x^* ، y^* جوابهای بهینه این دو مسئله می‌باشند.

نتیجه قضیه معیار بهینگی: شرط لازم و کافی جهت بهینه بودن جواب مسئله اولیه و ثانویه ایست که این جوابها قابل قبول بوده و به ازای آنها مقادیر تابع هدف هر دو مسئله برابر گردد.

قضیه ۴ (قضیه قوی دوگان): هرگاه x^* ، y^* جوابهای قابل قبول دو مسئله اولیه و ثانویه باشند آنگاه هر دو مسئله دارای جواب بهینه بوده و رابطه $cx^* = by^*$ برقرار است.

نتیجه قضیه قوی دوگان: هرگاه هریک از مسائل اولیه یا ثانویه جواب بهینه داشته باشد، دیگری نیز جواب بهینه خواهد داشت.

قضیه ۵ (قضیه اساسی دوگان): در مسائل برنامه‌ریزی خطی اولیه و ثانویه، یکی از سه حالت زیر بطورکلی رخ می‌دهد:

۱- هر دو مسئله جواب بهینه محدود دارند، به طوری که $cx^* = by^*$ برقرار است و در آن x^* ، y^*

به ترتیب جوابهای بهینه مسائل اولیه و ثانویه می‌باشند.

۲- هرگاه مقدار تابع هدف یکی از مسائل نامحدود باشد، در اینصورت مسئله دیگر جواب قابل قبول نخواهد داشت ولی عکس این قضیه همواره برقرار نمی‌باشد.

۳- هر دو مسئله جواب قابل قبول ندارند.

قضیه ۶ (قضیه تعدد و انحطاط): اگر هر کدام از مسائل اولیه یا ثانویه برنامه‌ریزی خطی جواب بهینه چندگانه داشته باشد، در اینصورت مسائل دیگر دارای جواب بهینه تباشیده (منحط) خواهد بود و بر عکس.

قضیه ۷ (قضیه مکمل زاید):

مسئله اولیه و ثانویه را بصورت زیر در نظر بگیرید:

مسئله اولیه

مسئله ثانویه

$$\text{Max } Z = cx$$

$$\text{Min } Y = yb$$

$$S.t : Ax \leq b$$

$$S.t : yA \geq c$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

فرض کنید x^* , y^* به ترتیب جوابهای قابل قبول برای مسئله اولیه و ثانویه باشند، آنگاه x^* , y^* بهینه می‌باشند اگر و فقط اگر:

$$(y^* A - c)x^* + y^*(b - Ax^*) = 0$$

و در حالت بسط یافته داریم:

$$(y^* a_j - c_j)x_j^* + y_i^*(b_i - a^i x^*) = 0 \quad (I) \quad i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n$$

این قضیه نشان می‌دهد که حداقل یکی از دو جمله در هر بسط باید صفر باشد بنابراین:

$$\begin{cases} x_j^* > 0 \Rightarrow y^* a_j = c_j \\ y^* a_j < c_j \Rightarrow x_j^* = 0 \\ y_i^* > 0 \Rightarrow a^i x^* = b_i \end{cases}$$

اگر

نتیجه: از قضیه فرق نتیجه می‌شود که اگر متغیری در یک مسئله مثبت باشد آن‌وقت مخفوظ دیده شود.

متناظر آن در مسئله دیگر فعال است و اگر یک محدودیت در یک مسئله فعال نباشد آن وقت متغیر متناظر آن در مسئله دیگر باید صفر باشد. حال اگر $s_i = a^i x^* - b_i \geq 0$ و $s_j' = c_j - y^* a_j \geq 0$ به ترتیب متغیرهای کمکی مسئله اولیه و ثانویه باشد از معادله (I) داریم:

$$s_j' \times x_j^* = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$y_i^* \times s_i^* = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

نتایج حاصل از قضیه مکمل زاید

۱- در جواب بهینه مقدار $y^* x^*$ می‌باشد.

۲- در صورتی که متغیر مسئله اولیه (x_j) مثبت باشد ($x_j > 0$ در پایه باشد) آنگاه محدودیت متناظر در مسئله ثانویه بصورت مساوی (محدودیت فعال) برآورده می‌شود.

۳- در صورتی که محدودیت مسئله اولیه بصورت نامساوی مطلق برآورده شود ($s_i > 0$ در پایه باشد) آنگاه متغیر متناظر در مسئله ثانویه صفر است ($y_i = 0$).

	s_i	
z	y_i	
s_i'	۱	

۴- در صورتی که متغیر مسئله ثانویه (x_j) مثبت باشد ($x_j > 0$ در پایه باشد) آنگاه محدودیت متناظر در مسئله اولیه بصورت مساوی ($s_i = 0$) برآورده می‌شود.

۵- در صورتی که محدودیت مسئله ثانویه بصورت نامساوی مطلق برآورده شود ($s_i' > 0$ در پایه) آنگاه متغیر متناظر در مسئله اولیه صفر است ($X_j = 0$).

۶- هر متغیر تصمیم در اولیه با یک متغیر کمکی در ثانویه ارتباط دارد و بر عکس هر متغیر کمکی در اولیه با یک متغیر تصمیم در ثانویه در ارتباط می‌باشد. $X_j \cdot S_j' = 0$ ، $S_i \cdot y_i = 0$ که در آن $x_j \neq 0$ متغیرهای تصمیم اولیه و ثانویه S_i ، S_j' متغیرهای کمکی به ترتیب اولیه و ثانویه می‌باشد.

۷- هر متغیر اساسی در اولیه با یک متغیر غیراساسی در ثانویه و برعکس هر متغیر غیراساسی در اولیه با یک متغیر اساسی در ثانویه در ارتباط است.

مثال: اگر حل بهینه مسئله‌ای بصورت زیر باشد جواب بهینه مسئله مزدوج آنرا بدون استفاده از جدول سیمپلکس بدست آورید.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 0/75x_1 - 20x_2 + 0/5x_3 - 6x_4 \\ &\quad + 0/25x_1 + 8x_2 + x_3 - 9x_4 \geq 0 \\ &\quad - 0/5x_1 + 12x_2 + 0/5x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_3 &\leq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_2^* = 1 \\ x_3^* &= x_4^* = 0 \end{aligned}$$

ابتدا مزدوج مسئله فوق را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \text{Min } Y &= y_2 \\ 0/25y_1 - 0/5y_2 &\geq 0/75 \\ 8y_1 + 12y_2 &\geq -20 \\ y_1 + 0/5y_2 + y_3 &\geq 0/5 \\ -9y_1 - 3y_2 &\geq -6 \\ y_1 &\leq 0, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Max } Z = 0/75(1) - 20(0) + 0/5(1) - 6(0) = 1/25$$

در حالت بهینه داریم:

$$\text{Max } Z = \text{Min } Y = y_2 = 1/25 \Rightarrow y_2 = 1/25$$

حال محدودیت اول را برأورد می‌کنیم.

$$\begin{aligned} 0/25x_1 + 8x_2 + x_3 - 9x_4 - s_1 &= 0 & X = (1, 0, 1, 0) \\ 0/25 + 1 - s_1 &= 0 \Rightarrow s_1 = 1/25 \end{aligned}$$

بنابراین محدودیت اول بصورت نامساوی مطلق می‌باشد که در آن $x_1 = 1/25 > 0$ در پایه قرار دارد.

پس متغیر متناظر با آن در مسئله ثانویه صفر می‌باشد ($y_1 = 0$) یعنی:

$$(S_1 = 1/25) \Rightarrow y_1 = 0$$

$$\text{محدودیت دوم بصورت مساوی } (S_2 = 0) \Rightarrow y_2 \neq 0.$$

$$\text{محدودیت سوم بصورت مساوی } (S_3 = 0) \Rightarrow y_3 \neq 0.$$

از طرفی چون متغیرهای x_1 و x_2 در مسئله اولیه مخالف صفر می‌باشند پس محدودیتهای متناظر در مسئله ثانویه محدودیت اول و سوم بصورت مساوی نوشته می‌شود. و داریم:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \neq 0 \Rightarrow 0/25y_1 - 0/5y_2 = 0/75 \\ x_2 \neq 0 \Rightarrow y_1 + 0/5y_2 + y_3 = 0/5 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = -1/5, y_3 = 1/25 \end{array} \right\}$$

۴-۴- روابط متقابل جوابهای مسئله اولیه و ثانویه

در مسئله اولیه و ثانویه بطور خلاصه روابط زیر برقرار می‌باشد.

مسئله ثانویه		مسئله اولیه
جواب بهینه محدود	↔	جواب بهینه محدود
جواب بهینه منحط	↔	جواب بهینه چندگانه
جواب بهینه چندگانه	↔	جواب بهینه منحط
مقدار تابع هدف نامحدود ($Z = \infty$)	↔	بدون جواب موجه
بدون جواب موجه	↔	بدون جواب موجه
تابع هدف نامحدود ($Z = \infty$)	↔	بدون جواب موجه

۴-۵- روابط متقابل جداول مسئله اولیه و ثانویه

جداول نهایی و بهینه سیمپلکس یک مسئله اولیه و ثانویه دارای ارتباط متقابل مفهوم‌دار با یکدیگر می‌باشند.

۱- هر متغیر اصلی در اولیه x_i به ترتیب، متناسب با یک متغیر کمکی در ثانویه z^d است. و بر عکس هر z^d متناسب با یک x_i می‌باشد.

۲- اعداد سمت راست مسئله اولیه، مقدار ضرایب متغیرهای غیراساسی در سطر Z جدول سیمپلکس مسئله ثانویه است و بر عکس.

۳- اعداد غیر صفر سطر Z در مسئله اولیه، مقدار متغیرهای اساسی در جدول ثانویه است و بر عکس.

۴- مقدار متغیرهای تصمیم مسئله ثانویه در زیر سطر Y برابر قرینه و ترانسپوز (ترانهاده) مقدار متغیرهای غیراساسی در زیر سطر Z در مسئله اولیه است.

جدول نهایی مسئله ثانویه (Min)		جدول نهایی مسئله اولیه (Max)
ثانویه A_N	← →	اولیه $-A_N^T$
ثانویه C_N	← →	اولیه b_i
ثانویه b_i	← →	مقدار C_N
مقدار	← →	مقدار Z

جدول نهایی مسئله اولیه

متغیرهای تصمیم	ثانویه	s'_1	s'_2	y_1	y_2	RHS
z	۱	۰	۳۰	۰	۴۰	۲۰۰
s_1	۰	۰	-۴	۱	-۲	۲
x_1	۰	۱	$\frac{3}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$

جدول نهایی مسئله ثانویه

متغیرهای اساسی	اولیه	s_1	s_2	x_1	x_2	RHS
Y	۱	۲	۰	$\frac{5}{2}$	۰	+۲۰۰
s'_2	۰	۴	۰	$-\frac{3}{2}$	۱	۳۰
y_2	۰	۲	۱	$-\frac{1}{2}$	۰	۴۰

یک مسئله به ۴ روش قابل حل می باشد:

- ۱- مسئله اولیه به روش سیمپلکس اولیه
- ۲- مسئله اولیه به روش سیمپلکس ثانویه
- ۳- مسئله ثانویه به روش سیمپلکس اولیه
- ۴- مسئله ثانویه به روش سیمپلکس ثانویه

حال نکات زیر در رابطه با روش‌های فرق قابل ذکر می باشد.

نکته: تعداد مراحل حل یک مسئله اولیه برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس اولیه دقیقاً برابر تعداد مراحل حل ثانویه آن مسئله (دوگان) به روش سیمپلکس ثانویه می باشد. یعنی:

ثانویه به روش ثانویه ←→ اولیه به روش اولیه

نکته: تعداد مراحل حل یک مسئله اولیه به روش سیمپلکس ثانویه دقیقاً برابر تعداد مراحل حل ثانویه آن مسئله (دوگان) به روش سیمپلکس اولیه می باشد. یعنی:

اولیه به روش ثانویه ←→ ثانویه به روش اولیه

۴- روابط متقابل ماتریس مسئله اولیه و ثانویه

اگر مسئله برنامه‌ریزی اولیه بصورت زیر بیان شود.

$$\text{Max } Z = Cx \quad (\text{مسئله اولیه})$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

در اینصورت مسئله ثانویه چنین بیان خواهد شد.

$$\text{Min } Y = b^T \cdot y \quad (\text{مسئله اولیه})$$

$$A^T y \geq C^T$$

$$y \geq 0$$

که در آن b^T ، A^T ، C^T ترانسپوز یا ترانهاده b ، A و C می باشند بنابراین روابط زیر برقرار می باشد.

$$(1) X_B = \bar{b} = B^{-1} \cdot b$$

$$(2) y = C_B \cdot B^{-1}$$

$$(3) \begin{cases} \bar{a}_j = B^{-1} \cdot a_j \\ \bar{N} = B^{-1} \cdot N \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \bar{C}_j = C_B \cdot B^{-1} \cdot a_j - C_j = y \cdot a_j - C_j = C_B \cdot \bar{a}_j - C_j \\ \bar{C}_N = C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_N = y \cdot N - C_N = C_B \cdot \bar{N} - C_N \end{cases}$$

$$(5) Z = C_B \cdot B^{-1} \cdot b = yb = C_B \cdot \bar{b}$$

نکته: $y_{ij} = -\frac{\partial X_{Bi}}{\partial x_j}$ که در آن x_j متغیر غیرپایه‌ای و x_B متغیر پایه‌ای خواهد بود.

۷-۴- تفسیر اقتصادی جداول سیمپلکس

یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مساله ثانویه، استفاده از مفاهیم اقتصادی حاصل از آن می‌باشد. از آنجانی‌که اعداد هر ستون مفاهیم مرتبط در مورد یک متغیر تصمیم را بیان می‌کند معمولاً تفسیر اقتصادی بصورت ستونی انجام می‌پذیرد.

در جداول سیمپلکس در صورتی که اعداد مثبت در سطح قرار گیرند که متغیر اساسی مربوط به آن سطر، متغیر کمکی باشد، به مفهوم میزان استفاده از آن منبع برای تولید یک واحد از محصولی (با افزایش یک واحد متغیر ورودی) است که در بالای ستون این عدد قرار گرفته است. در صورتی که متغیر اساسی مربوط به آن سطر متغیر تصمیم باشد به معنی کاهش آن متغیر اساسی است که در ازاء افزایش یک واحد از متغیر ورودی صورت می‌پذیرد و بر عکس، اعداد منفی، افزایش منبع (در مورد متغیرهای کمکی) و یا افزایش تولید (در مورد متغیرهای تصمیم) است.

۷-۵- تعریف شبیه قیمت (Dual Price)

شبیه قیمت عبارتست از میزان تغییرات تابع هدف به ازای یک واحد افزایش در یکی از مقادیر سمت راست که برابر مقدار متغیر ثانویه متناظر آن محدودیت است (یعنی قیمت‌های سایه یا قیمت‌های ثانویه بیانگر ارزش اقتصادی هر واحد سمت راست می‌باشد. اگر اعداد سمت راست نشان دهنده میزان منابع موجود باشد، قیمت سایه منعکس‌کننده ارزش اقتصادی هر واحد از منبع می‌باشد).

نکته: در جدول سیمپلکس جوابهای اساسی در اولیه مقدار قیمت سایه برای ثانویه است و بر عکس.

نکته: جدول سیمپلکس وقتی بهینه است که: هزینه نهایی = درآمد نهایی

نکته: از حاصل ضرب قیمت‌های سایه (y_i) در مقدار منابع، مقدار Z^* حاصل می‌شود.

$$\frac{\partial Z^*}{\partial b_i} = y_i^*$$

۲-۷-۴-هزینه تقلیل یافته

عبارتست از میزان تغییرات تابع هدف به ازای یک واحد تولید از یکی از متغیرهای غیرپایه بهینه که برابر ضریب آن متغیر در سطر هدف جدول بهینه می‌باشد.
یعنی به ازاء هر واحد باید ۳ واحد ضرر بدھیم.

	x_i	RHS
Z	۳	
	۱	
	۵	
	۷	

نکته: متغیرهای کمکی در حالت Min (ثانویه) به معنی میزان هزینه فرصت از دست رفته می‌باشد. در این شرایط بهترین حالت تساوی می‌باشد.

نکته: متغیرهای کمکی در حالت Max (اولیه) به معنی میزان منابع باقی مانده است.

نکته: y_i^* ها در جدول نهایی سیمپلکس اولیه در سطر Z و در زیر متغیرهای کمکی (متغیرهای اساسی جدول ابتدایی) قرار دارد.

نکته: اگر بخواهیم از منابعی افزایش تولید داشته باشیم، آنهایی را افزایش می‌دهیم که دارای قیمت سایه‌ای (y_i های متناظر) بیشتر باشد.

نکته: در مسائلی که با روش M بزرگ حل شده‌اند برای بدست آوردن قیمت‌های سایه‌ای (y)، در عناصر سطر صفر زیر متغیرهای شروع مسئله مقدار M را صفر قرار داده که در نتیجه قیمت سایه‌ای حاصل می‌شود.

۴-روش حل سیمپلکس ثانویه

روش سیمپلکس ثانویه عموماً موقعی بکار می‌رود که همه ضرایب متغیرها در سطر تابع هدف

غیرمنفی باشد (شرط بین) ولی اعداد سمت راست مقادیر منفی داشته باشد (غیر موجه). جهت این کارگامهای زیر پیموده می‌شود:

- ۱- تابع هدف را بصورت Max تبدیل می‌کنیم (در صورت نیاز، ضرب عدد ۱ - در طرفین)
- ۲- محدودیتها را به شکل \leq (ک.م) تبدیل می‌کنیم (در صورت نیاز با ضرب عدد ۱ - در طرفین)
- ۳- با اضافه نمودن متغیرهای کمکی S_i به محدودیتها آنها را به شکل مساوی تبدیل می‌کنیم.
- ۴- مسئله را وارد جدول سیمپلکس می‌نماییم.
- ۵- منفی ترین عدد سمت راست (b_i) را بعنوان متغیر خروجی انتخاب می‌کنیم. سطر مذکور سطر لولا نامیده می‌شود.

نکته: اگر تمام اعداد سمت راست دارای مقادیر غیرمنفی باشد جواب اساسی فعلی موجه و بینه می‌باشد.

نکته: اگر اعداد سمت راست (b_i)، جهت ورود مساوی باشند به دلخواه یکی را انتخاب می‌کنیم.
۶- متغیر ورودی با تقسیم اعداد سطر صفر بر اعداد منفی سطر لولا و انتخاب کوچکترین قدر مطلق عدد حاصله بدست می‌آید. ستون حاصله را ستون لولا می‌نامیم. بطور خلاصه داریم:

$$\theta = \text{Min} \left\{ \left| \frac{C_j}{a_{ij}} \right| ; a_{ij} < 0 \right\}$$

که در آن C_j اعداد سطر صفر و a_{ij} عناصر سطر لولا می‌باشد.

نکته: اگر تمام عناصر سطر لولا غیرمنفی باشد، در اینصورت مسئله فاقد منطقه موجه بوده و جواب ندارد. در اینصورت مسئله اولیه دارای جواب نامحدود می‌باشد.

نکته: اگر شرایط مساوی جهت انتخاب متغیر ورودی داشته باشیم مسئله دارای جواب چندگانه می‌باشد. در این حالت مسئله اولیه دارای جواب منحاط می‌باشد.

نکته: در سیمپلکس ثانویه هدف از آزمون نسبت، حفظ شرط بهینگی در جدول بعدی می‌باشد.

۴-۹- مقایسه روش سیمپلکس معمولی و سیمپلکس ثانویه

سیمپلکس ثانویه	سیمپلکس معمولی
تابع هدف بصورت Max	تابع هدف بصورت Max
محدودیتها بصورت \leq	محدودیتها بصورت \leq
$C_j > 0$	$RHS > 0$
ابتدا متغیر خروجی (سطر لولا)	ابتدا متغیر ورودی (ستون لولا)
منفی ترین ضریب در RHS	منفی ترین ضریب سطر صفر
خارج قسمت ضرایب سطر صفر به سطر منفی لولا	خارج قسمت RHS به ستون مثبت لولا
حداقل قدر مطلق نسبت	حداقل نسبت
عدد لولا همیشه کوچکتر از صفر	عدد لولا همیشه بزرگتر از صفر
اگر همه عناصر سطر لولا غیر منفی باشد مسئله نامحدود می باشد	اگر تمام عناصر ستون لولا غیر مثبت باشد مسئله نامحدود می باشد

۴-۱۰- نوع خاص سیمپلکس ثانویه (محدودیت مصنوعی)

اگر چنانچه در جدول سیمپلکس ثانویه شرط بهینگی نقض شده باشد (یعنی در سطر صفر جدول پس از استاندارد نمودن مسئله و تبدیل به Max مقدار منفی وجود داشته باشد)، در این حالت از محدودیت مصنوعی استفاده می کنیم.

۴-۱۰-۱- تعریف محدودیت مصنوعی

برای حل هر مسئله از طریق روش سیمپلکس ثانویه که شرایط بهینگی را ندارد (وجود مقدار منفی در سطر تابع هدف) از محدودیت $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq M$ که در آن x_i ها متغیرهای غیر بایه ای می باشند استفاده می شود. به محدودیت فوق محدودیت مصنوعی گفته می شود و داریم:

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n = M$$

که در آن x_0 متغیر کمکی می باشد.

۴-۱۰-۲- الگوریتم حل

۱- مسئله را به حالت استاندارد تبدیل می کنیم (تابع هدف Max و محدودیتها \leq (ک.م))

۲- در صورتی که مسئله شرایط بهینگی را نداشته باشد محدودیت مصنوعی مناسب را به مسئله و جدول اضافه می‌کنیم.

۳- متغیر واجد شرایط ورود به پایه را انتخاب نموده و سپس متغیر b^* را بدون هیچ‌گونه شرطی از پایه خارج می‌کنیم که در این حالت شرایط بهینگی حاصل می‌شود.

۴- بقیه مراحل مثل روش‌های قبل حل می‌شود.

۱۱- قضیه فارکاس

دو مسئله روی رو را در نظر بگیرید. اگر A یک ماتریس $m \times n$ و b یک ماتریس $m \times 1$ باشد آنگاه ثابت کنید که:

الف- اگر مدل (I) جواب شدنی داشته باشد مدل (II) جواب ندارد.

ب- اگر مدل (I) جواب نداشته باشد مدل (II) حتماً جواب دارد.

$$\begin{array}{ll} (I) & (II) \\ Ax = b & Ay \geq 0 \\ x \geq 0 & by < 0 \end{array}$$

در شکل تغییر یافته قضیه فارکاس نیز فقط و فقط یکی از دو سیستم زیر جواب خواهد داشت.

$$\begin{array}{ll} (I) & (II) \\ Ax \leq b & Ay \leq 0 \\ x \geq 0 & y \leq 0, by > 0 \end{array}$$

۱۲- مسائل معادل در برنامه‌ریزی خطی

مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\{ \text{Max } Z = Cx \mid Ax = b, x \geq 0 \}$$

محدودیتهاي اين مسئله همگي بصورت تساوي بوده و يا اينكه بصورت تساوي درآمده‌اند. در اينصورت همواره روابط زير برقرار خواهد بود.

۱- اگر محدوديتي در عدد $\neq 0$ ضرب شود در اينصورت جوابهاي مسئله اوليه تغيير نمي‌کند و متغير متناظر آن محدوديت در مسئله ثانویه در $\frac{1}{\lambda}$ ضرب می‌شود و در هر دو مسئله مقدارتابع هدف تغيير نمي‌کند.

۲- اگر بردار ستونی يكی از متغیرها در عدد $\neq 0$ ضرب شود، آنگاه متغیر مربوطه در $\frac{1}{\lambda}$ ضرب

می شود ولی جوابهای مسئله ثانویه تغییری نمی کند و تابع هدف در هردو مسئله بدون تغییر باقی خواهد ماند.

۳- اگر k برابر یک سطربه سطر دیگر اضافه شود، جوابهای بهینه مسئله اولیه و ثانویه هیچ تغییری نخواهد کرد.

۴- اگر k برابر یک ستون به ستون دیگر اضافه شود، جوابهای بهینه مسئله اولیه و ثانویه هیچ تغییری نخواهد کرد.

۵- اگر k برابر یک سطربه تابع هدف افزوده شود، جوابهای مسئله اولیه تغییری نخواهد کرد ولی جوابهای مسئله ثانویه بعلاوه k برابر خواهد شد و مقدار تابع هدف هر دو مسئله به اندازه ky تغییر می نماید.

۶- اگر k برابر یک ستون به سمت راست اضافه شوند جوابهای بهینه مسئله اولیه بعلاوه k برابر شده ولی جوابهای ثانویه تغییری نخواهد کرد و مقدار تابع هدف هردو مسئله به اندازه ky تغییر می نماید.

۷- هرگاه مقادیر سمت راست در $\alpha \neq \beta$ ضرب شود، مقادیر متغیرهای مسئله اولیه λ برابر شده و متغیرهای مسئله ثانویه تغییری نمی کند و مقدار تابع هدف در هر دو مسئله λ برابر می شود.

۸- هرگاه سطر هدف مسئله ای در عدد $\alpha \neq \beta$ ضرب شود، جوابهای مسئله اولیه تغییری نکرده ولی جوابهای ثانویه در λ ضرب می شود و مقدار هردو تابع هدف λ برابر می شود.

۹- اگر مقادیر سطربه هدف در عدد α و سمت راست در عدد β ضرب شوند، مقادیر متغیرهای مسئله اولیه در β و مقادیر متغیرهای مسئله ثانویه در α ضرب می شوند و مقدار تابع هدف در هر دو مسئله در $\alpha\beta$ ضرب می شود.

سمت راست \circ تابع هدف $(\alpha, \beta) >$

۱۰- هریک از حالات فوق در صورتی که با هم ترکیب شوند، نتایج حاصله نیز با هم ترکیب خواهند شد.

۱۱- هرگاه همه مقادیر سمت راست مسئله ای بعلاوه k شود در اینصورت جواب مسئله تغییر یافته ثانویه، نسبت به مسئله اولیه دارای حالت زیر می باشد:

$$Z = Z_{\text{قدیم}} + \sum_{i=1}^k k_i y_i$$

$$Z = (b_i + k_i) y_i \quad \text{هردو بهینه هستند}$$

حال اگر مقدار تابع هدف مسئله اولیه، بهینه بوده و تغییر یافته بهینه نباشد، رابطه به شکل زیر است:

$$Z \leq Z + \sum_{i=1}^k k_i y_i$$

و اگر تابع هدف مسئله اولیه بهینه نبوده و تغییر یافته آن، بهینه باشد رابطه بصورت \geq ظاهر می‌شود و در صورتی که هر دو بهینه باشد رابطه به شکل تساوی در می‌آید و بطور کلی مقدار تغییرات تابع هدف برابر رابطه زیر است:

$$\Delta Z = \sum_{i=1}^k k_i y_i \quad \text{و یا} \quad \Delta Z = y_i^* \cdot \Delta b_i$$

نکته: اگر بخواهیم از چندین منبع موجود یک منبع انتخاب کنیم تا مقدار آن را افزایش دهیم، محدودیتی (منبعی) انتخاب می‌شود که باعث بهینه نمودن مقدار تابع هدف گردد و در حالت Max داریم:

$$\Delta Z = \text{Max} [y_i^* \cdot \Delta b_i] \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$