بسمه تعالی

دانشکده مهندسی صنایع و مرکز برنامه ریزی سیستمها

دانشگاه صنعتی اصفهان

جزوه تحقیق درعملیات II

(شماره درس ۱۳۱۰۳۱۴)

محمد سعید صباغ

مقدمه

هر مسأله نیازمند تصمیم‌گیری را می‌توان به عنوان یکی از انواع مسأله‌های تحقیق در عملیات مطرح کرد. امروزه روش‌های متعددی برای تصمیم‌گیری وجود دارد، ولی از آنجاییکه تصمیم‌گیری سریع و صحیح می‌تواند مدیران را در اتخاذ راهکارهایی مناسب برای حل مشکلاتشان یاری نماید، شاخه‌های گوناگونی در تحقیق در عملیات به وجود آمده است، که می‌توان از آن جمله به برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای گسسته (با نام‌های متداول برنامه‌ریزی شمار یا برنامه‌ریزی با اعداد صحیح)، برنامه‌ریزی پویا و نظریه صف اشاره کرد.

در این جزوه ابتدا برخی از مفاهیم پایه را مرور می‌کنیم. سپس به روش‌های فرموله کردن مسأله‌های برنامه‌ریزی با اعداد صحیح و روش‌های کلاسیک حل آن و در ادامه به روش برنامه‌ریزی پویا در حل مسأله‌های برنامه‌ریزی می‌پردازیم و در نهایت نظریه صف ارائه می‌گردد.

تشکر و قدردانی

از زحمات فراوان سرکار خانم مهندس سلاله نقاش زاده یزدی که مسئولیت آماده‌سازی رایانه‌ای متن اولیه را به عهده گرفتند، آقای مهندس عمار کلانکی که بهبودهای فراوانی را پیشنهاد و پیاده کردند و سایر دانشجویانی که پیشنهادات مفیدی را ارائه نموده‌اند، بدینوسیله قدردانی می‌گردد.

فهرست

فصل اول – مرور مفاهیم پایه

۱-۱- انواع جواب بهینه

- **جواب بهینه محلی:**[1] نقطه x را یک جواب بهینه محلی یک مسأله بهینه‌سازی نامیم؛ اگر x یک نقطه قابل قبول باشد (در تمام محدودیت‌های مسأله صدق کند) و در یک همسایگی x، جوابی بهتر از x وجود نداشته باشد.
- **جواب بهینه محلی اکید:**[2] نقطه x را یک جواب بهینه محلی اکید یک مسأله بهینه‌سازی نامیم؛ اگر x یک نقطه قابل قبول (شدنی) باشد و در یک همسایگی آن، نقطه x تنها جواب بهینه باشد یا به عبارت دیگر x یگانه جواب بهینه محلی باشد.
- **جواب بهینه جهانی، سراسری، یا عمومی:**[3] نقطه x را یک جواب بهینه جهانی یک مسأله بهینه‌سازی نامیم؛ اگر x یک نقطه شدنی باشد و در فضای قابل قبول آن مسأله، جوابی بهتر از x وجود نداشته باشد.
- **جواب بهینه جهانی اکید:**[4] نقطه x را یک جواب بهینه جهانی اکید یک مسأله بهینه‌سازی نامیم؛ اگر x یک نقطه قابل قبول (شدنی) باشد و در فضای قابل قبول آن مسأله، نقطه x تنها جواب بهینه باشد. به عبارت دیگر باید x یگانه جواب بهینه جهانی باشد.

۱-۲- مجموعه محدب

تعریف هندسی: مجموعه‌ای محدب است که اگر هر دو نقطه از آن را به هم وصل کنیم تمام نقاط پاره‌خط حاصل متعلق به آن مجموعه باشد.

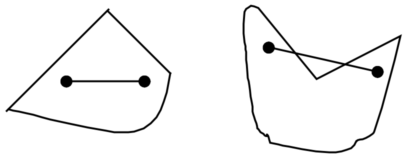
تعریف جبری: S یک مجموعه محدب است اگر:

$$(\forall x', x'' \in S \,,\, \forall \alpha : 0 \le \alpha \le 1) \Rightarrow \alpha x' + (1-\alpha) x'' = \overline{x} \in S$$

به عنوان مثال از دو مجموعه زیر مجموعه سمت چپ یک مجموعه محدب و دیگری یک مجموعه غیر محدب می‌باشد.

---

[1] Local Optimum Solution
[2] Strict Local Optimum Solution
[3] Global Optimum Solution
[4] Strict Global Optimum Solution



نکته: اگر $s_1, s_2, \dots, s_m$ مجموعه‌های محدب باشند، اشتراک همه آنها $(S = s_1 \cap \dots \cap s_m)$ نیز یک مجموعه محدب خواهد بود.

۱-۳- تابع محدب و تابع مقعر

تعریف تابع محدب: تابع محدب همواره برروی یک مجموعه محدب تعریف می‌شود. بنابراین تابع f بر روی مجموعه محدب S یک تابع محدب است؛ اگر هر دو نقطه دلخواه x' و x'' متعلق به S را در نظر بگیریم داشته باشیم:

$$(\forall x', x'' \in S\ ,\ \forall \alpha : 0 \le \alpha \le 1) \Rightarrow$$
$$f(\alpha x' + (1-\alpha)x'') \le \alpha f(x') + (1-\alpha) f(x'')$$

ترکیب خطی فوق یک ترکیب محدب نامیده می‌شود. مفهوم رابطه فوق این است که اگر دو نقطه دلخواه بر روی آن تابع را با یک پاره خط به هم وصل کنیم، تمام نقاط پاره‌خط باید روی منحنی یا بالای منحنی آن تابع قرار بگیرد.

تعریف تابع مقعر: تابع مقعر تابعی است که منفی آن محدب باشد، یا به عبارت دیگر تابع h مقعر است؛ اگر برای هر دو نقطه دلخواه مربوط به مجموعه محدب مورد نظر داشته باشیم:

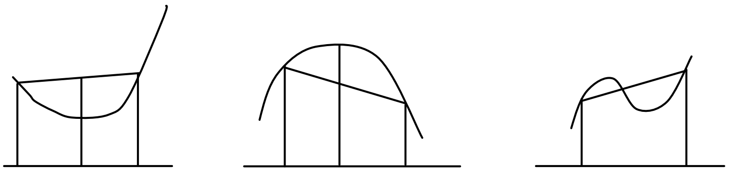
$$(\forall x_1, x_2 \in S', \forall \alpha : 0 \le \alpha \le 1) \Rightarrow$$
$$h(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \ge \alpha h(x_1) + (1-\alpha) h(x_2)$$

نکته ۱: تابع f مقعر است اگر و تنها اگر $-f$ محدب باشد.

نکته ۲: تابع خطی هم محدب است و هم مقعر، زیرا طبق تعریف اگر $t(x)$ خطی باشد داریم:

$$\forall \alpha : 0 \le \alpha \le 1 \Rightarrow$$
$$t(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) = \alpha t(x_1) + (1-\alpha) t(x_2)$$

نکته ۳: اگر f یک تابع محدب بر روی مجموعه محدب S باشد، آنگاه برای هر $a \ge 0$، af نیز یک تابع محدب است. برای مثال چون $f(x) = x^2$ یک تابع محدب است، $g(x) = 5x^2$ نیز یک تابع محدب است.



مقعر   محد   نه محدب و

۱-۴- مسأله محدب

هنگامیکه f یک تابع محدب و S یک مجموعه محدب باشد، مسأله بهینه‌سازی زیر یک مسأله محدب نامیده می‌شود:

$$\begin{aligned} &\min \quad f(x) \\ &\qquad \text{s.t.} \;\; x \in S = \left\{ x \;\middle|\; x \ge 0, g_i(x) \le b_i, i = 1, \cdots, m \right\} \end{aligned}$$

نکته ۱: اگر بدانیم یک مسأله محدب است، هر جواب بهینه محلی آن یک جواب بهینه جهانی نیز می‌باشد. این خاصیت در مسأله‌های غیرخطی بسیار مهم است.

نکته ۲: اگر یک تابع مقعر را روی یک مجموعه محدب حداکثر کنیم، آن مسأله نیز یک مسأله محدب است.

نکته ۳: هر تابع هدف خطی که بر روی یک مجموعه محدب تعریف شده باشد، یک مسأله محدب است لذا هر جواب محلی یک جواب عمومی نیز می‌باشد.

تمرین:

۱- ثابت کنید که اگر f_1 و f_2 دو تابع محدب باشند، آنگاه مجموع آنها نیز یک تابع محدب است.

۲- ثابت کنید که مسأله زیر یک مسأله محدب است.

$$\begin{aligned} &\min \quad z = cx \\ &\text{s.t.} \begin{cases} A'x \le b' \\ A''x = b'' \\ A'''x \ge b''' \\ x \ge 0 \end{cases} \end{aligned}$$

۱-۵- سیمپلکس تجدید نظر شده

یکی از روش‌های کارا برای حل مسأله‌های برنامه‌ریزی خطی روش سیمپلکس تجدید نظر شده است. این روش با استفاده از کلیه اصول و گام‌های سیمپلکس، بدون انجام عملیات زائد مسأله را حل می‌کند.

$$\max\ z = cx$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$
$$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$$
$$c = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$$
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$
$$b = \begin{bmatrix} b_1, b_2, \ldots, b_m \end{bmatrix}^T$$

در صورت اضافه شدن متغیرهای کمکی، مسأله به صورت زیر در می‌آید:

$$\max\ z = cx$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} Ax + Is = b \\ x \ge 0 \end{cases}$$
$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad s = \begin{bmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_m \end{bmatrix}^T$$

می‌دانیم که در روش سیمپلکس تعداد متغیرهای اساسی مساوی با تعداد محدودیت‌های مستقل می‌باشد. ماتریس $[AI]$ که از ضرایب کلیه متغیرها در محدودیت‌ها تشکیل شده، ماتریسی $m(m+n)$ است. این ماتریس به دو ماتریس ضرایب متغیرهای اساسی و غیر اساسی قابل تقسیم است. ماتریس ضرایب متغیرهای اساسی با B و ماتریس متغیرهای غیر اساسی با N نمایش داده می‌شود. به همین ترتیب تمام متغیرهای مسأله نیز به دو گروه متغیرهای اساسی (X_B) ومتغیرهای غیراساسی (X_N) قابل تقسیم است.

۱-۵-۱- گام‌های روش سیمپلکس تجدید نظرشده

گام ۱: تعیین وجود شرط بهینگی:

در هر تکرار ضرایب متغیرهای غیراساسی در تابع هدف را با استفاده از روابط $Y = C_B B^{-1}$ و $\overline{C} = -C + YA$ پیدا کنید. اگر این مقادیر همگی غیر منفی باشند، به جواب بهینه رسیده‌اید و جواب بهینه با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$z = C_B B^{-1} b = Yb$$
$$X_B = B^{-1} b$$

در غیر این صورت متغیری را که دارای کوچکترین ضریب منفی است انتخاب کنید. این متغیر متغیر ورودی به پایه است.

گام ۲: تعیین متغیر خروجی:

انتخاب متغیر خروجی مستلزم در اختیار داشتن ضرایب متغیر ورودی در محدودیت‌ها است. در صورتی که متغیر x_j ورودی باشد ضرایب فعلی آن را با $\bar{a}_j$ نشان داده شده و به وسیله رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{a}_j = B^{-1} a_j$$

مقدار متغیرهای اساسی فعلی (اعداد سمت راست محدودیت‌ها) را از رابطه زیر برای ضرایب مثبت ستون لولا به دست می‌آوریم.

$$X_B = B^{-1} b = \bar{b}$$
$$\frac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{kj}} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} \middle| \bar{a}_{ij} > 0 \,,\; i = 1, \ldots, m \right\}$$

آنگاه محدودیت k ام سطر لولا خواهد بود که متغیر پایه آن از پایه خارج می‌گردد. همچنین $\bar{a}_{kj}$ عنصر چرخش لولایی (عدد لولا) می‌باشد.

گام ۳: تعیین B^{-1} جدید:

متغیرهای اساسی جدید را معین کرده و B^{-1} جدید را از رابطه زیر به دست آورید و به گام اول بازگردید.

$$B^{-1}_{\text{NEW}} = U B^{-1}_{\text{OLD}}$$

برای به دست آوردن U یک ماتریس همانی (واحد) I را انتخاب و به جای ستون kام آن بردار زیر را جایگزین می‌نماییم.

$$\mu = \frac{1}{\overline{a}_{kj}} \begin{bmatrix} -\overline{a}_{1j} \\ -\overline{a}_{2j} \\ \vdots \\ -\overline{a}_{k-1,j} \\ 1 \\ -\overline{a}_{k+1,j} \\ \vdots \\ -\overline{a}_{m,j} \end{bmatrix}$$

جدول اولیه:

پایه	مقدار	X	S
Z	0	$-c$	0
S	b	A	I

بعد از k بار تکرار عملیات چرخش لولایی $k = 0,1,2,\ldots$ داریم:

پایه	مقدار	X	S
Z	$C_B B^{-1} b$	$-c + yA$	y
X_B	$B^{-1}b$	$B^{-1}A$	B^{-1}

مثال:

$$\max \ z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$s.t. \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 48 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \le 20 \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \le 8 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,2,3 \end{cases}$$

$$b = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1.5 \\ 2 & 1.5 & .5 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 \end{bmatrix}$$

$$B = I = B^{-1}, \quad X_B = S, \quad C_B = 0, \quad Y = 0$$

$$\overline{C} = (-60, -30, -20)$$

گام‌های ۱و۲:

$$\text{ورودی به پایه } x_1 \to \min\left\{\frac{48}{8}, \frac{20}{4}, \frac{8}{2}\right\} = 4 \to s_3 \text{ خروجی}$$

بنابراین عنصر چرخش لولایی عبارتست از:

$$\bar{a}_{31} = 2$$

$$X_B = (s_1 \quad s_2 \quad x_1)^T$$

$$B^{-1}{}_{New} = UB^{-1}{}_{Old} = UI = U$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$X_B = (s_1, s_2, x_1) \to \quad y_1 = 0 \quad y_2 = 0 \quad \bar{c}_1 = 0$$
$$y_3 = ? \quad \bar{c}_2 = ? \quad \bar{c}_3 = ?$$

$$Y = C_B B^{-1} \Rightarrow y_3 = c_B (B^{-1})_{03}$$
$$\Rightarrow y_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 30$$

$$\bar{C} = -C + yA \to$$
$$\bar{c}_2 = -c_2 + yA_{02}$$
$$= -30 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} = 15$$
$$\bar{c}_3 = -c_3 + yA_{.3}$$
$$= -20 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = -5 \le 0$$

چون ضریب x_3 منفی می‌باشد، پس جدول بهینه نمی‌باشد و x_3 ورودی به پایه می‌باشد. خروجی را نیز با تست نسبت مشخص می‌کنیم:

$$B^{-1}A_{.3} = \bar{A}_{.3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ .25 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b \Rightarrow \bar{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = 4, \quad \bar{b}_3 = 4$$

$\min\left\{ {4}/{0.5}, {4}/{0.25} \right\} = 8 \rightarrow$ خروجی s_2 و x_3 ورودی به پایه

و عنصر چرخش لولایی عبارتست از:

$$\bar{a}_{23} = 0.5$$
$$X_B = (s_1, x_3, x_1)$$

بردار μ را جایگزین ستون دوم I می‌کنیم:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_1 = 0 \quad \bar{c}_2 = ? \quad \bar{c}_3 = 0$$
$$y_1 = 0 \quad y_2 = ? \quad y_3 = ?$$

$$Y = C_B B^{-1} \Rightarrow y_2 = C_B \left(B^{-1}\right)_{.2} \Rightarrow$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -0.5 \end{bmatrix} = 10$$

$$y_3 = C_B \left(B^{-1}\right)_{.3} \Rightarrow$$

$$y_3 = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ 1.5 \end{bmatrix} = 10$$

$$\overline{C} = -C + YA \Rightarrow$$

$$\overline{c}_2 = -c_2 + YA_{02} = -30 + \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} = 5$$

چون تمام متغیرهای غیرپایه مثبت شدند، این جواب بهینه می‌باشد:

$$z^* = Yb = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} = 280$$

$$X_B^* = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

جدول بهینه مثال فوق به شکل زیر می‌باشد.

پایه	مقدار	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
z	280	0	5	0	0	10	10
s_1	24	0	–2	0	1	2	–8
x_3	8	0	–2	1	0	2	–4
x_1	2	1	1.25	0	0	–0.5	1.5

با دامنه تغیرات پارامترهای:

$$56 \le c_1 \le 80, \quad c_2 \le 35, \quad 15 \le c_3 \le 22.5$$
$$24 \le b_1, \qquad 16 \le b_2 \le 24, \quad 20/3 \le b_3 \le 10$$

تمرین:

مسئله زیر را با روش سیمپلکس تجدید نظر شده حل کنید:

$$\max \quad Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 10 \\ 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 \le 15 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

فصل دوم - برنامه‌ریزی شمار

۲-۱- مقدمه

مدل‌های برنامه‌ریزی خطی که در درس تحقیق در عملیات ۱ مورد بررسی قرار گرفتند، همگی پیوسته بودند؛ بدین معنی که متغیرهای تصمیمگیری می‌توانستند اعداد کسری به خود بگیرند. به عنوان مثال به سادگی امکان دارد ۱۰۲/۷۵ گالن از محصول قابل تقسیمی مثل مایعات را تولید کرد. اما در مواقعی جواب‌های کسری واقع بینانه نیستند و باید متغیرهای تصمیم‌گیری عدد صحیح به خود بگیرند.

به عنوان مثال مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\max \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i=1,\ldots,m) \\ x_j \geq 0 & (i=1,\ldots,m) \\ x_j \in \mathrm{Z} & (\text{for all or some of } j=1,\ldots,n) \end{cases}$$

این مسأله، برنامه‌ریزی (خطی) با متغیرهای مقدار صحیح (شمار یا گسسته) نامیده می‌شود. اگر در همین مسأله برخی از متغیرها صحیح و برخی کسری باشند، برنامه‌ریزی (خطی) با اعداد مختلط نامیده می‌شود. در این قسمت با مدل‌سازی برنامه‌ریزی با اعداد صحیح و شیوه‌های اساسی حل مسأله‌های برنامه‌ریزی با اعداد صحیح و مختلط آشنا می‌شوید.

۲-۲- مدل‌هایی با متغیرهای صحیح

در هر زمینه کاربردی، برنامه‌ریزی با اعداد صحیح می‌تواند مطرح باشد. در شروع برای بیان اهمیت این مدل‌ها، در اینجا سه زمینه از برنامه‌ریزی با اعداد صحیح را که نقش مهمی در پشتیبانی تصمیمات مدیران ایفا می‌کنند، معرفی می‌کنیم. در هر حالت تنها مدل‌های پایه‌ای را ارائه داده و توسعه‌های ممکن را پیشنهاد می‌دهیم.

۲-۲-۱- مسأله بودجه‌بندی سرمایه[1]

---

[1] Capital Budgeting

در یک مسأله بودجه‌بندی سرمایه، ما باید از بین چند گزینه مطرح گزینه‌های بهینه را انتخاب کنیم. مسأله مورد نظر، برنامه‌ریزی با اعداد صحیح ۰ و ۱ می‌باشد. یعنی متغیرهای تصمیم، تنها مقادیر ۰ و ۱ را به خود می‌گیرند که مقدار ۰ به معنی عدم انتخاب سرمایه‌گذاری و ۱ به معنی انتخاب سرمایه‌گذاری است.

اگر متغیرها و پارامترها را به این صورت در نظر بگیریم:

متغیر تصمیم‌گیری: x_j

سود حاصل از j امین سرمایه‌گذاری: c_j

میزان استفاده j امین سرمایه‌گذاری از i امین منبع: a_{ij}

میزان موجود از منبع i ام: b_i

این مسأله به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\max \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & (i=1,\dots,m)\\ x_j = 0,1 & (j=1,\dots,n)\end{cases}$$

با در نظر گرفتن ملاحظات منطقی، مدل بودجه‌بندی سرمایه می‌تواند خیلی غنی‌تر گردد. برای مثال فرض کنید سرمایه‌گذاری روی یک خط تولید جدید منوط به سرمایه‌گذاری روی یک واحد تولیدی قبلی است. این وابستگی به سادگی توسط محدودیت $x_j \geq x_i$ قابل فرموله کردن است. بدین معنی که اگر $x_i = 1$ باشد و پروژه i (تولید محصول جدید) قبول شود، در این صورت $x_j = 1$ می‌شود و این بدین معنی است که پروژه j بایستی انتخاب شود. مثال دیگر در نظر گرفتن پروژه‌های ناسازگار است. به عنوان نمونه، محدودیت $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1$ بیان می‌کند که حداکثر یکی از این چهار پروژه می‌تواند انجام شود. همچنین اگر بخواهیم دو پروژه هر دو انجام شود یا هیچ کدام انجام نگیرد محدودیت $x_j = x_i$ را به مدل اضافه می‌کنیم.

باید در نظر داشت که در مدل‌های پیوسته، زمان حل تنها با $N(m^3)$ رابطه مستقیم دارد که m تعداد محدودیت‌ها می‌باشد و با افزودن محدودیت‌ها زمان حل برنامه افزوده می‌شود. اما در مدل‌های شمار هم تعداد محدودیت‌ها و هم تعداد متغیرها بر روی زمان حل مسأله تاثیرگذارند.

برای کاهش زمان حل مسأله، در برخی موارد می‌توان از روش‌های ابتکاری در نحوه فرمولاسیون جهت کاهش تعداد محدودیت‌ها استفاده کرد. مثلا اگر محدودیت ما انجام ۵ پروژه باهم و یا هیچ‌کدام باشد، به جای این که محدودیت‌ها را دوتا دوتا به صورت $x_1 = x_2, x_2 = x_3, \cdots$ بنویسیم، می‌توانیم این چند محدودیت را یکباره و به صورت $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4x_5$ بنویسیم. یا به عنوان مثالی دیگر اگر محدودیت

ما امکان انتخاب از یکی از دو مجموعه $\{x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ و $\{x_r, x_s, x_t\}$ باشد، می‌توان از یکی از دو فرم زیر استفاده کرد:

$$\begin{cases} x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \le 5y_1 \\ x_r + x_s + x_t \le 3y_2 \\ y_1 + y_2 \le 1 \end{cases}$$

و یا:

$$\begin{aligned} x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + 5x_r &\le 5 \\ x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + 5x_s &\le 5 \\ x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + 5x_t &\le 5 \end{aligned}$$

که در حالت دوم متغیر جدیدی به مسأله اضافه نشده است.

۲-۲-۲- مساله کوله‌پشتی

ساده‌ترین مدل بودجه‌بندی سرمایه تنها یک محدودیت منبع دارد، که در علم مدیریت یکی از مدل‌های مهم به شمار می‌رود و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \\ x_j = 0,1 \quad (j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

این مسأله، مسأله کوله‌پشتی نامیده می‌شود. زیرا شبیه به وضعیتی است که یک کوهنورد باید تصمیم بگیرد چه وسایلی را درسفرش به همراه داشته باشد. در اینجا c_j مطلوبیت[۱] به همراه داشتن وسیله j است که وزن آن $a_j > 0$ کیلوگرم است. هدف حداکثر کردن مطلوبیت است بدین شرط که بار همراه از b کیلوگرم تجاوز نکند.

به دلایل زیادی مدل کوله پشتی از اهمیت زیادی در برنامه‌ریزی خطی برخوردار است. روش‌های حل مدل کوله‌پشتی نقطه شروعی برای روش‌های حل برنامه‌های با اعداد صحیح در حالت کلی هستند. همچنین می‌توان نشان داد که تعداد زیادی از برنامه‌های با اعداد صحیح با آن معادل هستند.

---

۱ Utility

نکته: اگر حمل بیش از یک واحد از هر وسیله مجاز باشد، به جای محدودیت " $x_j = 0,1$ " از محدودیت " $x_j \geq 0$, $x_j \in Z$ " استفاده می‌کنیم.

۲-۲-۳- مسأله تعیین محل انبارها

در مدل‌سازی سیستم‌های توزیع باید درباره ارزش معاوضه‌های بین هزینه‌های حمل و نقل و هزینه‌های عملیاتی مراکز توزیع تصمیم گرفت.

به عنوان مثال فرض کنید مدیری باید تصمیم بگیرد از میان n انبار از کدام یک برای برآوردن تقاضای m مشتری برای کالایی استفاده کند. تصمیمات مورد نظر شامل انتخاب انبار و مقدار حمل کالا از هر انبار به هر مشتری است.

برای این مدل دو نوع محدودیت در نظر می‌گیریم:

1. تقاضای d_j برای هر مشتری بایستی از انبارها تامین شود.
2. کالا از یک انبار تنها وقتی حمل می‌شود که انبار باز باشد.

تابع هدف مجموع هزینه‌های حمل و نقل و هزینه‌های انبارداری و هزینه‌های ثابت برای فعال کردن انبارهاست.

اگر متغیرها و پارامترها را به این صورت در نظر بگیریم:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر انبار } i \text{ باز باشد:} \\ 0 & \text{اگر انبار } i \text{ باز نباشد:} \end{cases}$$

x_{ij}: مقدار کالایی که از انبار i به مشتری j فرستاده می‌شود:

f_i: هزینه ثابت فعال کردن برای انبار i:

c_{ij}: هزینه عملیاتی درانبار i به علاوه هزینه حمل و نقل از انبار i به مشتری j برای هر واحد از کالا:

با در نظر گرفتن این موضوع که تنها زمانی از یک انبار کالا حمل می‌شود که آن انبار باز باشد و اینکه کل کالای حمل شده از مقدار کل تقاضا نمی‌تواند زیادتر باشد؛ این مسأله به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\min \quad z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{n}f_i y_i$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=d_j & (j=1,\cdots,m)\\ \sum_{j=1}^{m}x_{ij}-y_i(\sum_{j=1}^{m}d_j)\le 0 & (i=1,\cdots,n)\\ x_{ij}\ge 0 & (i=1,\cdots,n\ ,\ j=1,\cdots,m)\\ y_i=0,1 & (i=1,\cdots,n)\end{cases}$$

۲-۲-۴- مسأله زمان‌بندی

تمام مسأله‌هایی که تحت عنوان توالی عملیات[1] و زمانبندی و مسیریابی[2] عنوان می‌شوند ذاتاً برنامه‌های با متغیرهای اعداد صحیح هستند.

به عنوان یک مثال خاص زمانبندی پرسنل پرواز خطوط هواپیمایی را در نظر بگیرید. یک شرکت هواپیمایی چند قطعه مسیر برای پرواز دارد. مثل پرواز ۷ صبح تهران - اصفهان و یا پرواز ۱ عصر اصفهان - مشهد. شرکت باید کادر خود رابرای مسیرها به نحوی تنطیم کند که تمام پروازها انجام شوند.

در این مدل، متغیرهای تصمیم‌گیری، زمانبندی و تخصیص کادرها را به مسیرها مشخص می‌کنند. اگر متغیرها و پارامترها را به این صورت در نظر بگیریم:

$x_j \begin{cases}1 \\ 0\end{cases}$ اگر کادری به مسیر j تخصیص داده شود: 1 / اگر کادری به مسیر j تخصیص داده نشود: 0

$a_{ij} \begin{cases}1 \\ 0\end{cases}$ اگر قطعه i در مسیر j باشد: 1 / اگر قطعه i در مسیر j نباشد: 0

c_j : هزینه تخصیص یک کادر به مسیر j

این مسأله را می‌توان به دو صورت فرموله کرد. صورت اول که به مدل تفکیک مجموعه‌ها معروف است به صورت زیر است:

$$\min \quad z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=1 & (i=1,\cdots,m)\\ x_j=0,1 & (j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

(مدل تفکیک مجموعه‌ها)

---

[1] Sequencing
[2] Routing

در مدل فوق محدودیت اول ایجاب می‌کند که یک کادر پرواز باید به یک مسیری که قطعه پرواز i را در بر دارد، تخصیص داده شود. صورت دوم از این مسأله که به مدل پوشش مجموعه‌ها معروف است، اجازه می‌دهد که کادر پرواز نیز مانند سایر مسافرین در هواپیما سوار شود. مدل پوشش مجموعه‌ها به صورت زیر است:

$$\min \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq 1 & (i=1,\cdots,m)\\ x_j=0,1 & (j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

(مدل پوشش مجموعه‌ها)

برای مثال اگر $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 3$ باشد در این صورت دو کادر پرواز به عنوان مسافر پرواز می‌کنند تا بین سایر قطعه پروازها انجام وظیفه کنند.

۲-۲-۵- مسأله تخصیص

فرض شود ما n کار و n ماشین داریم و هزینه تخصیص کار i به ماشین j برابر c_{ij} است. می‌خواهیم یک رابطه یک به یک بین کارها و ماشین‌ها طوری برقرار نماییم که هزینه کل حداقل گردد. متغیر تصمیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{اگرکار } i \text{ به ماشین } j \text{ تخصیص یابد:}\\ 0 & \text{در غیراین صورت:}\end{cases}$$

مدل این مسأله به این شکل است:

$$\min \quad z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1 & (i=1,\ldots,n)\\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1 & (i=1,\ldots,n)\\ x_{ij}=0,1 & (i,j=1,\ldots,n)\end{cases}$$

باید توجه داشت که می‌توان به مدل تخصیص به عنوان یک مدل حمل و نقل که در آن مقادیر عرضه‌ها و تقاضاها برابر یک واحد است نگاه کرد.

۲-۲-۶- مسأله فروشنده دوره‌گرد یا سیار

در اوایل سال ۱۹۳۲ در کتابی که در آلمان به چاپ رسید به مسأله فروشنده دوره‌گرد اشاره شد. پس از آن در سال ۱۹۴۸ شرکت رند[1] مسأله فروشنده دوره‌گرد را دوباره معرفی کرد و شهرت این شرکت در اروپا سبب شد مسأله فروشنده دوره‌گرد مشهور گردد. پس از آن این مسأله در طول سال‌ها ذهن محققین علاقه‌مند را به خود معطوف داشته است؛ به طوری که تا به حال مقاله‌های زیادی در باره حل این مسأله به چاپ رسیده است. برای اطلاعات بیشتر مرجع [۱] توصیه می‌گردد.

فرض کنید n شهر داریم. می‌خواهیم از یک شهر شروع به حرکت نموده و به هر شهر فقط یک بار وارد و فقط یک بار خارج شویم و در انتها به شهر مبدا باز گردیم؛ با این شرط که مسافت طی شده کمترین مسافت باشد. این مسأله را مسأله فروشنده دوره‌گرد می‌نامند و به مسیری که به این صورت به وجود می‌آید، تور گفته می‌شود.

در صورتی که مسافت شهر m به شهر k با مسافت شهر k به شهر m برای تمام مقادیر m و k برابر باشد، مسأله فروشنده دوره‌گرد را متقارن و در غیر این صورت مسأله فروشنده دوره‌گرد را نامتقارن می‌نامند.

برای فرموله کردن این مسأله، به محدودیت‌هایی احتیاج داریم که از ایجاد زیرتور در جواب نهایی جلوگیری کند. منظور از زیرتور مسیرهای بسته جدا از هم است که مطلوب مسأله نیست.

با فرض اینکه تعداد کل شهرها n است و C_{ij} هزینه (فاصله یا زمان) رفتن از شهر i ام به شهر j ام باشد با استفاده از متغیرهای دوگانه x ها که مقدار ۰ یا ۱ را به‌خود می‌گیرند به‌گونه‌ای که $x_{ij}=1$ اگر و فقط اگر از شهر i ام به شهر j ام برویم مدل خطی این مسأله با این شرط که اندیس‌های i و j برابر نباشند به صورت زیر می‌باشد[۵]. در این مدل آن دسته از محدودیت‌هایی که در آنها از U ها استفاده شده است از ایجاد هر نوع زیر تور جلوگیری می‌کنند. برای مثال اگر از شهر i ام به شهر j ام و سپس از شهر j ام به شهر k ام برویم میبایست داشته باشیم:

$$U_i - U_j \le -1 \text{ و } U_j - U_k \le -1$$

تا معادلات مربوطه صادق گردند که با جمع این دو نامعادله خواهیم داشت $U_i - U_k \le -2$ لذا داریم:

$$U_k - U_i \ge 2 \text{ و } U_k - U_j \ge 1 \text{ و } U_j - U_i \ge 1$$

---
[1] Rand

که این مقادیر مثبت رفتن از شهر j ام به شهر i ام و رفتن از شهر k ام به شهر j ام و رفتن از شهر k ام به شهر i ام را غیر ممکن می‌کنند. برای دیدن برخی مدل‌های دیگر این مسأله به مراجع [۱] تا [۵] مراجعه نمائید

$$\min \quad z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1 & (j=1,\dots n\,,\, i\neq j) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1 & (i=1,\dots,n\,,\, i\neq j) \\ U_i-U_j+nx_{ij}\leq n-1 & (2\leq i\leq n\ ,\ 2\leq j\leq n\ ,\ i\neq j) \\ x_{ij}=0,1 & (i=1,\dots,n\,,\ j=1,\dots,n\,,\, i\neq j) \\ U_j>0 & (j=1,\dots,n) \end{cases}$$

مسأله عمومی فروشنده دوره‌گرد در زمره مسأله‌های بهینه‌سازی ترکیبی قرار دارد که زمان حل آن تابعی نمایی از تعداد شهرها می‌باشد.

مسأله فروشنده دوره‌گرد کاربردهای زیادی دارد. مسیریابی ابزار، قالب‌ها، قوس‌های برقی، مشعل‌ها، پرتوافکن‌ها و بخاردهندگان برای تولید یک ویژگی خاص برروی یک قطعه از نمونه‌های دو بعدی و سه بعدی مسأله فروشنده دوره‌گرد می‌باشد.

یکی دیگر از کاربردهای مرتبط با این مسأله، در مورد شرکت‌های توزیع کالا می‌باشد. برای مثال یک شرکت پخش فرآورده‌های لبنی را در نظر بگیرید که باید روزانه حمل و نقل کالای خود را به m مکان مختلف یک شهر انجام دهد و برای انجام این کار t وسیله نقلیه در اختیار دارد. می‌توان به کمک مدل مسأله فروشنده دوره‌گرد، مسافت طی شده بین کارخانه و این m مکان را به حداقل ممکن کاهش و کار توزیع را با کمترین تعداد وسیله نقلیه انجام داد که در نهایت با کاهش هزینه‌های حمل و نقل، بازدهی کار افزایش می‌یابد و در مصرف سوخت و آلودگی هوا و حجم ترافیک کاهش ایجاد می‌شود. در این گونه مسأله‌ها به علت یک طرفه بودن برخی مسیرها و یا تفاوت حجم ترافیک در دو جهت یک خیابان دو طرفه، مسأله ما یک مسأله نامتقارن است. بنابراین این مسأله علاوه بر جنبه نظری از جنبه کاربردی هم دارای اهمیت می‌باشد.

به طور کلی از دو دسته از روش‌ها برای حل مسأله فروشنده دوره‌گرد استفاده می‌شود: روش‌های دقیق و روش‌های ابتکاری.

روش‌های دقیق این مزیت را دارند که در نهایت جواب بهینه را به دست می‌دهند. اما یکی از معایب آنها این است که به دلیل در نظر گرفتن تمام مجموعه‌های قابل قبول برای یافتن جواب بهینه در مورد

مسأله‌های بزرگ وقت‌گیر و در بسیاری از موارد غیر عملی می‌باشند. اما در ابعاد کوچک جواب‌های بهینه را در اختیار قرار می‌دهند. از جمله روش‌های دقیق برای حل مسأله فروشنده دوره‌گرد می‌توان روش‌های شمارش کامل [۲]، شاخه و کرانه[1] [۳] (برای مثال روش‌های لیتل و ایستمن[2]) و برنامه‌ریزی پویا[3] [۲] را نام برد.

در مسأله‌های بهینه‌سازی ترکیبی با افزایش اندازه مسأله، راه حل‌های دقیق جواب بهینه را در زمان قابل قبول به دست نمی‌دهند. در این گونه موارد راه‌حل‌های ابتکاری مناسب به نظر می‌رسند که از جمله روش‌های ابتکاری می‌توان الگوریتم نزدیکترین شهر دیدار نشده را نام برد.

مدل فروشنده سیار به عنوان جزء اصلی بسیاری از مدل‌های مسیریابی و زمان‌بندی وسایل نقلیه به کار گرفته می‌شود، همچنین در زمان‌بندی تولید هم این مدل مطرح می‌شود. برای مثال ترتیب‌بندی $n-1$ کار بر روی یک ماشین با c_{ij} هزینه آماده‌سازی ماشین برای کار j باشد با فرض این که کار i توسط ماشین کامل شده باشد.

---

[1] Branch and Bound
[2] Little and Eastman
[3] Dynamic Programming

۲-۳- فرموله کردن برخی محدودیت‌های مورد نیاز در یک مسأله مدل‌سازی

در مدل بودجه بندی سرمایه، فرموله کردن محدودیت‌های پروژه‌های پیش‌نیازی و پروژه‌های ناسازگار را در برنامه‌ریزی اعداد صحیح دیدیم. در این قسمت روش‌های فرموله کردن برخی محدودیت‌های مورد نیاز در یک مسأله مدل‌سازی را به طور کامل‌تر با هم مرور می‌کنیم:

۲-۳-۱- پروژه‌های پیش‌نیازی

سرمایه‌گذاری روی یک خط تولید منوط به سرمایه‌گذاری روی یک واحد تولیدی قبلی است. این وابستگی توسط محدودیت $x_j \geq x_i$ قابل فرموله شدن است. یعنی اگر $x_i = 1$ شد، x_j نیز باید انجام گیرد. یعنی x_j پیش‌نیاز x_i است.

۲-۳-۲- پروژه‌های ناسازگار

اگر بخواهیم حداکثر یکی از n پروژه را برای سرمایه‌گذاری انتخاب کنیم، از محدودیت زیر استفاده می‌کنیم.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1$$

یعنی یا هیچ کدام از n پروژه اجرا نشود و یا حداکثر یکی از n پروژه می‌تواند اجرا شود.

۲-۳-۳- امکان‌پذیری محدودیت

اگر در مورد یک محدودیت خاص بخواهیم بررسی کنیم که آیا مقادیر معینی از متغیرهای تصمیم‌گیری باید در یک محدودیت صدق کند یا نه به صورت زیر عمل می‌کنیم:

محدودیت را به صورت $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq b$ در نظر می‌گیریم و متغیر y را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$y = \begin{cases} 0 & \text{مقادیردرمحدودیت باید صدق کند} \\ 1 & \text{درغیر این صورت} \end{cases}$$

در نتیجه محدودیت به شکل زیر در می‌آید:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq b + My$$

که M مقدار بزرگی می‌باشد. اگر $y=1$ باشد محدودیت جدید همواره برقرار است، و هرگاه $y=0$ باشد محدویت اصلی صادق است.

۲-۳-۴- محدودیت‌های جایگزین

اگر بخواهیم از بین دو محدودیت حداقل یکی و نه لزوما هر دوی این محدودیت‌ها صادق باشد به صورت زیر عمل می‌کنیم.

فرض کنید بخواهیم از دو محدودیت $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\le b_1$ و $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\le b_2$ حداقل یکی برقرار باشد. در این صورت می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
&f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\le b_1+My_1\\
&f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\le b_2+My_2\\
&y_1+y_2=1\\
&y_1,y_2=0,1
\end{aligned}$$

که در آن M عددی است بزرگ نسبت به ابعاد مسأله. با توجه به این که به جای محدودیت انتخاب یکی بین دو تا، یعنی $y_1+y_2=1$ می‌توان $y_2=1-y_1$ را قرار داد و در فرمولاسیون فوق یکی از متغیرها را حذف کرد:

$$\begin{aligned}
&f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\le b_1+My_1\\
&f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\le b_2+M(1-y_1)\\
&y_1=0,1
\end{aligned}$$

به عنوان مثال فرض کنید در مسأله‌ای هدف تولید یک محصول باشد و دو روش برای تولید این محصول وجود داشته باشد. می‌خواهیم از بین دو روش که دو محدودیت متفاوت را به مسأله اعمال می‌کند، یکی را انتخاب کنیم. فرض کنید دو محدودیت به صورت $6x_1+5x_2\le 60$ و $4x_1+5x_2\le 50$ وجود داشته باشد. بسته به این که کدام روش برای تولید انتخاب شود، متغیرهای تصمیم‌گیری x_1 و x_2 باید در محدودیت اولی یا دومی صدق کند که به این صورت نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
&6x_1+5x_2\le 100y+60\\
&4x_1+5x_2\le 50+100(1-y)\\
&y=0,1
\end{aligned}$$

۲-۳-۵- محدودیت‌های شرطی

این محدودیت‌ها به شکل منطقی زیر هستند:

$$f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)>b_1 \Rightarrow f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\le b_2$$

که با توجه به $(p\Rightarrow q)\equiv(\sim p\vee q)$، معادل با محدودیت زیر می‌باشد:

$$f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\le b_1 \vee f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\le b_2$$

حال اگر بخواهید حداقل k محدودیت از m محدودیت برقرار باشد:

$$\begin{cases} g_1(x)\le b_1 \\ \quad\vdots \\ g_m(x)\le b_m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} g_1(x)\le b_1+my_1 \\ \quad\vdots \\ g_m(x)\le b_m+my_m \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \le m-k$$

$$y_i=0,1 \quad i=0,1,\cdots,m$$

حداقل k تا از y_i ها صفر است.

مثلاً اگر بخواهید از سه محدودیت حداقل یکی از آنها برقرار باشد به صورت $y_1+y_2+y_3\le 2$ باید عمل کرد. (توجه داشته باشید که اگر $y_i=0$ باشد، محدودیت باید صدق کند)

مثال:

فرض کنید متغیر x فقط بتواند مقادیر خاصی بگیرد. مثلاً اگر x بتواند بین مقادیر زیر قرار بگیرد:

$$0\le x\le 10 \quad \text{or} \quad 22.5\le x\le 47.8 \quad \text{or} \quad 79.2\le x\le 130$$

در اینجا برای سه محدودیت، سه متغیر تعریف می‌کنیم که هر کدام به یک قسمت مرتبط می‌باشد:

$$0\le x_1\le 10 \quad \text{or} \quad 22.5\le x_2\le 47.8 \quad \text{or} \quad 79.2\le x_3\le 130$$

و شرایطی ایجاد می‌کنیم که فقط یکی از محدودیت‌ها صادق باشد:

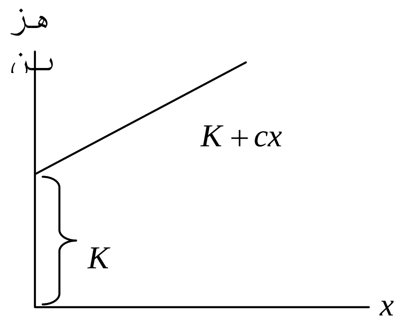
$$\begin{cases} 0 \le x_1 \le 10 y_1 \\ 22.5 y_2 \le x_2 \le 47.8 y_2 \\ 79.2 y_3 \le x_3 \le 130 y_3 \\ \sum_{i=1}^{3} y_i = 1 \qquad y_i = 0,1 \quad (i = 1,2,3) \\ x = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} y_1 = 1 \Rightarrow y_2 = y_3 = 0 \rightarrow x = x_1 \quad 0 \le x \le 10 \\ y_2 = 1 \Rightarrow y_1 = y_3 = 0 \rightarrow x = x_2 \quad 22.5 \le x \le 47.8 \\ y_3 = 1 \Rightarrow y_2 = y_1 = 0 \rightarrow x = x_3 \quad 79.2 \le x \le 130 \end{cases}$$

۲-۳-۶- هزینه‌های ثابت

در بسیاری از موارد تابع هدف برای مسأله حداقل کردن حاوی هزینه‌های ثابت است (مانند هزینه‌های ثابت اولیه در طراحی، هزینه‌های ثابت سرمایه‌گذاری و غیره). به عنوان مثال، هزینه‌های تولید x واحد از محصول خاصی ممکن است از هزینه ثابت راه‌اندازی تجهیزات و هزینه متغیر برای تولید هر واحد تشکیل شود. یک نمونه از این نوع هزینه در شکل زیر ارائه شده است.



$$\text{هزینه} \quad \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ K + cx & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

فرض کنید که تجهیزات دارای ظرفیت B واحد است. y را به عنوان یک متغیر دوتایی تعریف می‌کنیم که نشان می‌دهد چه موقعی هزینه ثابت انجام شده است؛ به طوری که $y = 1$ است هرگاه $x > 0$ باشد و $y = 0$ است هرگاه $x = 0$ باشد. در این صورت مقدار هزینه را می‌توان برحسب x به صورت زیر نوشت:

$$ky + cx$$

با محدودیت‌هایی به فرم:

$$\begin{cases} x \le By \\ x \ge 0 \\ y = 0 \quad \text{or} \quad 1 \end{cases}$$

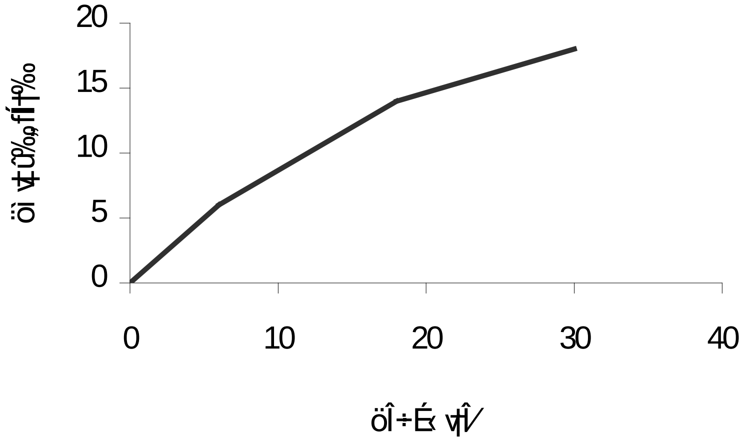
همچنان که می‌خواستیم هرگاه هزینه ثابت انجام نشده باشد، یعنی وقتی که $y = 0$ است این محدودیت‌ها نتیجه می‌دهند که $x = 0$ است. خود محدودیت‌ها نشان نمی‌دهند که اگر $x = 0$ باشد، $y = 0$ خواهد شد؛ بلکه وقتی که $x = 0$ است، عمل حداقل کردن به وضوح $y = 0$ را انتخاب می‌کند تا هزینه ثابت انجام نشود. بالاخره مشاهده می‌شود که اگر $y = 1$ باشد، محدودیت اضافه شده تبدیل به $x \le B$ می‌شود که حد ظرفیت روی تولید تجهیزات را منعکس می‌نماید.

۲-۳-۷- صرفه‌جویی به مقیاس

هرچه تعداد تولیدات بیشتر شود هزینه هر واحد کالا کمتر می‌شود که به آن صرفه‌جویی به مقیاس می‌گویند. فرض کنید تولید تا α واحد هزینه‌اش 1، از سطح تولید α تا β هر واحد هزینه‌اش $2/3$ و از سطح تولید β تا γ هر واحد هزینه‌اش $1/3$ باشد. مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$\min \quad f(x) = x_1 + \tfrac{2}{3} x_2 + \tfrac{1}{3} x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x = x_1 + x_2 + x_3 \ge 20 \\ 0 \le x_1 \le \alpha = 6 \\ 0 \le x_2 \le \beta - \alpha = 12 \\ 0 \le x_3 \le \gamma - \beta = 12 \end{cases}$$



اگر این روابط به همین صورت وارد محدودیت‌ها شود ممکن است جواب صحیحی به دست نیاوریم؛ زیرا جواب بهینه‌ای که به دست می‌آید، قابل قبول نیست. به عنوان مثال اگر جواب $x_1 = 1$ و $x_2 = 12$ و $x_3 = 12$ باشد، این جواب قابل قبول نیست. چون باید ابتدا x_1 به حد بالای خود برسد و بعد متغیر دوم مقدار مثبت به خود بگیرد. بنابراین برای این که محدودیت‌ها درست باشد و جواب صحیح بدهد، باید سه محدودیت آخر را با روابط زیر جایگزین کرد:

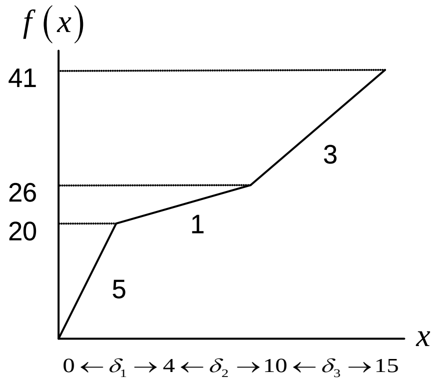
$$\alpha y_1 \le x_1 \le \alpha$$
$$(\beta-\alpha)y_2 \le x_2 \le (\beta-\alpha)y_1$$
$$0 \le x_3 \le (\gamma-\beta)y_2$$
$$y_1, y_2 = 0,1$$

در اینجا محدودیت‌هایی به مدل تحمیل شده است، تا ابتدا x_1 سپس x_2 و بعد از آن x_3 مقدار بگیرد.

نکته: اگر هدف حداقل کردن یک تابع مقعر باشد، باید از محدودیت‌های بالا استفاده کرد. اما اگر تابع محدب بوده یا تابع هدف حداکثر کردن تابع مقعر باشد نیازی به استفاده از محدودیت‌های بالا نیست.

۲-۳-۸- توابع یک متغیره غیر خطی پاره خطی

نوع دیگر از توابع غیرخطی که قابل نمایش توسط متغیرهای صحیح است، منحنی قطعه‌بندی شده خطی می‌باشد. شکل زیر منحنی هزینه توسعه یک واحد تولیدی را که حاوی سه قطعه خطی با هزینه‌های متغیر ۵ و ۱ و ۳ میلیون دلار برای توسعه هر ۱۰۰ واحد می‌باشد را نشان می‌دهد.



برای مدل کردن منحنی هزینه، هر مقدار x را به صورت مجموع سه متغیر δ_1 و δ_2 و δ_3 نشان می‌دهیم. تا هزینه هر یک از این متغیرها خطی باشد. بنابراین:

$$x = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

که در آن

$$0 \le \delta_1 \le 4$$
$$0 \le \delta_2 \le 6$$
$$0 \le \delta_3 \le 5$$

و کل هزینه متغیر عبارتست از:

$$\text{Cost} = 5\delta_1 + \delta_2 + 3\delta_3$$

توجه کنید که متغیرها طوری تعریف شده‌اند که:

- δ_1 به مقداری از x که از صفر بیشتر باشد ولی کوچکتر یا مساوی ۴ باشد مر بوط می‌شود.
- δ_2 مازاد مقدار x از ۴ است تا موقعی که x کوچکتر یا مساوی ۱۰ است.
- δ_3 مازاد مقدار x از ۱۰ است تا موقعی که x کوچکتر یا مساوی ۱۵ است.

اگر قرار باشد چنین تفسیری صحیح باشد، همچنین نیاز داریم که $\delta_1 = 4$ باشد هرگاه $\delta_2 > 0$، و $\delta_2 = 6$ باشد، هرگاه $\delta_3 > 0$ باشد.در غیر این صورت مثلا وقتی که $x = 2$ است، هزینه درصورتی حداقل می‌شود که $\delta_1 = \delta_3 = 0$ و $\delta_2 = 2$ انتخاب شوند؛ زیرا متغیر δ_2 کمترین هزینه متغیر را دارد. اما شرایط حاکم بر متغیرها در واقع همان محدودیت‌های شرطی هستند که به سادگی با استفاده از متغیرهای دوتایی مانند قبل قابل مدل شدن هستند.

اگر فرض کنیم:

$$w_1 = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \delta_1 \text{ در حد بالایی خود باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$w_2 = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \delta_2 \text{ در حد بالایی خود باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت برای حصول اطمینان از برقراری محدودیت‌های شرطی مناسب، محدودیت‌های زیر می‌توانند جایگزین محدودیت‌های قبلی شوند.

$$\begin{aligned} &4w_1 \le \delta_1 \le 4 \\ &6w_2 \le \delta_2 \le 6w_1 \\ &0 \le \delta_3 \le 5w_2 \\ &w_1, w_2 \quad \text{Binary} \end{aligned}$$

توجه کنید که اگر $w_1 = 0$ باشد، در این صورت $w_2 = 0$ خواهد شد تا شرط امکان‌پذیری برای محدودیت اعمال شده روی δ_2 حفظ شود و محدودیت‌های فوق تبدیل می‌شوند به:

$$\begin{aligned} &0 \le \delta_1 \le 4 \\ &\delta_2 = 0 \\ &\delta_3 = 0 \end{aligned}$$

و اگر $w_1 = 1$ و $w_2 = 0$ باشد، در این صورت محدودیت‌های فوق تبدیل می‌شوند به:

$$\begin{aligned} &\delta_1 = 4 \\ &0 \le \delta_2 \le 6 \\ &\delta_3 = 0 \end{aligned}$$

و بالاخره اگر $w_1 = 1$ و $w_2 = 1$ باشد، در این صورت محدودیت‌های فوق تبدیل می‌شوند به:

$$\begin{aligned} &\delta_1 = 4 \\ &\delta_2 = 6 \\ &0 \le \delta_3 \le 5 \end{aligned}$$

بنابراین مشاهده می‌کنیم که سه ترکیب امکان‌پذیر برای مقادیر w_1 و w_2 وجود دارد:

- $w_1 = 0$ و $w_2 = 0$ که مربوط می‌شود به $0 \le x \le 4$ زیرا $\delta_2 = \delta_3 = 0$

- $w_1 = 1$ و $w_2 = 0$ که مربوط می‌شود به $4 \le x \le 10$ زیرا $0 \le \delta_2 \le 6, \delta_1 = 4$
- $w_1 = 1$ و $w_2 = 1$ که مربوط می‌شود به $10 \le x \le 15$ زیرا $\delta_1 = 4, \delta_2 = 6$

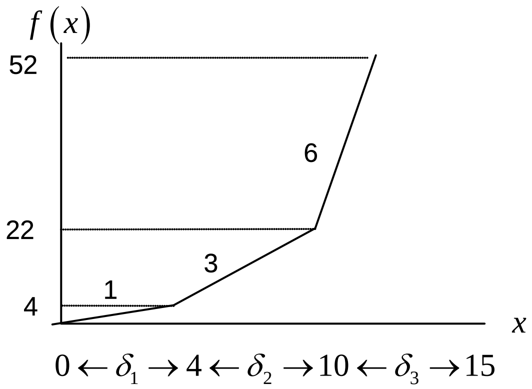
برای منحنی‌های خطی قطعه‌بندی شده با هر تعداد قطعه، تکنیک کلی مشابهی قابل به کارگیری است، محدودیت کلی روی متغیر δ_1 برای j امین قطعه عبارت است از:

$$L_j w_j \le \delta_j \le L_j w_{j-1}$$

که در آن L_j طول قطعه است.

۲-۳-۹- عدم صرفه‌جویی به مقیاس

حالت خاص مهمی از نمایش توابع غیرخطی هنگامی اتفاق می‌افتد که عدم صرفه‌جویی به مقیاس مد نظر است. یعنی وقتی که هزینه‌های حاشیه‌ای برای یک مسأله حداقل کردن در حال افزایش هستند یا عواید حاشیه‌ای برای یک مسأله حداکثر کردن در حال کاهش می‌باشند. فرض کنید هزینه توسعه در مثال قبلی، توسط شکل زیر مشخص شده باشد.



شکل ۶-۹ عدم صرفه‌جویی به مقیاس

در این حالت هزینه به شکل زیر نشان داده می‌شود:

$$\text{هزینه} = \delta_1 + 3\delta_2 + 6\delta_3$$

تنها محدودیت‌های لازم عبارتند از:

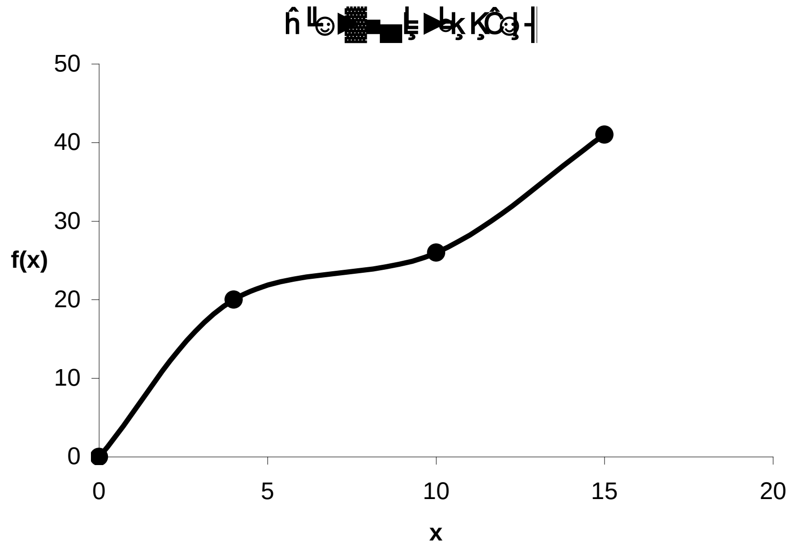
$$0 \le \delta_1 \le 4$$
$$0 \le \delta_2 \le 6$$
$$0 \le \delta_3 \le 5$$

اگر این نوع منحنی هزینه در تابع هدف یک مسأله حداقل کردن ظاهر گردد؛ محدودیت‌های شرطی در فرمولاسیون قبلی که متغیرهای دوتایی بودند، قابل صرف‌نظر کردن هستند. زیرا ضرایب $\delta_3, \delta_2, \delta_1$ نتیجه می‌دهد که همواره بهتر است قبل از این که $\delta_2 > 0$ شود $\delta_1 = 4$ انتخاب گردد و قبل از این که $\delta_3 > 0$ شود $\delta_2 = 6$ انتخاب گردد. در نتیجه متغیرهای صحیح به کلی حذف شده‌اند.

اما اگر صرفه‌جویی به مقیاس وجود داشته باشد، این نمایش بدون متغیرهای صحیح درست نیست. برای مثال اگر تابع داده شده درشکل ۶-۹، در یک مسأله حداکثرکردن ظاهر شود، بهترین کار انتخاب قطعه سوم با متغیر δ_3 قبل از انتخاب دو قطعه اول خواهد بود؛ زیرا عایدی این قطعه بیشتر است. در این گونه مواقع استفاده از متغیر دوتایی بخش گذشته الزامی می‌باشد.

۲-۳-۱۰- تقریب خطی مدل غیرخطی

یکی از مفیدترین کاربردهای توابع خطی قطعه‌بندی شده، تقریب پاره خطی توابع غیرخطی یک متغیره است. به عنوان مثال فرض کنید هزینه توسعه مورد بحث ما مطابق شکل زیر باشد:



نقاط شکست معمولا به دلخواه انتخاب می‌شود، ولی گاهی طبق شرایط مسأله نقاط شکست مشخص می‌شود.

چنانچه قطعه خطوطی که نقاط انتخاب شده روی منحنی را به هم وصل می‌کنند به هم وصل شود، یک تقریب پاره خطی به دست می‌آید. که در مدل می‌تواند به جای منحنی بالا مورد استفاده قرار گیرد.

با استفاده از نقاط بیشتر روی منحنی می‌توان تقریب را به هر اندازه که بخواهیم دقیق‌تر کنیم.

تمرین:

یک تقریب پاره خطی برای مسأله زیر بیابید که نقاط شکست برای x_1 ؛ ۲۰، ۱۰، ۵، ۰ باشد و نقاط شکست برای x_2؛۰،۴،۱۱،۱۶،۲۲،۳۰ باشد.

$$\min \quad 2x_1^3 - 4x_1^2 + 10x_1 - 3x_2^2 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ x_1^2 + 2x_1 - 2x_2^2 + 6x_2 \ge 5 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

۲-۴- روش‌های حل مدل‌های دارای متغیرهای صحیح

در برابر روش سیمپلکس که روش خوبی برای حل برنامه‌های خطی است، روش خاص و واحدی برای حل برنامه‌های با اعداد صحیح وجود ندارد. بلکه طی مرور زمان، روش‌های متعددی توسعه یافته که عملکرد هر تکنیک، به نوع مسأله بستگی دارد.

روش‌های موجود را می‌توان در سه گروه عمده طبقه‌بندی کرد:

- تکنیک‌های شمارشی[1] شامل روش شاخه و کرانه[2]
- تکنیک‌های صفحه برشی[3]
- تکنیک‌های نظریه گروه[4]

روش‌های حل را می‌توان به دو گروه عمده روش‌های کلاسیک و غیرکلاسیک تقسیم‌بندی کرد. از جمله روش‌های کلاسیک روش برشی، روش شاخه و کرانه و روش شمارش ضمنی می‌باشد که روش شمارش ضمنی برای هر دو مدل خطی و غیرخطی به کار می‌رود.

در روش برشی و روش شاخه و کرانه ابتدا مسأله خطی و بدون شرط صحیح بودن در نظر گرفته می‌شود. پس از حل، جواب‌های به دست آمده کنترل می‌شود. اگر جواب‌ها در شروط صدق نکرد، باید با استفاده از تکنیک‌های برشی و شاخه و کرانه در جهت به دست آوردن جواب بهینه حرکت کنیم.

۲-۴-۱- روش مجارستانی برای حل مسأله تخصیص

مدل عمومی مسأله تخصیص را در نظر بگیرید:

$$\min \quad z=\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1 & j=1,\dots,n \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1 & i=1,\dots,n \\ x_{ij}=0,1 & i,j=1,\dots,n \end{cases}$$

روش مجارستانی بر این اصل بنا شده است که اگر به یکی از سطرها یا ستون‌های ماتریس تخصیص C، مقدار ثابت k را اضافه نماییم جواب بهینه تغییری نمی‌کند. دلیل این امر این است که اضافه کردن مقدار

1- Enumeration
2- Branch and Bound
3- Cutting-Plane
4- Group-Theoretic

ثابت k به همه اعداد یک سطر یا ستون ماتریس C باعث می‌شود که مقدار ثابت k به تابع هدف مسأله جدید اضافه گردد:

$$Z' = Z + k$$

و می‌دانیم که وجود یا عدم وجود یک مقدار ثابت در تابع هدف جواب بهینه مسأله را تغییر نمی‌دهد و تنها بر مقدار تابع هدف اثر دارد.

برای مثال اگر سطر p ام را انتخاب کنیم و به همه اعداد آن k را اضافه کنیم؛ یعنی به جای بردار:

$$\vec{c}_{p_0} = \left(c_{p1}, c_{p2}, \ldots, c_{pn}\right)$$

بردار:

$$\vec{c}'_{p_0} = \left(c_{p1} + k, c_{p2} + k, \ldots, c_{pn} + k\right)$$

را جایگزین نماییم و ماتریس جدید را C' بنامیم آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} Z' &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}x_{ij} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} c'_{pj}x_{ij} = \\ &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\left(c_{pj} + k\right)x_{pj} = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + k\sum_{j=1}^{n} x_{pj} = Z + k \end{aligned}$$

از آنجا که با توجه به محدودیت‌های مسأله تخصیص $\sum_{j=1}^{n} x_{pj} = 1$ است نتیجه می‌گیریم که اگر به همه اعداد ماتریس C نیز یک مقدار ثابت k اضافه نماییم؛ جواب مسأله تخصیص تغییری نمی‌کند. بنابراین با استفاده از دو اصل فوق مسأله تخصیص را با انجام بندهای زیر حل می‌نماییم:

گام ۱: در صورت لزوم یک عدد مناسب به همه عناصر ماتریس C اضافه کنید تا شرط $C \geq 0$ برقرار شود.

گام ۲: روند ایجاد حداقل یک صفر در هر سطر و ستون: عناصر هر سطر و ستون را به اندازه کوچکترین عنصر آن سطر یا ستون کاهش دهید تا در هر سطر و ستون حداقل یک صفر داشته باشید. ماتریس حاصل را $\overline{C}$ بنامید.

گام ۳: روند تخصیص: از سطر یا ستونی که حداقل تعداد صفر را دارد شروع کنید.

الف. اگر $\bar{c}_{ij}$ تنها صفر سطر i ام ویا ستون j ام است قرار دهید $x_{ij}=1$ و با حذف سطر i و ستون j به گام ۳ برگردید.

ب. اگر در همه سطرها و ستون‌های ماتریس باقیمانده دارای صفر $\bar{C}$ تعداد صفرها دو یا بیشتر باشند، از سطر یا ستونی که حداقل تعداد صفر را دارد شروع کنید و یکی از خانه‌های دارای صفر مثل $\overline{C_{pq}}$ را به دلخواه انتخاب کنید و x_{pq} مربوط را یک قرار دهید و با حذف سطر pام و ستون qام به گام ۳ بروید.

گام ۴: اگر دیگر در ماتریس باقیمانده صفری وجود ندارد، آنگاه:

الف. اگر در هر سطر و ستون یک تخصیص صورت گرفته است جواب فعلی یک جواب قابل قبول است که مقدار تابع هدف آن صفر است؛ یعنی $\bar{Z}=0$. چونکه در خانه‌هایی که $x_{ij}=1$ است، $\bar{c}_{ij}$ آن صفر است و در سایر خانه‌ها $x_{ij}=0$ است. بنابراین:

$$\bar{Z}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{c}_{ij}x_{ij}=0$$

از آنجاییکه برای ماتریس $\bar{C}\geq 0$ حداقل مقدار تابع هدف (با توجه به این که $X\geq 0$ می‌باشد) صفر است. یعنی $\bar{Z}\geq 0$ است و هر جواب قابل قبول با مقدار $\bar{Z}=0$ به طور یقین یک جواب بهینه است.

ب. اگر تعداد تخصیص‌ها کمتر از n است به روند نشانه‌گذاری یعنی گام ۵ بروید.

گام ۵: روند نشانه گذاری (علامت گذاری):

تعریف: هر خانه‌ای که در آن $\bar{c}_{ij}=0$ است، ولی در آن خانه تخصیص صورت نگرفته و ستون j ام آن نیز علامت‌گذاری نشده است را، خانه قابل انتخاب می‌نامیم.

تا آنجا که ادامه نشانه‌گذاری میسر است این گام را اجرا کنید؛ یعنی:

الف. سطرهایی که تخصیص ندارند، برای آنها نشانه $S+$ که به معنی پایان اضافه شدن است را قرار دهید. حرف S حرف اول کلمه $Stop$ و + به معنی امکان اضافه شدن به فهرست خانه‌های دارای تخصیص است.

ب. اگر سطر k ام نشانه‌گذاری شده و $\bar{C}_{kt}$ قابل انتخاب است، آنگاه در ستون t ام نشان $Rk+$ را قرار دهید. R حرف اول کلمه Row به معنی سطر است.

ج. اگر ستون t ام نشانه‌گذاری شده است و در سطر u ام آن تخصیص صورت گرفته برای سطر u ام نشان $-Ct$ را قرار دهید. C حرف اول کلمه $Column$ به معنی ستون و $-$ به معنی امکان خارج شدن از فهرست خانه‌های دارای تخصیص (دارای مقدار یک) است.

گام ۶: ادامه نشانه‌گذاری میسر نیست:
الف. یک ستون بدون تخصیص نشانه‌گذاری شده است در این صورت گام ۷ (روند بهبود) را اجرا کنید.
ب. ستون بدون تخصیص نشانه‌گذاری نشده است. در این صورت گام ۸ (روند کاهش بیشتر) را اجرا کنید.

گام ۷: روند بهبود: از ستون بدون تخصیص که نشانه‌گذاری شده است، شروع کنید. فرض کنید ستون y ام تخصیص ندارد، ولی نشانه‌گذاری شده است و نشان آن $+Rz$ می‌باشد. در این صورت در سطر z ام ستون y ام یک تخصیص انجام دهید و سپس به نشان سطر z ام نگاه کنید. اگر نشان سطر z ام $-Ck$ بود، به ستون k ام سطر z ام بروید و تخصیص آن را حذف کنید. حال به نشان ستون k ام نگاه کنید. اگر علامت آن $+Rm$ بود، در سطر m ام در ستون k ام یک تخصیص انجام دهید. اکنون به نشان سطر m ام نگاه کنید و تخصیص تعیین شده در نشان آن را حذف کنید. اینکار را آنقدر ادامه دهید تا به سطری که نشان $+S$ دارد برسید. در این مرحله به تعداد تخصیص‌ها یکی اضافه شده است. حال اگر تعداد تخصیص‌ها n است جواب فعلی جواب بهینه است، در غیر این صورت نشانه‌ها را پاک و با حفظ تخصیص‌ها به گام ۵ بروید.

گام ۸: روند کاهش بیشتر : روی اعداد سطرهایی که علامت‌گذاری نشده‌اند خط افقی و روی اعداد ستون‌هایی که علامت‌گذاری شده‌اند خط عمودی بکشید. با این کار کلیه صفرهای ماتریس $\overline{C}$ زیر خط افقی و یا عمودی قرار می‌گیرند و کلیه اعدادی که خطی آنها را نپوشانیده است، اعداد مثبت هستند. در بین این اعداد مثبت بدون پوشش، کوچکترین آنها را تعیین و آن را $\overline{C}_{ab}$ بنامید. حال همه اعداد بدون پوشش را به اندازه $\overline{C}_{ab}$ کاهش دهید و به همه اعدادی که در تقاطع دو خط افقی و عمودی واقع شده‌اند مقدار $\overline{C}_{ab}$ را اضافه کنید. در نهایت خطوط رسم شده را پاک کنید و با حفظ علامت‌های قبلی برای ادامه نشانه‌گذاری برای صفرهای جدید به گام ۵ بروید.

مثال:
یک مسأله تخصیص ۶×۶ با ماتریس هزینه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 \\ 5 & 7 & 9 & 11 & 3 & 1 \\ 8 & 10 & 12 & 14 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 12 & 14 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \end{bmatrix} 1$$

پس از اجرای گام‌های ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ ماتریس زیر که در آن حرف @ در خانه ij به معنی $x_{ij}=1$ است به دست می‌آید.

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 0^{@} & 0 & 0 & 2 & 8 & 10 \\ 10 & 6 & 2 & 0^{@} & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 6 & 2 & 0^{@} \\ 4 & 4 & 4 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 6 & 0^{@} & 2 \\ 0 & 0^{@} & 0 & 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ C6- \\ S+ \\ \\ \\ \end{array} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad R4+ & \end{array}$$

حال پس از اجرای گام ۸ ماتریس زیر حاصل می‌گردد.

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 0^{@} & 0 & 0 & 2 & 8 & 12 \\ 10 & 6 & 2 & 0^{@} & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0^{@} \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 6 & 0^{@} & 4 \\ 0 & 0^{@} & 0 & 2 & 8 & 12 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ C6- \\ S+ \\ C5- \\ \\ \end{array} \\ \qquad\qquad\qquad R3+\ R4+ & \end{array}$$

اکنون اگر گام ۸ و سپس گامهای ۶ و ۷ را اجرا کنیم، ماتریس زیر نتیجه می‌شود.

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 0^{@} & 0 & 0 & 2 & 10 & 14 \\ 10 & 6 & 2 & 0^{@} & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0^{@} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0^{@} \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 0^{@} & 4 \\ 0 & 0^{@} & 0 & 2 & 10 & 14 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ C6- \\ S+ \\ C5- \\ \\ \end{array} \\ \qquad R3+ \qquad R3+\ \ R4+ & \end{array}$$

چون در آخرین ماتریس ۶ تخصیص انجام شده است، جواب آن یک جواب بهینه برای آخرین ماتریس و سایر ماتریس‌ها از جمله اولین ماتریس است.

یعنی جواب بهینه عبارتست از $1 \to 1$ و $4 \to 2$ و $3 \to 3$ و $6 \to 4$ و $5 \to 5$ و $2 \to 6$ با $Z^* = 32$ که عدد 32 جمع کل اعدادی است که از سطرها و ستون‌های ماتریس اولیه کم شده‌اند.

$$Z^* = 1+4+1+4+4+4+2+4+4+2+2 = 3$$

تمرین:

مسائل تخصیص زیر را یکبار با هدف حداکثر کردن درآمدها و یکبار با هدف حداقل کردن هزینه حل کنید.

$$C_1 = \begin{bmatrix} 14 & 8 & 0 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 4 \\ 2 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \text{ و } C_2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 0 & 5 \\ 14 & 12 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 70 & 80 & 65 & 65 & 0 \\ 65 & 80 & 80 & 85 & 0 \\ 75 & 80 & 75 & 80 & 0 \\ 70 & 75 & 70 & 80 & 0 \\ 60 & 70 & 80 & 70 & 0 \end{bmatrix}$$

۲-۴-۲- روش شاخه و کرانه

شاخه و کرانه در اصل یک استراتژی تقسیم و تسخیر است. ایده آن تقسیم ناحیه امکان ،در صورت نیاز، به زیر بخش‌های کوچکتر و تعیین کران برای هر یک از آن زیر بخش‌هاست.

در حالت کلی راه‌های زیادی برای تقسیم ناحیه امکان‌پذیر وجود دارد. یک برنامه خطی با اعداد صحیح نوعی از برنامه خطی است که شرط صحیح بودن نیز به آن اضافه شده است. بنابراین، در یک مسأله حداکثر کردن، مقدار تابع هدف در نقطه بهینه برنامه خطی همواره یک حد بالایی برای تابع هدف بهینه برنامه خطی با اعداد صحیح است. به علاوه هر نقطه امکان پذیر صحیح همواره یک حد پایینی برای مقدار بهینه تابع هدف برنامه خطی است.

در روش شاخه و کرانه ابتدا شرط صحیح بودن کنار گذارده می‌شود تا یک برنامه‌ریزی خطی به دست آید. روش حل یک برنامه‌ریزی خطی را در گذشته آموخته‌اید. با حل برنامه‌ریزی خطی، جواب‌های بهینه را به دست آورده و در شرایط و محدودیت‌های مسأله قرار داده و کنترل کنید. اگر شرایط صادق بود، جواب

بهینه به دست آمده است، در غیر این صورت یک کران برای تابع هدف ایجاد شده است. به همین ترتیب می‌توان در جهت دستیابی به جواب بهینه با ایجاد شاخه و کرانه گام برداشت. با یک مثال این روش را بررسی می‌کنیم.

مثال:
یک مسأله تخصیص با ماتریس هزینه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 17 & 12 & 15 & 8 & 10 \\ 10 & 14 & 8 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 9 & 11 & 13 & 11 & 9 \\ 7 & 13 & 19 & 25 & 30 \end{bmatrix}$$

برای حل، محدویت‌های یک به یک را کنار گذاشته به روش حداقل سطر و ستون عمل می‌کنیم:
در روش سطری جواب مسأله به این صورت به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 17 & 12 & 15 & 8 & 10 \\ 10 & 14 & 8 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 9 & 11 & 13 & 11 & 9 \\ 7 & 13 & 19 & 25 & 30 \end{bmatrix} \quad z = 8+5+1+9+7 = 30$$

در روش ستونی جواب مسأله به این صورت به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 17 & 12 & 15 & 8 & 10 \\ 10 & 14 & 8 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 9 & 11 & 13 & 11 & 9 \\ 7 & 13 & 19 & 25 & 30 \end{bmatrix} \quad z = 1+2+3+4+5 = 1$$

با در نظر گرفتن محدودیت‌ها مشاهده می‌شود که جواب‌های به دست آمده قابل قبول نیست. با توجه به این که در حل اولیه تعدادی از محدودیت‌ها را نادیده گرفته‌ایم، با افزودن محدودیت‌ها جوابی با مقدار $\bar{z}$ کمتر حاصل نخواهد شد در نتیجه یک حد پایینی برای $\bar{z}$ به دست خواهد آمد:

$$\bar{z} \geq \max\{30,15\} = 30$$

کار را با ایجاد شاخه ادامه می‌دهیم؛ برای این کار، کار A را به ترتیب به ماشین‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ اختصاص می‌دهیم؛ اختصاص کار A به ماشین ۱ باعث حذف سطر و ستون اول ماتریس می‌شود که باید جواب بهینه آن را با کنار گذاردن محدودیت‌های مسأله به دست آوریم. بنابراین با حذف سطر و ستون اول داریم:

$$\begin{bmatrix} 14 & 8 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ 11 & 13 & 11 & 9 \\ 13 & 19 & 25 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} z^* = 5+2+9+13 = 29 \to \bar{z} = 29+\underline{17} = 46 \\ z^* = 2+3+4+5 = 14 \to \bar{z} = 14+\underline{17} = 31 \end{array}\right| \to$$
$$\to \bar{z}_{\mathrm{A}\to 1} \geq \max\{46,31\} = 46$$

توجه کنید که هزینه ۱۷ از اختصاص کار A به ماشین ۱ به دست می‌آید.

اختصاص کار A به ماشین ۲:

$$\left\{\begin{array}{l} z^* = 5+1+9+7 = 22 \to \bar{z} = 22+\underline{12} = 34 \\ z^* = 13 \to \bar{z} = 13+\underline{12} = 25 \end{array}\right| \to$$
$$\to \bar{z}_{\mathrm{A}\to 2} \geq \max\{34,25\} = 34$$

به همین ترتیب برای اختصاص کار A به ماشین‌های ۳و ۴و ۵ داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} z^* = 37 \\ z^* = 37 \end{array}\right. \to \bar{z}_{\mathrm{A}\to 3} \geq \max\{37,37\} = 37$$

$$\left\{\begin{array}{l} z^* = 30 \\ z^* = 19 \end{array}\right. \to \bar{z}_{\mathrm{A}\to 4} \geq \max\{30,19\} = 30$$

$$\left\{\begin{array}{l} z^* = 33 \\ z^* = 20 \end{array}\right. \to \bar{z}_{\mathrm{A}\to 5} \geq \max\{33,20\} = 33$$

دیده می‌شود که در این تخصیص‌ها جواب قابل قبول به دست نیامد، اما یک کران پایین برای مسأله به دست آمد. چون هدف حداقل کردن است، شاخه‌ای که حد پایین کمتری دارد را انتخاب می‌کنیم. این کار می‌تواند باعث شود تا برخی از شاخه‌ها خود به خود حذف شوند و زودتر به جواب بهینه برسیم.

بنا بر آنچه گفته شد، کار A را به ماشین ۴ تخصیص می‌دهیم. در این صورت سطر ۱ و ستون ۴ حذف شده و ماتریس ۴×۴ می‌شود.

سپس سعی می‌کنیم کار B را به ماشین‌های باقیمانده اختصاص دهیم. نتایج زیر به دست می‌آید:

$$\left|\begin{array}{l} \bar{z}_{B\to 1} \ge 42 \\ \bar{z}_{B\to 2} \ge 39 \\ \bar{z}_{B\to 3} \ge 33 \\ \bar{z}_{B\to 5} \ge 30 \end{array}\right.$$

با توجه به این که باز هم جواب قابل قبول به دست نیاوردیم، کار B به ماشین ۵ اختصاص داده می‌شود. با اختصاص کار C به ماشین‌ها داریم:

$$\left|\begin{array}{l} \bar{z}_{C\to 1} \ge 38 \\ \bar{z}_{C\to 2} = 35 \\ \bar{z}_{C\to 3} = 34 \end{array}\right.$$

با توجه به این که با اختصاص کار C به ماشین ۲ به یک جواب قابل قبول رسیده‌ایم، شاخه‌هایی که $\bar{z}$ آنها بیش از ۳۵ است، حذف می‌گردد.

در اختصاص کار C به ماشین ۳ نیز به جواب قابل قبول رسیدیم. در نتیجه شاخه‌های با $\bar{z}$ بزرگتر از ۳۴ را حذف می‌کنیم.

قاعده‌ای که برای حل این مسأله از آن استفاده شده است، قاعده بهترین حد[۱۱] نام دارد.

مثال برنامه‌ریزی با اعداد صحیح:

مسأله برنامه‌ریزی زیر را در نظر بگیرید:

---

[۱۱] Best Bound Rule

$$\max \;\; z=-x_1+x_2+2x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+2x_2-x_3\le 10\\ -2x_1+4x_2+2x_3\le 40\\ 2x_1+3x_2+x_3\le 30\\ x_j=0,1,\ldots \qquad j=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

برای حل مسأله، ابتدا فرض می‌کنیم شرط صحیح بودن متغیرها وجود ندارد و ما یک برنامه خطی را حل می‌کنیم:

پایه	مقدار	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
z	$130/3$	0	$10/3$	0	0	$5/6$	$1/3$
s_1	30	0	4	0	1	$1/2$	0
x_3	$70/3$	0	$7/3$	1	0	$1/3$	$1/3$
x_1	$10/3$	1	$1/3$	0	0	$-1/6$	$1/3$

با توجه به این که تابع هدف ما حداکثر کردن است $\bar{z}$ هیچگاه بزرگتر از مقدار $130/3$ نخواهد شد.

$$\bar{z}\le\frac{130}{3}=43.3\rightarrow \bar{z}\le 43$$

هر یک از متغیرهای تصمیم‌گیری که عدد صحیح نباشند، می‌توانند مبنای ایجاد شاخه قرار گیرند. با انتخاب x_1 دو شاخه ایجاد می‌شود:

$$\begin{cases} x_1\le 3\\ x_1\ge 4 \end{cases}$$

ابتدا یک شاخه را انتخاب کرده و بررسی می‌کنیم و بعد از اتمام شاخه، شاخه دیگری را بررسی می‌کنیم.
با انتخاب شاخه $x_1\le 3$ و تبدیل آن به محدودیت $x_1+x_1'=3$ خواهیم داشت $x_1=3-x_1'$ که این تبدیل را در جدول بهینه اعمال می‌کنیم تا جدول بعدی حاصل شود.

پایه	مقدار	x'_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
z	$130/3$	0	$10/3$	0	0	$5/6$	$1/3$
s_1	30	0	4	0	1	$1/2$	0
x_3	$70/3$	0	$7/3$	1	0	$1/3$	$1/3$
x'	$1/$[illegible]	1	$1/$[illegible]	0	0	$-1/$[illegible]	$1/$[illegible]

با ضرب طرفین محدودیت سوم در ۱- خواهیم داشت:

پایه	مقدار	x'_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
z	$130/3$	0	$10/3$	0	0	$5/6$	$1/3$
s_1	30	0	4	0	1	$1/2$	0
x_3	$70/3$	0	$7/3$	1	0	$1/3$	$1/3$
x'_1	$-1/$[illegible]	1	$-1/$[illegible]	0	0	$1/$[illegible]	$-1/$[illegible]

با انجام عملیات سیمپلکس همزاد به جدول زیر می‌رسیم:

پایه	مقدار	x'_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
z	43	0	3	0	0	1	0
s_1	30	0	4	0	1	$1/2$	0
x_3	23	1	2	1	0	$1/2$	0
s_3	1	-3	1	0	0	$-1/2$	1

با توجه به این که شرط بهینگی برقرار بوده و متغیرها نیز شرط صحیح بودن را دارا هستند جواب نهایی به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \quad \Rightarrow \bar{z} = 43 \\ x_3 = 23 \end{cases}$$

اگر شاخه دوم را به همین صورت بررسی کنیم خواهیم داشت:

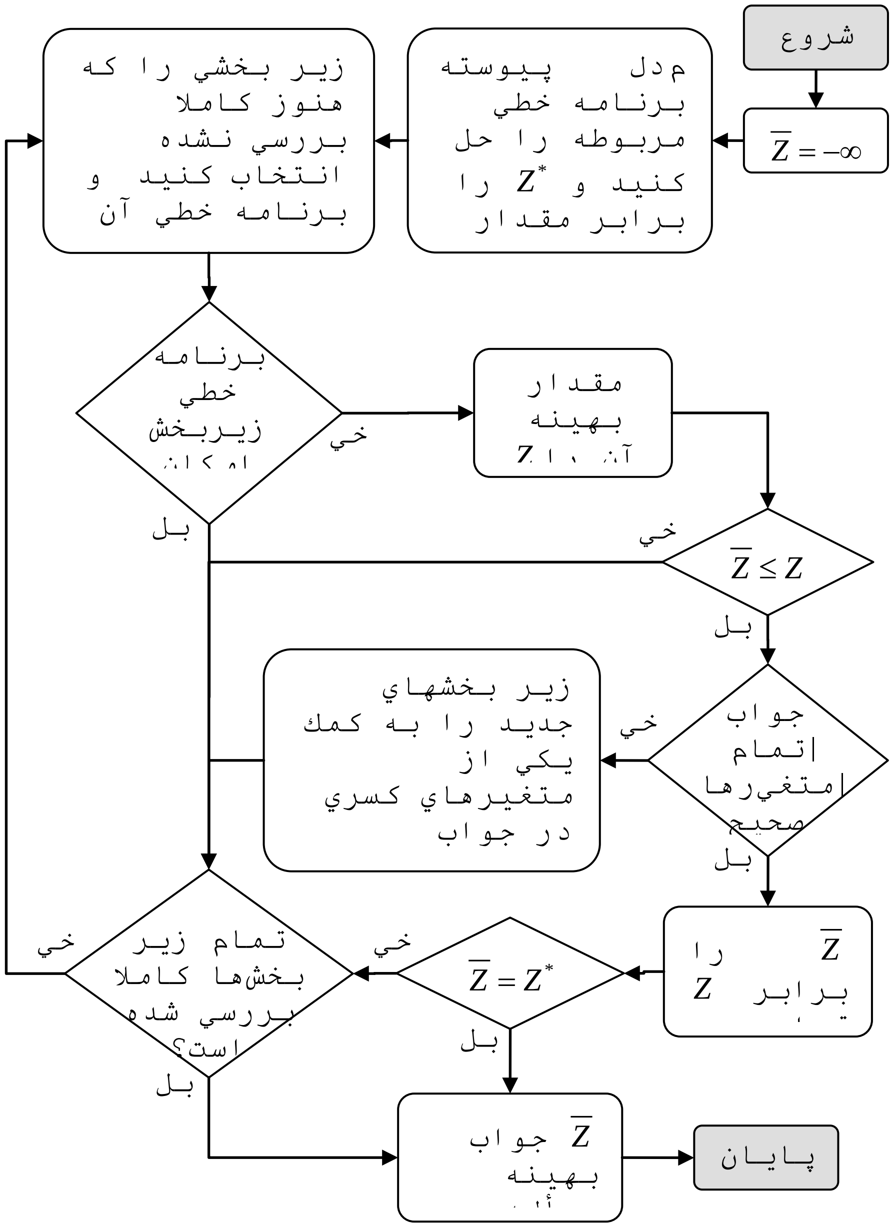
$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 22 \end{cases} \Rightarrow \bar{z} = 40$$

نکته: یک شاخه در سه صورت به کف رسیده و پایان می‌پذیرد:

1. به جواب مطلوب برسیم.
2. زیر شاخه تهی شود.
3. در آن شاخه از درخت جوابی بهتر از آنچه تا کنون یافته‌ایم پیدا نشود.

از الگوریتم زیر می‌توان برای دستیابی به جواب استفاده کرد. در این الگوریتم فرض شده که تابع هدف مسأله باید حداکثر گردد. همچنین کل مسأله، اولین زیر بخش مورد بررسی است.

نکته: توجه کنید که همواره $\overline{Z} \leq Z^*$


شروع
$\overline{Z}=-\infty$
مدل پیوسته برنامه خطي مربوطه را حل كنيد و Z^* را برابر مقدار
زير بخشي را كه هنوز كاملا بررسي نشده انتخاب كنيد و برنامه خطي آن
برنامه خطي زيربخش
خير
بلي
مقدار بهينه
$\overline{Z} \le Z$
خير
بلي
زير بخشهاي جديد را به كمك يكي از متغيرهاي كسري در جواب
خير
جواب
بلي
$\overline{Z}$ را برابر Z
$\overline{Z}=Z^*$
خير
بلي
تمام زير بخشها كاملا بررسي شده است؟
خير
بلي
$\overline{Z}$ جواب بهينه
پايان

۲-۴-۳- صفحات برش[14]

الگوریتم صفحه برش با تغییر جواب‌های برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌های با اعداد صحیح را تا حصول جواب صحیح، حل می‌کند. بر خلاف روش شاخه و کرانه، این روش ناحیه امکان‌پذیر را به زیر بخش‌ها تقسیم نمی‌کند؛ بلکه تنها با یک برنامه خطی کار می‌کند و با اضافه کردن محدودیت‌های جدید آن را اصلاح می‌کند. محدودیت‌های جدید هر بار ناحیه امکان پذیر را کوچکتر می‌نماید تا یک جواب بهینه صحیح پیدا شود. در عمل روش شاخه و کرانه تقریبا همیشه از الگوریتم صفحه برش بهتر عمل می‌کند. اما این روش در تحول برنامه‌ریزی با اعداد صحیح اهمیت داشته است و برای حل برخی از مسأله‌ها کاراتر می‌باشد.

از نظر تاریخی این اولین الگوریتمی بود که برای برنامه‌ریزی با اعداد صحیح توسعه یافت و همگرایی آن در تعداد محدودی گام قابل اثبات بود. علاوه بر آن اگر چه این الگوریتم کلا غیر کارا محسوب می‌شود، ولی شناختی از برنامه‌ریزی با اعداد صحیح فراهم آورده است که منجر به الگوریتم‌های دیگری با کارآیی بیشتر شده است.

۲-۴-۳-۱- روش برش کسری گموری[15]

مطابق روش شاخه و کرانه محدودیت‌هایی را کنارگذاشته و مسأله را حل می‌کنیم. اگر جواب مطلوب نباشد با ایجاد یک برش نقطه بهینه به دست آمده و نقاط اطراف آن را کنار می‌گذاریم؛ بدین شرط که در ناحیه جدا شده، هیچ نقطه مطلوبی وجود نداشته باشد.

با استفاده از یک مثال روش را توضیح می‌دهیم:

$$\max \quad z = cx$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \quad \Rightarrow x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \\ x \in z \end{cases}$$

اگر تمام عناصر بردار x^* عدد صحیح باشند، جواب مطلوب می‌باشد؛ ولی اگر متغیر x_j^* عدد صحیح نباشد، x^* نقطه مطلوب ما نمی‌باشد و باید به روش صفحه برش جواب مطلوب را بیابیم.

برای توضیح این روش یک مسأله فرضی را در نظر بگیرید. در اولین گام، با حل مسأله بدون در نظر گرفتن شرط صحیح بودن متغیرها، به جواب بهینه زیر می‌رسیم:

---
[14] Cutting Planes
[15] Gomory

پایه	مقدار	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3
z	$\cdots$	0	3.5	0	1.2	4.8	15.7	0	10
x_3	5.7	0	–2.1	1	9.5	0	3	0	–6.3
s_2	4	0	0	0	–7.7	10.4	–8.1	1	0

اگر جدول بهینه به صورت بالا باشد جواب حاصل به این صورت خواهد بود:

$$x^* = (3.8\,,0\,,5.7\,,0\,,0)$$

حال باید یک برش معرفی کنیم که این راس و نقاط اطراف آن را ببرد. برای این کار می‌توان از محدودیت اول یا سوم استفاده کرد. معادله اول را به این صورت می‌نویسیم:

$$-2.1x_2 + x_3 + 9.5x_4 + 3s_1 - 6.3s_3 = 5.7$$
$$-3x_2 + x_3 + 9x_4 + 3s_1 + 7s_3 - 5 = 0.7 - 0.9x_2 - 0.5x_4 - 0.7s_3$$

یعنی کلیه ضرایب و مقدار ثابت را به سمت پایین گرد کرده و به سمت چپ می‌بریم و مقادیر باقیمانده را به طرف دیگر می‌بریم. چون هر متغیر باید مقدار صحیح بگیرد در نتیجه سمت چپ و به تبع آن سمت راست نیز یک عدد صحیح خواهد بود. با توجه به این که متغیرها منفی نمی‌باشند در نتیجه در سمت راست از مقدار 0.7 مقادیری کسر می‌شود که سمت راست را مثبت نمی‌کند. در نتیجه داریم:

$$.7 - .9x_2 - .5x_4 - .7s_3 \le 0$$

پس در هر جواب مطلوب مقدار سمت راست آخرین معادله می‌تواند صفر یا منفی باشد.

اگر جواب به دست آمده را در این محدودیت قرار دهیم مقدار مثبتی به دست خواهد آمد که جواب دلخواه ما نیست. بنابراین چون متغیرهای پایه در سمت چپ قرار دارند، از معادله سمت راست جهت افزودن محدودیت به جدول استفاده می‌کنیم و سطر زیر را به جدول اضافه می‌کنیم:

پایه	مقدار	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

چون مقدار s_4 منفی می‌باشد، باید از پایه خارج شده و با تست نسبت همزاد، متغیر ورودی به پایه مشخص شود. بعد از انجام عملیات روش سیمپلکس همزاد تا رسیدن به جواب بهینه دلخواه این روش را

ادامه می‌دهیم. استراتژی اساسی در تکنیک صفحه برش، افزودن برش‌هایی به محدودیت‌هایی که ناحیه امکان پذیر را تعریف می‌کنند و سپس حل برنامه خطی حاصل است. اگر مقادیر بهینه برای متغیرهای تصمیم‌گیری در برنامه خطی همگی اعداد صحیح باشند، جواب بهینه است و در غیر این صورت یک برش جدید به دست می‌آید که باید به محدودیت‌ها افزوده شود.

۲-۴-۳-۲- روش برش تمام صحیح همزاد

فلسفه این روش این است که کار را با جدولی که تمام ضرایب و مقادیر آن عدد صحیح است، شروع کنیم و اگر چنین نباشد، باید با ضرب اعداد در معادلات آنها را صحیح کنیم. همچنین باید در طول انجام عملیات صحیح بودن جدول را حفظ کنیم.

در این روش از یک راس صحیح شروع کرده و مسأله را ادامه می‌دهیم تا به راس صحیح و بهینه برسیم.
این روش هنگامی‌استفاده می‌شود که شرط تعلق را نداشته، ولی شرط بهینگی را داشته باشیم.

در هنگام چرخش لولا اگر عنصر چرخش لولایی ۱- باشد، جدول بعدی نیز تمام صحیح خواهد بود. اگر عنصر لولا ۱- نبود، باید برشی به جدول اولیه اضافه شود به گونه‌ای که ۱- را بتوان به عنوان عنصر لولا انتخاب کرد. سپس عملیات چرخش لولا انجام می‌شود.

با یک مثال این روش را نشان می‌دهیم:

$$\min \quad z = 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 2x_4$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 \ge 15 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 10 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \ge 20 \\ x_j = 0,1,2,3,\cdots \qquad j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

پایه	مقدار	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3
z	0	-5	-8	-3	-2	0	0	0
s_1	-15	-2	1	-4	-3	1	0	0
s_2	-10	1	-3	-1	-2	0	1	0
s_3	-20	-3	-2	3	-1	0	0	1

در اینجا شرط تعلق را نداریم ولی شرط بهینگی را داریم، پس روش سیمپلکس همزاد را در نظر می‌گیریم.

اگر در جدول فوق هر کدام از عنصرها را خروجی قرار دهیم، ۱- عدد لولا نخواهد شد. بنابراین باید به دنبال برشی بگردیم تا به وسیله آن به جواب مطلوب برسیم.

اگر s_3 را خروجی از پایه در نظر بگیریم، آنگاه عنصر لولا در جدول بالا ۳- می‌باشد. پس طرفین معادله مربوط را بر ۳ تقسیم می‌کنیم:

$$-3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + s_3 = -20 \xrightarrow{\div 3}$$
$$-x_1 - \frac{2}{3}x_2 + x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}s_3 = \frac{-20}{3}$$

و حالا معادله اخیر را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$-x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 7 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_3 \le 0$$

با افزودن این محدودیت و ایزوله کردن جدول، سطر آخر به این صورت اضافه می‌شود.

پایه	مقدار	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4

در جدول جدید عنصر چرخش لولا ۱- می‌باشد که در این حال شرط صحیح بودن به راحتی حفظ می‌گردد. پس از انجام عملیات چرخش لولایی، جدول زیر حاصل می‌گردد:

پایه	مقدار	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4
z	14	−3	−6	−5	0	0	0	0	−2
s_1	6	1	4	−7	0	1	0	0	−3
s_2	4	3	−1	−3	0	0	1	0	−2
s_3	−13	−2	−1	2	0	0	0	1	−1

با انجام هر چرخش لولا سعی می‌کنیم شرط صحیح بودن را حفظ کنیم. این عمل را آنقدر تکرار می‌کنیم تا به جواب بهینه برسیم.

۲-۴-۳-۳- روش برش تمام صحیح اولیه

اصول و فلسفه این روش مانند روش تمام صحیح همزاد می‌باشد با این تفاوت که این روش هنگامی استفاده می‌شود که شرط بهینگی را نداشته، اما شرط تعلق را داشته باشیم. همچنین در این روش عنصر لولا باید ۱ باشد.

$$\max \ z = 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 2x_4$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 15 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 10 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \le 20 \\ x_j = 0, 1, 2, \ldots \qquad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

برای این مثال، در جدول اولیه شرط تعلق را داریم ولی شرط بهینگی را نداریم. چون عدد لولا ۱ نیست، پس یک برش ایجاد کرده و محدودیت جدید را اضافه کرده و ایزوله می‌کنیم.

پایه	مقدار	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3
z	0	–5	–8	–3	–2	0	0	0
s_1	15	2	–1	4	3	1	0	0

اگر x_2 را ورودی به پایه فرض کنیم، عدد لولا ۳ می‌گردد:

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + s_2 = 10$$
$$-\frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}s_2 = \frac{10}{3}$$
$$-x_1 + x_2 - 3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_2$$
$$-x_1 + x_2 + s_4 = 3$$

با اعمال این برش جدول زیر را خواهیم داشت:

پایه	مقدار	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4
z	24	–13	0	–3	–2	0	0	0	8
s_1	18	1	0	4	3	1	0	0	1
s_2	1	2	0	1	2	0	1	0	–3

به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا به جواب بهینه دست یابیم.

۲-۴-۳-۴- برش مسأله‌های مختلط

اگر مسأله مختلط بود، برای مثال اگر $j=1,2$ $x_j=0,1,2,\dots$ و بقیه تنها قید غیر منفی بودن را داشتند، مانند قبل مسأله را پیوسته در نظر گرفته و حل می‌کنیم تا به جواب بهینه برسیم. سپس آن را با در نظر گرفتن محدودیت‌ها بررسی می‌کنیم. در صورتی که جواب بدست آمده در محدودیت‌ها صادق بود، به جواب بهینه رسیده‌ایم؛ در غیر این صورت باید برش انجام شود.

مثال:

بعد از حل بهینه به جوابی رسیده‌ایم که در آن، x_1 مقدار غیرصحیح را داراست. بنابراین محدودیت x_1 را برای آن به این صورت می‌نویسیم:

$$x_1+6.1x_2-6x_5+15.3s_1+4.7s_3=3.8$$
$$0.1x_2-6x_5+15.3s_1+4.7s_3=(3-x_1-6x_2)+0.8$$

در داخل پرانتزها عبارتی داریم که مقدار ثابت آن صحیح است و در آن تنها متغیرهای صحیح با ضرایب صحیح آمده‌اند. بنابراین در هر جواب مطلوب مقدار آن عبارت عددی صحیح است. حال اگر:

$$3-x_1-6x_2\ge 0\rightarrow 0.1x_2-6x_5+15.3s_1+4.7s_3\ge 0.8$$

با حذف x_5 داریم:

$$0.1x_2+15.3s_1+4.7s_3\ge 0.8$$

و اگر:

$$3-x_1-6x_2\le -1\rightarrow$$
$$0.1x_2-6x_5+15.3s_1+4.7s_3\le -0.2$$

با حذف همه متغیرها غیر از x_5 داریم:

$$-6x_5\le -0.2\rightarrow 24x_5\ge 0.8$$

با در نظر گرفتن دو رابطه فوق برش مورد نظر به دست می‌آید:

$$\left.\begin{cases} 0.1x_2 + 15.3s_1 + 4.7s_3 \geq .8 \\ -6x_5 \leq -.2 \rightarrow 24x_5 \geq .8 \end{cases}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow 0.1x_2 + 24x_5 + 15.3s_1 + 4.7s_3 \geq .8$$

توجه کنید که در اینجا ما دو نامعادله را با هم جمع نکردیم. چرا که هر دو نمی‌توانند با هم اتفاق بیافتند و اگر یکی اتفاق بیفتد دیگری اتفاق نخواهد افتاد.

۲-۴-۴- روش شمارشی

در روش شمارشی یک سری از جواب‌های امکان پذیر مسأله را به ترتیب خاصی مرتب کرده و برای بهینگی کنترل می‌کنیم.

۲-۴-۴-۱- ترتیب لغتنامه‌ای

ترتیب لغتنامه‌ای یک روش برای مرتب‌سازی یک سری داده است که می‌تواند به شکل برداری نیز باشد. برای مثال برای ترتیب‌بندی چند اسم می‌توان از این روش به این صورت استفاده کرد.

مثال:

برای مرتب‌سازی سری داده زیر به این ترتیب عمل می‌کنیم.

محمود، محمد، مسعود، سعید

ابتدا حروف اول را با هم مقایسه می‌کنیم، سعید در ابتدای لیست قرار می‌گیرد؛ اما بقیه در یک رده قرار دارند. بنابراین برای سه اسم باقیمانده از مقایسه حروف دوم استفاده می‌کنیم. در این مقایسه مسعود در مکان چهارم قرار می‌گیرد. حال برای مقایسه محمود و محمد حروف سوم را مقایسه می‌کنیم. اما حروف سوم با هم برابرند. بنابراین حرف چهارم آنها را با هم مقایسه می‌کنیم که در این ترتیب محمد در مکان دوم و محمود در مکان سوم قرار می‌گیرد؛ پس ترتیب مورد نظر به این صورت نتیجه می‌شود:

سعید - محمد - محمود - مسعود.

در این مبحث نیز ترتیب لغتنامه‌ای برای مرتب کردن بردارها به کار می‌رود. برای تعیین بردار کوچکتر باید مولفه‌های متناظر را از سمت چپ با هم مقایسه نموده و بردارها را مرتب کنیم. بردار $\vec{0}$ اگر موجود باشد همواره کوچکترین بردار می‌باشد.

مثال:

بردارهای زیر را با استفاده از ترتیب لغتنامه‌ای مرتب کنید.

$$\vec{A}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\quad \vec{B}=\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix}\quad \vec{C}=\begin{bmatrix}1\\0\\5\end{bmatrix}\quad \vec{D}=\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$$

مولفه‌های اول را با هم مقایسه می‌کنیم و می‌بینیم که در $\vec{B}$ و $\vec{D}$ مولفه اول، 0 است. بنابراین، این دو بردار از بقیه کوچکترند. سپس به سراغ مولفه‌های دوم این دو بردار می‌رویم و از آنجا که مولفه‌های دوم این دو بردار با هم برابرند، مولفه‌های سوم را مقایسه می‌کنیم. با مقایسه مولفه‌های سوم، بردار کوچکتر $\vec{D}$ در ابتدا قرار می‌گیرد و بردار $\vec{B}$ در ردیف دوم مرتب می‌شود. برای مقایسه بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{C}$، از آنجا که مولفه اول هر دو بردار برابر 1 است به سراغ مولفه دوم می‌رویم و در نتیجه بردار $\vec{C}$ از بردار $\vec{A}$ کوچکتر شناخته می‌شود، پس چهار بردار فوق به ترتیب لغتنامه‌ای به شکل زیر مرتب می‌شوند:

$$\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1\\0\\5\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \vec{D} \to \vec{B} \to \vec{C} \to \vec{A}$$

۲-۴-۲- روش شمارش کامل

یک راه حل برای مسأله‌هایی که دارای متغیرهای صحیح هستند، روش شمارش کامل است. بدین معنی که کلیه ترتیبات ممکن متغیرها را فهرست کرده و بهترین آنها را که امکان پذیر باشد، انتخاب می‌کنیم. این شیوه برای مسأله‌های کوچکی که تنها چند متغیر دارند، خیلی خوب کار می‌کند.

اگر مسأله ما به صورت کلی زیر باشد:

$$\min \quad f(x)$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} g_i(x) \ge b_i \\ x \in S,\ S = \{x \mid 0 \le x \le u \,,\, x \in z\} \end{cases}$$

یک راه ساده اینست که نقاطی که مختصات صحیح دارند را در نظر بگیریم و تک تک این نقاط را بررسی کنیم تا بهترین جواب مشخص شود. حلقه زیر تمام نقاط با مختصات صحیح در مجموعه S (ابر مکعب مستطیل $0 \le x \le u$) را با ترتیب لغتنامه‌ای تولید می‌کند.

$$\begin{aligned} &DO \quad x_1 = 0 \; to \; u_1 \\ &\quad DO \quad x_2 = 0 \; to \; u_2 \\ &\qquad \ddots \\ &\qquad\quad DO \quad x_n = 0 \; to \; u_n \end{aligned}$$

اگر همه نقاط در مجموعه S را تک تک بررسی کنیم، شمارش کامل انجام شده است.

۳-۴-۲- روش شمارش جزیی یا ضمنی[1]

---

[1] Implicit Enumeration

در روش شمارش کامل، همه نقاط در مجموعه S را بررسی می‌کنیم. در روش شمارش جزیی سعی می‌کنیم تعداد نقاط مورد بررسی را کاهش دهیم، به طوری که در نهایت جواب بهینه به دست آید. در توابعی که غیر کاهشی یکنوا باشند، یعنی اگر:

$$\forall x' \in S, \forall x'' \in S, x' \geq x'' \rightarrow f(x') \geq f(x'')$$

باشد، می‌توان از این روش استفاده کرد. ممکن است یک تابع پیوسته، غیر کاهشی نباشد، ولی به صورت گسسته، غیر کاهشی یکنوا باشد. برای مثال تابع $f(x) = x^2 - x$ به صورت پیوسته تابعی غیر کاهشی نیست. زیرا داریم: $f(0) = 0$ و $f(1/2) = -1/4$ و $f(1) = 0$. ولی این تابع غیر کاهشی یکنوای گسسته است.

حال فرض کنید توابع مورد نظر f و g توابعی غیر کاهشی باشند. در روش شمارش کامل بردارهایی که باید در نظر بگیریم چنین می‌باشند:

$$\begin{aligned} &x^1 = (0,0,\ldots,0) = 0, x^2 = (0,0,\ldots,0,1),\ldots, x^n = (0,0,\ldots,u_N) \\ &x^{n+1} = (0,0,\ldots,0,1,0),\ldots, x^N = (u_1,u_2,\ldots,u_n) = \vec{U} \end{aligned}$$

تعداد بردارهای موجود برابراست با:

$$N = \prod_{j=1}^{n} (u_j + 1)$$

بردارهای فوق دارای ترتیب لغتنامه‌ای می‌باشند، یعنی $x^1 = 0$ را اولین بردار و x^N را آخرین بردار می‌دانیم و بقیه نیز دارای ترتیب می‌باشند. این ترتیب یک ترتیب یگانه می‌باشد و ترتیب دیگری برای آنها نمی‌توانیم در نظر بگیریم. برای هر بردار x یک بردار x' بدین ترتیب تعریف می‌کنیم:

$$x = x^k \Rightarrow x' = \begin{cases} x^{k+1} & \text{if } x^k \neq u \\ \text{Does not exist} & \text{if } x^k = u \end{cases}$$

و نیز برای هر بردار x یک بردار $x^@$ تعریف می‌کنیم. $x^@$ بزرگترین بردار در ترتیب لغتنامه‌ای بردارها است، مشروط بر این که کلیه بردارهای بین x و $x^@$ در ترتیب لغتنامه‌ای، ترتیب جزیی را هم داشته باشند. یعنی:

$$\forall y,\quad x \overset{L}{\le} y \overset{L}{\le} x^{@} \quad \to x \le y \le x^{@}$$ [1]

$$x \le y \to \begin{cases} x_1 \le y_1 \\ x_2 \le y_2 \\ \vdots \\ x_n \le y_n \end{cases}, x = (x_1, x_2, ..., x_n) \to x^{@} = (x_1, x_2, ..., u_k, ..., u_n)$$

اگر $x = 0$ آنگاه $x^{@} = u$. در غیر این صورت برای به دست آوردن $x^{@}$ از سمت راست شروع کرده و اولین عنصر غیر صفر را جستجو می‌کنیم.

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n),\quad x_k \ne 0,\ x_{k+1}, ..., x_n = 0$$

در مثال بالا اولین عنصر غیر صفر x_k است، بنابراین در $x^{@}$، x_k و سمت راست آن را برابر حد بالا قرار داده و x_1 تا x_{k-1} را برابر مقادیر خودشان قرار می‌دهیم. به عنوان مثال:

$$x = (0,0,0,...,1) \Rightarrow x^{@} = (0,0,0,...,u_n)$$
$$x = (0,5,0...,1,1,0,0) \Rightarrow x^{@} = (0,5,0,...,1,u_{n-2},u_{n-1},u_n)$$

برای هر x یک بردار $x^{\#}$ هم تعریف می‌شود:

$$x^{\#} = \begin{cases} \left(x^{@}\right)' & \text{if } x^{@} \ne u \\ \text{Does not exist if } x^{@} = u \end{cases}$$

بردار $x^{\#}$ اولین بردار پس از $x^{@}$ در ترتیب لغتنامه‌ای است که ممکن است وجود نداشته باشد. برای به دست آوردن بردار $x^{\#}$ از سمت راست یعنی آخرین مولفه بردار x شروع می‌کنیم و به دنبال اولین عنصر غیر صفر می‌گردیم. به عنوان مثال اگر x_j اولین عنصر غیر صفر باشد، عنصر قبل از آن یعنی x_{j-1} را بررسی می‌کنیم. اگر x_{j-1} در حد بالای خود بود، به سراغ x_{j-2} می‌رویم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا اولین x_k پیدا شود که در حد بالایش نباشد. به این x_k عدد 1 را اضافه می‌کنیم. سپس همه مقادیر سمت راست را صفر قرار می‌دهیم و مقادیر سمت چپ را به همان صورت باقی می‌گذاریم. اگر همه x های قبل از x_j در حد بالای خود بود، بردار $x^{\#}$ وجود ندارد.

مثال:

اگر $0 \le x \le (3,2,1,3,2)$ باشد، ابتدا N را محاسبه می‌کنیم.

---

[1] L=Lexicographic

$$N=\prod_{j=1}^{5}\left(u_j+1\right)=4\times3\times2\times4\times3=288$$

یعنی در کل ۲۸۸ نقطه داریم که باید کنترل شوند. در زیر برای برخی xها x'، $x^{@}$ و $x^{\#}$ آمده است. برای به دست آوردن بردار x' عدد 1 را به صورت عددی با بردار x مربوط جمع می‌کنیم. (سیستم چرتکه‌ای)

x	x'	$x^{@}$	$x^{\#}$
0	$(0,0,0,0,1)$	$u=x^{N}$	وجود ندارد
$(0,0,0,0,1)$	$(0,0,0,0,2)$	$(0,0,0,0,2)$	$(0,0,0,1,0)$
$(0,1,0,0,0)$	$(0,1,0,0,1)$	$(0,2,1,3,2)$	$(1,0,0,0,0)$
$(1,2,1,3,0)$	$(1,2,1,3,1)$	$(1,2,1,3,2)$	$(2,0,0,0,0)$

با شروع از $x=0$ باید کنترل کنیم که آیا $i=1,\dots,m\ \ ,\ \ g_i\left(x^{@}\right)\ge b_i$ صادق است یا نه ؟

اگر این شرط برقرار باشد گوییم نقطه‌ای بین x و $x^{@}$ وجود دارد که درمحدودیت‌ها صادق است؛ و اگر این شرط برای محدودیتی صادق نباشد، آنگاه بین x و $x^{@}$ نقطه‌ای وجود ندارد که در آن محدودیت صادق باشد. دلیل این امر اینست که:

$$x\overset{L}{\le}y\overset{L}{\le}x^{@}\rightarrow x\le y\le x^{@}\rightarrow g_i(x)\le g_i(y)\le g_i\left(x^{@}\right)<b_i$$

پس هیچ بردار yای وجود ندارد که در آن محدودیت صادق باشد و این بدین معنی است که ما به طور ضمنی تمام نقاط بین x و $x^{@}$ را کنترل کرده‌ایم. اگر شرایط فوق برقرار باشد، برای $x^{\#}$ اگر موجود باشد، همین عمل را انجام می‌دهیم. اگر $f(x)$ تابع غیر کاهشی نباشد و آن را بتوانیم به وسیله تفاضل دو تابع غیرکاهشی بنویسیم:

$$\min\quad f(x)=f_1(x)-f_2(x)$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}g_i(x)\ge b_i\ \ i=1,\dots,m\\ 0\le x\le u\end{cases}$$

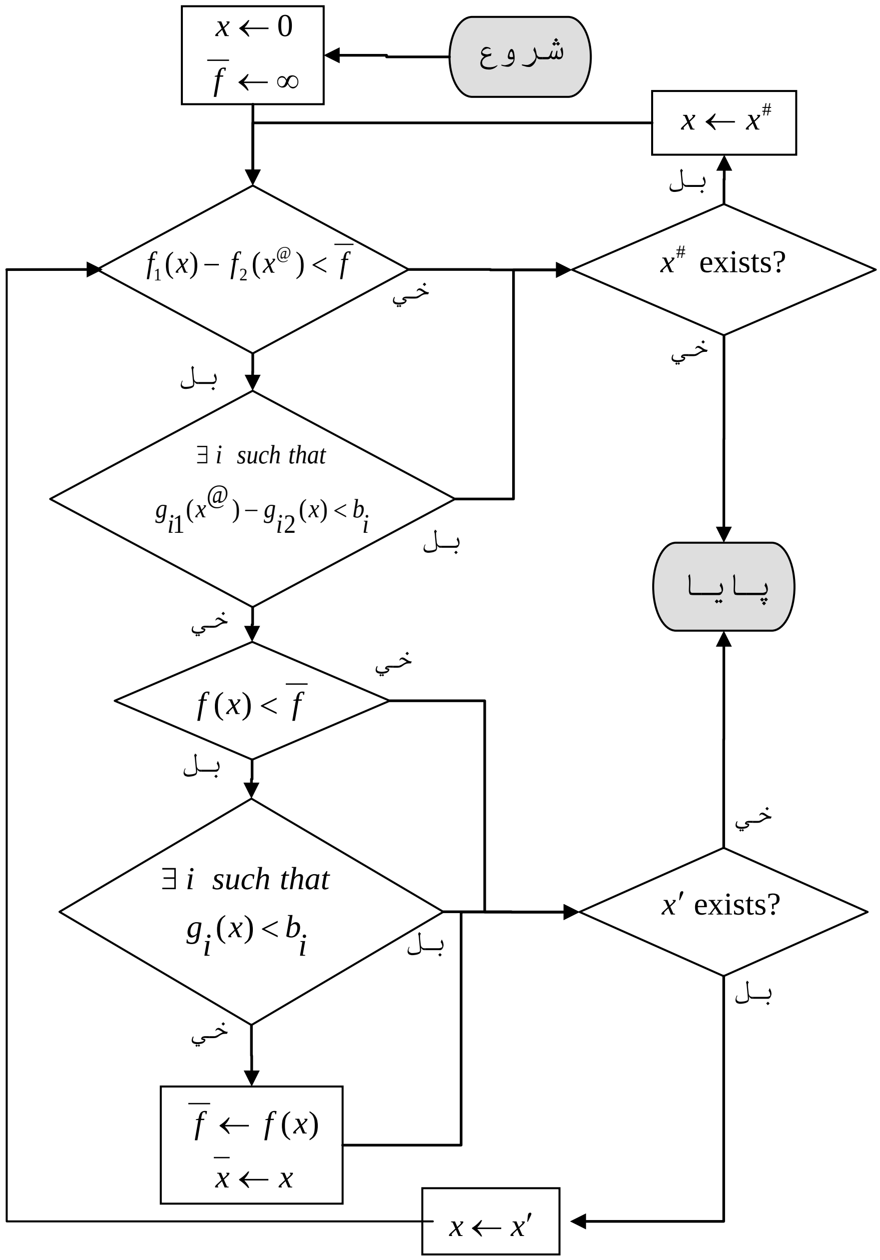
همچنین برای $g_i(x)$ها هم، اگر توابعی غیر کاهشی نباشند ولی بتوانیم آنها را به صورت تفاضل دو تابع غیرکاهشی $g_{i1}(x)$ و $g_{i2}(x)$ بنویسیم؛ امکان شمارش ضمنی وجود دارد.

$$g_i(x)=g_{i1}(x)-g_{i2}(x)\ge b_i$$

برای این کار، حد بالای تابع $g_i(x)$ را $g_{i1}(x^{@})-g_{i2}(x)$ قرار می‌دهیم؛ چون اگر تمام $g_i(y)$ ها را محاسبه کنیم، هیچپیک از مقدار فوق بزرگتر نمی‌شود.

اگر $g_{i1}(x^{@})-g_{i2}(x)\geq b_i$ صادق باشد، ممکن است بین x و $x^{@}$ جوابی وجود داشته باشد. ولی اگر صادق نباشد، نقطه‌ای بین x و $x^{@}$ وجود ندارد که در این محدودیت صادق باشد؛ بنابراین به سراغ $x^{\#}$ می‌رویم.

الگوریتم روش حل به صورت زیر است:



مثال:

$$\min \quad f(x) = x_1^2 + 3^{x_2} + 2^{x_3}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \ge 10 \\ x_2^2 - x_3^3 \ge 15 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \ge 20 \\ x_1 = 0,1,\ldots,5 \\ x_2 = 0,1,\ldots,7 \\ x_3 = 0,1,\ldots,4 \end{cases}$$

در این مثال محدودیت‌های دوم و سوم به صورت یک تابع یکنوای غیرکاهشی نیستند . اما به صورت تفاضل دو تابع غیر کاهشی قابل نمایش می‌باشند

$$\min \quad f(x) = x_1^2 + 3^{x_2} + 2^{x_3}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \ge 10 \\ (x_2^2) - (x_3^3) \ge 15 \\ (2x_1 + 5x_3) - (3x_2) \ge 2 \\ x_1 = 0,1,\ldots,5 \\ x_2 = 0,1,\ldots,7 \\ x_3 = 0,1,\ldots,4 \end{cases}$$

$$x = 0 \to x^@ = U$$

محدودیت اول را در نقطه $x^@$ محاسبه می‌کنیم و داریم:

$$5^2 + 7^2 \ge 10$$

که در نتیجه محدودیت اول برقرار می‌باشد. برای محدودیت دوم x_2 را از $x^@$ و x_3 را از x قرار می‌دهیم:

$$7^2 - 0 \ge 10$$

برای محدودیت سوم نیز مانند محدودیت دوم عمل می‌کنیم.
اگر بخواهیم $x^@$ را برای بردار $x' = [1 \quad 0 \quad 0]$ به دست آوریم، از x_n شروع می‌کنیم و مقدار x_n را مقدار $x^@$ قرار می‌دهیم و بقیه x را همان مقدار بردار قرار می‌دهیم:

$$x' = [0 \quad 0 \quad 1] \to x^@ = [0 \quad 0 \quad 4]$$

اگر بردار اول x' در محدودیت اول صادق نباشد، هیچکدام از بردارهای بین $[1 \quad 0 \quad 0]$ و $[4 \quad 0 \quad 0]$ در بردار صادق نخواهند بود:

$$\begin{aligned} x' = [0 \quad 0 \quad 1] &\to x^{@} = [0 \quad 0 \quad 4] \\ &\to x^{\#} = [0 \quad 1 \quad 0] = x \\ &\to x^{@} = [0 \quad 7 \quad 4] \end{aligned}$$

و بردار $x^{@} = [0 \quad 7 \quad 4]$ هم در محدودیت سوم صدق نمی‌کند:

$$\begin{aligned} &0 + 49 \geq 10 \\ &49 - 0 \geq 15 \\ &0 + 20 - 3 = 17 < 20 \end{aligned}$$

در نتیجه بردارهای بین این دو هم درمحدودیت‌ها صدق نخواهد کرد و شمارش شده‌اند.

$$\begin{aligned} x^{@} = [0 \quad 7 \quad 4]& \\ &\to x^{\#} = [1 \quad 0 \quad 0] = x \\ &\to x^{@} = [5 \quad 7 \quad 4] \end{aligned}$$

و به همین ترتیب شمارش را ادامه می‌دهیم.

xهای بعدی به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} x = [1 \quad 0 \quad 1] &\quad , \quad x^{@} = [1 \quad 0 \quad 4] \\ x^{\#} = x = [1 \quad 1 \quad 0] &\quad , \quad x^{@} = [1 \quad 7 \quad 4] \\ x^{\#} = x = [2 \quad 0 \quad 0] &\quad , \quad x^{@} = [5 \quad 7 \quad 4] \\ x = [2 \quad 0 \quad 1] &\quad , \quad x^{@} = [2 \quad 0 \quad 4] \\ x^{\#} = [2 \quad 1 \quad 0] &\quad , \quad x^{@} = [2 \quad 7 \quad 4] \end{aligned}$$

نکته: در حل یک مسأله به روش شمارش ضمنی ترتیب متغیرها میتواند در زمان حل آن مسأله تاثیر داشنه باشد.

تمرین:

۱- بودجه‌بندی سرمایه: دو سرمایه‌گذاری با فرآیندهای مالی متفاوت، بر حسب هزار دلار در جدول نشان داده شده‌اند. در زمان ۰ ۱۰۰۰۰ دلار برای سرمایه گذاری موجود است و در زمان ۱، ۷۰۰۰ دلار. با فرض اینکه نرخ بازگشت سالانه برابر با $r = 0.1$ است، یک مدل LP تنظیم کنید که پاسخ آن مقدار "ارزش فعلی خالص[1] به دست آمدع از این سرمایه‌گذاری‌ها را ماکزیمم کند.

	زمان			
	0	1	2	3
سرمایه‌گذاری 1	-6	-5	+7	+9
سرمایه‌گذاری 2	-8	-3	+9	+7

۲- زمان‌بندی چند دوره‌ای:[2] یک شرکت بیمه در طی شش ماه آینده به تعداد زیر رایانه نیاز دارد:

ماه	فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور
تعداد	9	5	7	9	10	5

می‌توان رایانه‌ها را برای دوره‌های یک، دو و سه ماهه به ترتیب با قیمت ماهیانه ۲۰۰ دلار، ۳۵۰ دلار و ۴۵۰ دلار اجاره کرد. یک مساله LP فرمول‌بندی کنید به نحوی که هزینه اجاره حداقل گردد.

۳- تعداد شش شهر در یک کشور وجود دارد. این کشور باید مشخص کند که ایستگاه‌های آتش‌نشانی کجا ساخته شوند به نحوی که در هر شهر حداقل یکی از ایستگاه‌های آتش‌نشانی در فاصله ۱۵ دقیقه‌ای هر شهر باشد. زمان لازم برای جابه‌جایی پین شهرها در جدول زیر آورده شده است:

شهر 2	10				
شهر 3	20	25			
شهر 4	30	35	15		
شهر 5	30	20	30	15	

---

[1] Net Present Value

[2] Multi Period Work Scheduling

یک مدل IP فرمول‌بندی کنید که تعداد و مکان‌های ایستگاه‌های آتش‌نشانی را مشخص کند.

۴- یک شرکت چسب سازی سه نوع متفاوت از چسب را در دو خط تولید متفاوت، تولید می‌کند. هر خط تولید می‌تواند حداکثر ۷ کارگر را به کار گیرد. کارگرانی که در خط تولید شماره یک به کار گرفته شوند، ۵۰۰ دلار در هفته و کارگرانی که در خط تولید شماره دو به کار گرفته شوند، ۹۰۰ دلار در هفته حقوق دریافت خواهند کرد. برای یک هفته کاری، تنظیم خط یک ۱۰۰۰ دلار و خط دو ۲۰۰۰ دلار هزینه دارد و هر یک از کارگران به مقدار نشان داده شده در جدول زیر چسب تولید خواهد کرد:

	چسب 1	چسب 2	چسب 3
خط تولید 1	20	30	40
خط تولید	50	35	45

با توجه به اینکه در هر هفته ۱۲۰ واحد از چسب شماره یک، ۱۵۰ واحد از چسب شماره ۲ و ۲۰۰ واحد از چسب شماره ۳ باید تولید شود؛ یک مدل IP فرمول‌بندی کنید که هزینه هفتگی را بهینه کند.

۵- جواب بهینه ماتریسهای هزینه زیر را با روش مجارستانی به دست آورید:

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 8 & 9 & 10 & 7 & 5 \\ 10 & 12 & 11 & 13 & 8 \\ 7 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 10 & 7 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

و

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 & 6 \\ 7 & 9 & 10 & 8 & 5 \\ 10 & 12 & 11 & 3 & 8 \\ 7 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 3 & 5 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

۶- جواب بهینه ماتریس زیر را با روش مجارستانی یک بار با فرض هزینه ودیگر بار به عنوان سود بدست آورید:

$$\begin{pmatrix} 14 & 8 & 0 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 4 \\ 2 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

۷- مسئله IP زیر را با روش شاخه کرانه حل کنید. برای حل هر زیرمسئله می‌توانید از هر روش دلخواه یا نرم‌افزار استفاده کنید.

$$\max \ z = 8x_1 + 5x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \le 45 \\ x_i \ge 0 \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۸- مسئله تخصیص زیر (سود) را با روش شاخه و کرانه حل کنید.

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 & 3 \\ 10 & 15 & 20 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 8 & 12 & 16 & 4 \end{pmatrix}$$

۹- در یک مدل برنامه ریزی خطی متغیرهای ۱ و ۲ و ۳ صحیح هستند. اگر در جدول بهینه پیوسته محدودیتی که در آن متغیر پایه است به صورت زیر باشد برش مربوط به این محدودیت را به دست آورید:

$$-2x_2 + x_3 + \frac{7}{3}x_4 - 2x_5 + \frac{9}{4}x_6 = \frac{17}{5}$$

۱۰- برای برنامه IP زیر برش مربوط به محدودیت اول را در جدول وارد کنید.(همه متغیرها صحیح هستند).

پایه	مقدار	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	$\cdots$	2	0	0	1	3
x_3	$17/3$	-3.5	0	1	1.5	0.25
x_4	1.6	$5/3$	1	0	-1.5	1

(جواب بهینه)

۱۱- مسئله زیر را با روش شمارش ضمنی حل کنید

$$\min \quad z = 5x_1^3 + 2x_2^2 + 3x + 10$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \geq 10 \\ x_2^2 + x_3^2 \geq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10 \\ x_i = 0,1,3 \qquad i = 1,2,3 \end{cases}$$

فصل سوم – برنامه‌ریزی پویا

۳-۱- مقدمه

برنامه‌ریزی پویا یک شیوه بهینه‌سازی است که مسأله‌های پیچیده را به دنباله‌ای از مسأله‌های ساده تبدیل می‌کند. مشخصه اصلی آن در ماهیت چند مرحله‌ای این روش بهینه‌سازی است. برنامه‌ریزی پویا یک چارچوب کلی برای تجزیه و تحلیل خیلی از مسأله‌ها ارائه می‌دهد. در این چارچوب روش‌های گوناگونی از بهینه‌سازی برای حل صور مختلف مسأله‌ها قابل به کار گیری می‌باشد.

در این روش ابتدا باید مرحله‌های یک مسأله را تعریف کنیم. به عبارت دیگر باید مسأله را به دنباله‌ای از مسائل ساده‌تر تجزیه کنیم. پس از تعریف مرحله‌ها باید در نظر داشته باشیم که هر مرحله ممکن است از یک یا چند حالت تشکیل شده باشد.

۳-۲- اصل بهینگی

هر سیاست بهینه دارای این خاصیت است که حالت و تصمیم فعلی هر چه که باشد، باقیمانده تصمیمات باید بهینه باشند.

در مسأله‌های برنامه‌ریزی پویا، هر مسأله را می‌توان به صورت یک شبکه در ذهن مجسم کرد، که در آن اگر تابع هدف به صورت حداکثر باشد، به دنبال طولانی‌ترین مسیر می‌گردیم و اگر تابع هدف به صورت حداقل باشد، کوتاهترین مسیر بین دو یا چند گره را می‌جوییم. اصل بهینگی گویای این نکته است که هرگاه در یک گره باشیم، باید باقیمانده تصمیمات بهینه باشد؛ تا مسیر تعیین شده بهینه باقی بماند و گره در مسیر بهینه قرار گیرد. اگر حتی در یک قدم، تصمیم غیر بهینه بگیریم، سیاست، سیاستی بهینه نخواهد بود.

در این روش، می‌توانیم حرکت خود را از مرحله اول و یا از مرحله آخر شروع کنیم. اگر حرکت از مرحله اول شروع شود، به آن حرکت پیشرو و اگر از آخرین مرحله شروع شود، به آن حرکت پسرو می‌گوییم.

حرکت پسرو برای تمام مسأله‌ها، قابل استفاده است، اما حرکت پیشرو برای مسأله‌های احتمالی به کار نمی‌رود.

۳-۳- ویژگی‌های اصلی برنامه‌ریزی پویا

1. هر مسأله را می‌توان به n مرحله تقسیم کرد و در هر مرحله باید یک تصمیم گرفته شود. به عبارت دیگر مسأله عبارتست از دنباله‌ای از تصمیمات مرتبط با یکدیگر.
2. هر مرحله تعدادی حالت دارد. بطور کلی حالات عبارتند از وضعیتی که ممکن است سیستم در آن مرحله داشته باشد. در تعیین حالت برای یک مسأله، جواب به دو سوال می‌تواند مفید باشد:

الف) چه چیزی مرحله‌ها را به هم مرتبط می‌کند؟
ب) به چه اطلاعاتی نیاز است تا بتوان تصمیم مجاز را انتخاب کرد؛ بدون این که تصمیمات قبلی مشخص شده باشند.

3. در هر حالت از هر مرحله با اتخاذ یک تصمیم حالت مرحله فعلی به حالتی در مرحله دیگر انتقال می‌یابد.
4. این روش حل به‌گونه‌ای طراحی شده است که جواب بهینه مسأله اصلی را بیابد یعنی تعیین سیاست بهینه در هر حالت از هر مرحله. یعنی اینکه تصمیم بهینه در یک مرحله خاص بستگی به حالت آن مرحله دارد نه اینکه چگونه به آن حالت رسیده‌ایم. این به اصل بهینگی برای برنامه‌ریزی پویا معروف است.
5. با فرض معلوم بودن حالت در هر مرحله، سیاست بهینه در مورد مرحله‌های باقیمانده، مستقل از سیاستی است که در مرحله‌های قبلی اتخاذ شده است.
6. حل این نوع از مسأله‌ها با پیدا کردن جواب بهینه مربوط به کلیه حالت‌های مرحله آخر در حرکت پسرو و مرحله اول در حرکت پیشرو آغاز می‌گردد.
7. سیاست بهینه هر حالت از هر مرحله را می‌توان با یک رابطه برگشتی و با فرض معلوم بودن سیاست بهینه تمام حالت‌های مرحله بعدی در حرکت پسرو و مرحله قبلی در حرکت پیشرو مشخص ساخت.
8. با بکارگیری این رابطه برگشتی حل از آخرین (اولین) مرحله شروع میگردد و مرحله به مرحله به عقب (جلو) میرود تا مرحله اول (آخر) نیز حل گردد. این کار به یافتن جواب بهینه برای کل مسأله منتهی می‌شود.

۳-۴- حرکت پسرو و پیشرو و مرحله و حالت

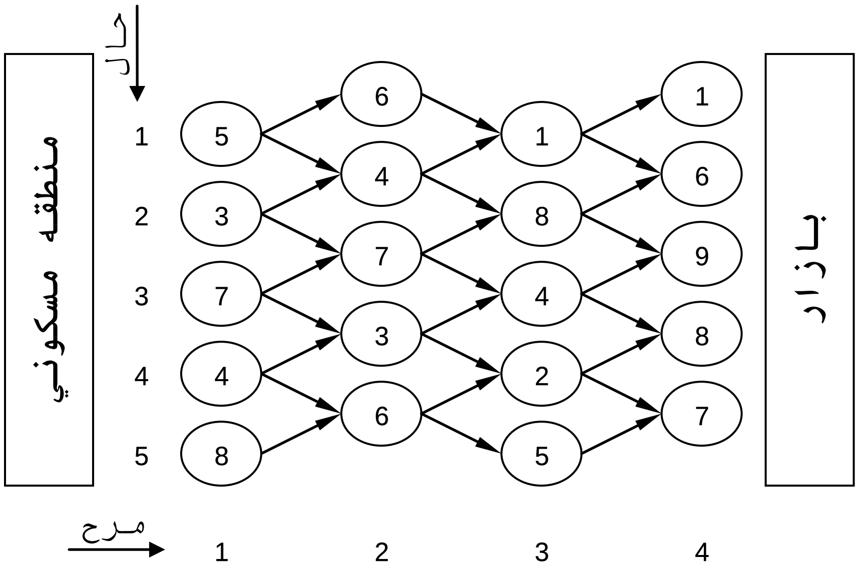
برای حل هر مسأله خاص، مرحله‌های خاص خودش را تعریف می‌کنیم؛ مثلا برای مسأله‌هایی که به زمان بستگی دارند، می‌توان واحد زمان را مرحله در نظر گرفت و در مسأله‌هایی که مکان مطرح است، هر مکان را می‌توان یک مرحله در نظر گرفت.

مثال:

قسمتی از یک شهر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم برای خرید از منطقه مسکونی به بازار برویم، به صورتی که در کمترین زمان به محل مورد نظر برسیم. در شکل زیر این مسأله نشان داده شده است. دایره‌ها به منزله تقاطع‌ها می‌باشند و اعداد، زمانی است که در هر تقاطع تلف می‌شود. گام ابتدا تعیین مرحله‌ها و حالت‌ها و متغیرهای تصمیم‌گیری می‌باشد.

مرحله: هر ستون را یک مرحله در نظر می‌گیریم.

حالت: هر تقاطع در هر ستون را یک حالت می‌نامیم.



با توجه به این که مسأله قطعی است، حرکات پسرو و پیشرو، هر دو، کاربرد دارند. در اینجا هر دو حرکت را نشان می‌دهیم:

الف) حرکت پسرو

در حرکت پسرو، حرکت را از مرحله آخر شروع می‌کنیم و به سوی مرحله اول می‌رویم. در هر مرحله حداقل زمان ممکن برای رسیدن به تمام حالتهای آن مرحله را به دست می‌آوریم و پس از رسیدن به مرحله اول با توجه به مسیری که حداقل زمان را نتیجه داده است، جواب بهینه را تعیین می‌کنیم.

حرکت را از مرحله چهارم شروع می‌کنیم و به سوی مرحله اول حرکت می‌کنیم. در مرحله چهارم مقدار زمان توقف در هر یک از ۵ تقاطع به ترتیب ۱۲ و ۶ و ۹ و ۸ و ۷ می‌باشد. درگام بعدی برای رفتن به مرحله ۳ باید کمترین زمان ممکن برای رسیدن به مقصد را به این صورت به دست آوریم:

$$16 = \min\{(10+12),(10+6)\}$$
$$14 = \min\{(8+6),(8+9)\}$$
$$12 = \min\{(4+9),(4+8)\}$$
$$9 = \min\{(2+8),(2+7)\}$$
$$12 = \min\{(5+7)\}$$

به عنوان مثال در رابطه اول، برای رسیدن به حالت ۱ در مرحله سوم، دو مسیر یکی از حالت ۱ مرحله چهارم به حالت ۱ مرحله سوم و دیگری از حالت ۲ مرحله چهارم به حالت ۱ مرحله سوم با هم مقایسه شده‌اند.

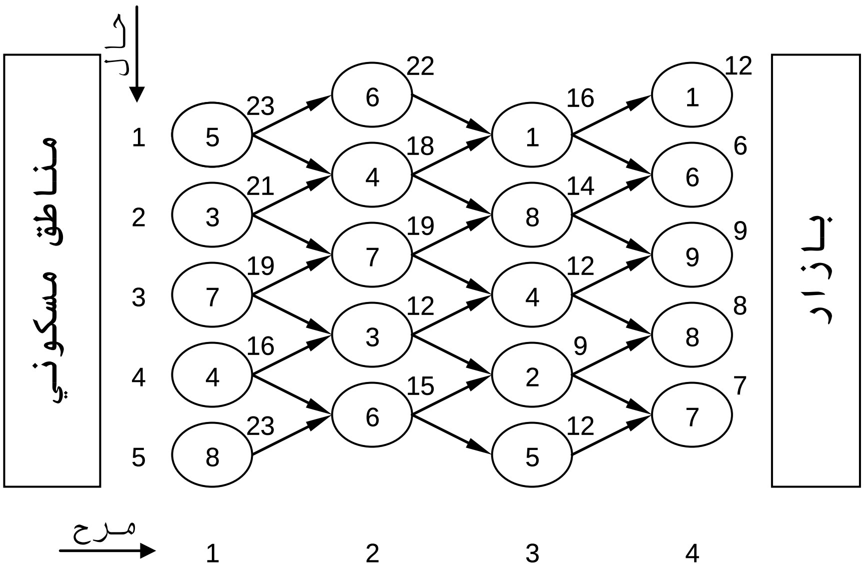
در گام بعد به مرحله ۲ می‌رویم:

$$22 = \min\left\{(6+16)\right\}$$
$$18 = \min\left\{(4+16),(4+14)\right\}$$
$$19 = \min\left\{(7+14),(7+12)\right\}$$
$$12 = \min\left\{(3+12),(3+9)\right\}$$
$$15 = \min\left\{(6+9),(6+12)\right\}$$

و در آخرین گام به مرحله ۱ می‌رویم:

$$23 = \min\left\{(5+22),(5+18)\right\}$$
$$21 = \min\left\{(3+18),(3+19)\right\}$$
$$19 = \min\left\{(7+19),(7+12)\right\}$$
$$16 = \min\left\{(4+12),(4+15)\right\}$$
$$23 = \min\left\{(8+15)\right\}$$

در شکل زیر طول بهترین مسیر برای رسیدن به هر یک از تقاطع‌ها را در کنار آن نوشته‌ایم:



همانطور که دیده می‌شود، کمترین زمان برای مسیری به دست آمد که از حالت ۴ در مرحله اول شروع می‌شود. بنابراین برای تعیین مسیر بهینه روابط را دوباره بررسی می‌کنیم تا مسیر بهینه را بیابیم. درنتیجه برای حرکت از مناطق مسکونی به بازار کمترین اتلاف زمان، برابر ۱۶ و با حرکت از حالت ۴ مرحله اول به حالت ۴ مرحله دوم، سپس به حالت ۴ مرحله سوم و به حالت ۵ مرحله چهارم به دست می‌آید.

ب) حرکت پیشرو

در حرکت پیشرو نیز همانند حرکت پسرو عمل می‌کنیم؛ با این تفاوت که به جای شروع حرکت از مرحله آخر، از مرحله اول شروع به حرکت کرده و به سمت مرحله آخر می‌رویم.

حرکت را از مرحله اول شروع می‌کنیم و به سوی مرحله چهارم حرکت می‌کنیم. در مرحله اول مقدار زمان توقف در هر یک از ۵ تقاطع به ترتیب ۵ و ۳ و ۷ و ۴ و ۸ می‌باشد. درگام بعدی برای رفتن به مرحله ۲ باید کمترین زمان ممکن برای رسیدن به مقصد را به این صورت به دست آوریم:

$$
\begin{aligned}
11 &= \min\{(5+6)\}\\
7 &= \min\{(5+4),(3+4)\}\\
10 &= \min\{(3+7),(7+7)\}\\
7 &= \min\{(7+3),(4+3)\}\\
11 &= \min\{(4+6),(8+6)\}
\end{aligned}
$$

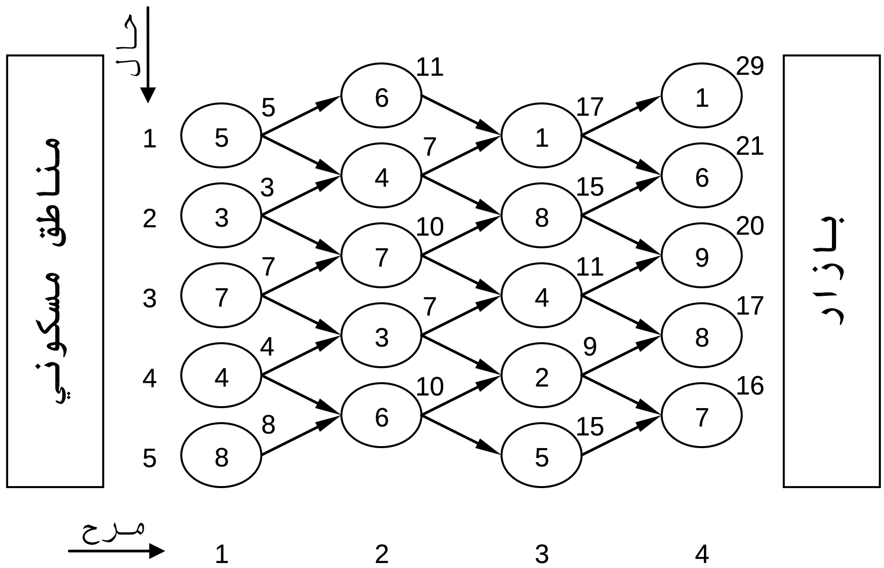
در گام بعد به مرحله ۳ می‌رویم:

$$
\begin{aligned}
17 &= \min\{(11+10),(7+10)\}\\
15 &= \min\{(7+8),(10+8)\}\\
11 &= \min\{(10+4),(7+4)\}\\
9 &= \min\{(7+2),(11+2)\}\\
16 &= \min\{(11+5)\}
\end{aligned}
$$

و در آخرین گام به مرحله ۴ می‌رویم:

$$29 = \min\{(17+12)\}$$
$$21 = \min\{(17+6),(15+6)\}$$
$$20 = \min\{(15+9),(11+9)\}$$
$$17 = \min\{(11+8),(9+8)\}$$
$$16 = \min\{(9+7),(16+7)\}$$

در شکل زیر طول بهترین مسیر برای رسیدن به هر یک از تقاطع‌ها را در کنار آن نوشته‌ایم:



همانطور که دیده می‌شود، در این روش نیز مسیر بهینه همانند حرکت پسرو به دست آمد.

نکته ۱: در حرکت پیشرو و پسرو، جواب نهایی یعنی مقدار بهینه و مسیرهای بهینه، یکسان است.

نکته ۲: در حرکت پسرو، خروجی‌های هر حالت و در حرکت پیشرو، ورودی‌های هر حالت مجموعه تصمیمات مجاز را مشخص می‌کنند.

نکته ۳: در حرکت پسرو، معیار انتخاب مسیر، طول مسیر بهینه از هر حالت تا مقصد است؛ در حالی که در حرکت پیشرو معیار انتخاب ، طول مسیر بهینه از مبدا تا حالتی است که در آن قرار داریم.

درحالت کلی اگر بدون شکل بخواهیم مسأله‌ای را حل کنیم، باید روابط بازگشتی، مرحله‌ها و حالت‌ها را بنویسیم. رابطه بازگشتی با توجه به نوع حرکت، یعنی پیشرو و یا پسرو بودن آن، نوشته می‌شود.

۳-۵- رابطه بازگشتی برای حرکت پسرو

فرض کنید در مرحله k و در یک حالت دلخواه مثلا حالت S_k باشیم. می‌خواهیم مسیر بهینه از گره S_k به گره مقصد را پیدا کنیم. طبیعی‌ترین راه اینست که کلیه مسیرهای موجود، از گره S_k به گره مقصد را بررسی کنیم و پس از پیدا کردن اندازه هر مسیر و مقایسه بین آن‌ها، کوتاه‌ترین مسیر را انتخاب کنیم. به این روش شمارش کامل گویند.

تعریف‌های زیر را در نظر بگیرید:

S_k : حالت در مرحله k

$U_k(S_k)$: طول مسیر بهینه از حالت S_k مرحله k تا مقصد:
(توجه کنید که نوع حرکت، پسرو است.)

D_k : مجموعه تصمیمات مجاز در حالت S_k مرحله k:
(کلیه کمان‌هایی که از گره خارج می‌شوند.)

در حرکت پسرو، حالت مرحله بعدی، تابعی است از حالت فعلی و تصمیم مجازی که گرفته می‌شود. یعنی:

$$S_{j+1} = g\left(S_j, d_j\right) \quad j = k, \ldots, n-1$$

برای شمارش کامل داریم:

$$U_k\left(S_k\right) = \min_{\substack{d_i \in D_i \\ S_{j+1}=g\left(S_j, d_j\right) \\ i=k,\ldots,n \\ j=K,\ldots,n-1}} \left\{ \begin{array}{l} f_k\left(S_k, d_k\right) \\ + f_{k+1}\left(S_{k+1}, d_{k+1}\right) \\ + \ldots \\ + f_n\left(S_n, d_n\right) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow U_k\left(S_k\right) = \min_{\substack{d_k \in D_k \\ S_{k+1}=g\left(S_k, d_k\right)}} \left\{ f_k\left(S_k, d_k\right) \right\} + \min_{\substack{d_i \in D_i \\ S_{j+1}=g\left(S_j, d_j\right) \\ i=k+1,\ldots,n \\ j=K+1,\ldots,n-1}} \left\{ \begin{array}{l} f_{k+1}\left(S_{k+1}, d_{k+1}\right) \\ + \ldots \\ + f_n\left(S_n, d_n\right) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow U_k\left(S_k\right) = \min_{\substack{d_k \in D_k \\ S_{k+1}=g\left(S_k, d_k\right)}} \left\{ f_k\left(S_k, d_k\right) + U_{k+1}\left(S_{k+1}\right) \right\}$$

$$k = n, n-1, \ldots, 1 \quad , \quad U_{\mathrm{n}+1}\left(S_{n+1}\right) = 0$$

اگر در مسأله‌ای، طول مسیر از ضرب کمان‌ها به دست بیاید، مثل مسیرهای احتمالی که از ضرب احتمال‌ها به دست می‌آیند؛ قرار می‌دهیم:

$$U_{n+1}\left(S_{n+1}\right)=1$$

۳-۶- رابطه بازگشتی برای حرکت پیشرو

اگر حرکت به صورت پیشرو باشد، شروع آن از مرحله اول است و طی آن طول مسیر بهینه از مبدا تا هر گره در هرحالت از هر مرحله را به دست می‌آوریم. بنابراین ورودی‌های به هر گره، مجموعه تصمیمات مجاز را مشخص می‌کند. همچنین، در طول مسیر، در هر گره‌ای که قرار گرفتیم؛ طول تمام مسیرهایی که از مبدا شروع شده و به آن گره ختم می‌شود را به دست آورده و با هم مقایسه می‌کنیم:

S_k : حالت در مرحله k

$U_k(S_k)$: طول مسیر بهینه از مبدا تا حالت S_k مرحله k
(توجه کنید که نوع حرکت، پیشرو است.)

D_k : مجموعه تصمیمات مجاز در حالت S_k مرحله k
(کلیه کمان‌هایی که به گره وارد می‌شوند.)

در حرکت پیشرو، حالت مرحله قبلی، تابعی است از حالت فعلی و تصمیم مجازی که گرفته می‌شود. ولی برای این نوع از حرکت، نوع نوشتن محدودیتها متفاوت است. یعنی:

$$S_{j-1}=g\left(S_j,d_j\right)\quad j=2,\ldots,k$$

برای شمارش کامل داریم:

$$U_k\left(S_k\right)=\min_{\substack{d_i\in D_i\\ S_{j-1}=h\left(s_j,d_j\right)\\ i=1,2,\ldots,k\\ j=2,3,\ldots,k}}\left\{\begin{array}{l}f_1\left(S_1,d_1\right)\\ +f_2\left(S_2,d_2\right)\\ +\ldots\\ +f_k\left(S_k,d_k\right)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow U_k\left(S_k\right)=\min_{\substack{d_k\in D_k\\ S_{k-1}=h\left(S_k,d_k\right)}}\left\{\begin{array}{l}\min\limits_{\substack{d_i\in D_i\\ S_{j-1}=h\left(S_j,d_j\right)\\ i=1,\ldots,k-1\\ j=2,\ldots,k-1}}\left\{\begin{array}{l}f_1\left(S_1,d_1\right)\\ +\ldots\\ +f_{k-1}\left(S_{k-1},d_{k-1}\right)\end{array}\right\}\\ +f_k\left(S_k,d_k\right)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow U_k\left(S_k\right)=\min_{\substack{d_k\in D_k\\ S_{k-1}=h\left(S_k,d_k\right)\\ k=1,\ldots,n\\ U_0\left(S_0\right)=0}}\left\{\begin{array}{l} f_k\left(S_k,d_k\right)\\ +U_{k-1}\left(S_{k-1}\right)\end{array}\right\}$$

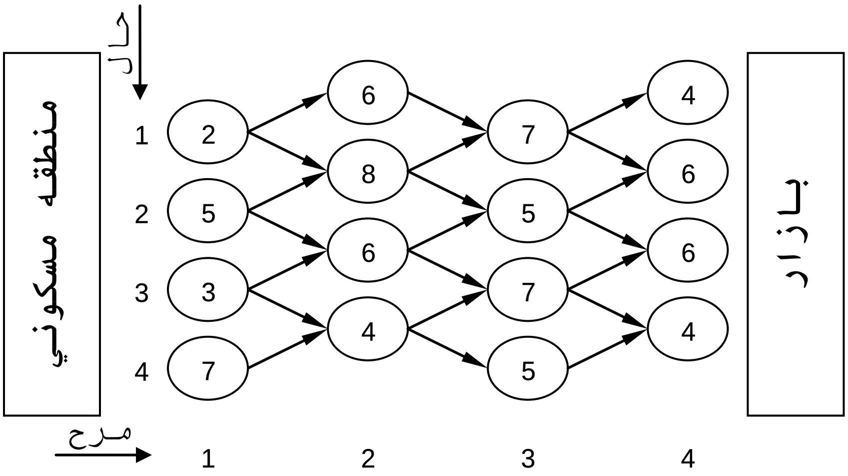
و درحالت ضرب کمان‌ها:

$$U_0\left(S_0\right)=1$$

۳-۷- دو مثال با دو نوع حرکت

مثال اول:

می‌خواهیم یک نمونه کوچکتر از حرکت بین منطقه مسکونی و بازار را با استفاده از فرمول حل کنیم.
شکل زیر را در نظر بگیرید:



حرکت پسرو

با استفاده از فرمول برای حرکت پسرو، داریم:

$$U_5\left(S_5\right)=0$$

و برای مرحله چهارم داریم:

$$\left|\begin{array}{l} U_4\left(S_4=1\right)=\min\left\{f_4\left(S_4,d_4\right)+U_5\left(S_5\right)\right\}=4 \\ U_4\left(S_4=2\right)=6 \\ U_4\left(S_4=3\right)=6 \\ U_4\left(S_4=4\right)=4 \end{array}\right.$$

$k=4$

S_4	$U_4\left(S_4\right)$
1	4
2	6
3	6
4	4

برای مرحله سوم داریم:

$k=3$

d_3 / S_3	$f_3(S_3,d_3)+U_4(S_4)$		$U_3(S_3)$	$a_*^{د}$
	حرکت بالا	حرکت پایین		
1	$7+4=11$	$7+6=1$	11	بالا
2	$5+6=11$	$5+6=11$	11	بالا یا پایین
3	$7+6=1$	$7+4=11$	11	پایین
4	$5+4=9$	–	9	بالا

برای مرحله دوم داریم:

$k=2$

d_2 / S_2	$f_2(S_2,d_2)+U_3(S_3)$		$U_2(S_2)$	d_2^*
	حرکت بالا	حرکت پایین		
1	–	$6+11=17$	17	پایین
2	$8+11=19$	$8+11=19$	19	بالا یا پایین
3	$6+11=17$	$6+11=17$	17	بالا یا پایین

و برای مرحله اول، داریم:

$k=1$

d_1 / S_1	$f_1(S_1,d_1)+U_2(S_2)$		$U_1(S_1)$	d_1^*
	حرکت بالا	حرکت پایین		
1	$2+17=19$	$2+19=21$	19	بالا
2	$5+19=24$	$5+17=22$	22	پایین
3	$3+17=20$	$3+13=16$	16	پایین
4	$7+13=20$	–	20	بالا

بنابراین طول کوتاهترین مسیر از منطقه مسکونی به منطقه بازار برابر ۱۶ می‌باشد. برای تعیین مسیر بهینه از آخرین جدول شروع می‌کنیم و با توجه به این که مقدار بهینه از کدام مسیر نتیجه شده، هر گام حرکت را مشخص می‌کنیم:

$$3 \to 4 \to 4 \to 4$$

حرکت پیشرو

برای حرکت پیشرو به این صورت عمل می‌کنیم:

$$U_0\left(S_0\right)=0$$

و برای مرحله اول داریم:

$$\left| \begin{array}{l} U_1\left(S_1=1\right)=\min\left\{ f_1\left(S_1,d_1\right)+U_0\left(S_0\right)\right\}=2 \\ U_1\left(S_1=2\right)=5 \\ U_1\left(S_1=3\right)=3 \\ Uv\left(S_1=4\right)=7 \end{array} \right.$$

$k=1$

S_1	$U_1\left(S_1\right)$
1	2
2	5
3	3
4	7

برای مرحله دوم داریم:

$k = 2$

d_2 / S_2	$f_2(S_2, d_2) + U_1(S_1)$		$U_2(S_2)$	d_2^*
	حرکت بالا	حرکت پایین		
1	$2+6=8$	$-$	8	بالا
2	$5+8=13$	$2+8=10$	10	پایین
3	$3+6=9$	$5+6=11$	9	بالا
4	$7+4=11$	$3+4=7$	7	پایین

برای مرحله سوم داریم:

$k = 3$

d_3 / S_3	$f_3(S_3, d_3) + U_2(S_2)$		$U_3(S_3)$	$a^{د}_{*}$
	حرکت بالا	حرکت پایین		
1	$10+7=17$	$8+7=15$	15	پایین
2	$9+5=14$	$10+5=15$	14	بالا
3	$7+7=14$	$9+7=16$	14	بالا
4	$-$	$7+5=1$	12	پایین

و برای مرحله چهارم، داریم:

$k = 4$

d_4 / S_4	$f_4(S_4, d_4) + U_3(S_3)$		$U_4(S_4)$	d_4^*
	حرکت بالا	حرکت پایین		
1	$15+4=19$	$-$	19	بالا
2	$14+6=20$	$15+6=21$	20	بالا
3	$14+6=20$	$14+6=20$	20	بالا یا پایین
4	$12+4=16$	$14+4=18$	16	بالا

دیده می‌شود که در این روش نیز جواب برابر با روش قبل به دست آمده است.

نکته: در مثال قبل، اگر بخواهیم از قسمت خاصی از منطقه مسکونی حرکت کنیم، باید طول مسیر بهینه از آن نقطه را تا بازار بیابیم. از آنجا که پس از نوشتن جداول در روش پسرو، برای تعیین

مسیر از آخرین جدول شروع می‌کنیم. با استفاده از حرکت پسرو می‌توانیم از نقطه خاص مورد نظر در مبدا به سمت مقصد و در طول مسیر بهینه حرکت کنیم. برعکس اگر بخواهیم به منطقه خاصی از بازار وارد شویم، باید از حرکت پیشرو استفاده کنیم. در مثال فوق اگر بخواهیم از حالت ۲ مرحله ۱ شروع کنیم، طول مسیر بهینه ۲۲ می‌باشد و اگر بخواهیم به حالت ۲ مرحله ۴ وارد شویم طول مسیر بهینه ۲۰ می‌باشد.

مثال دوم:

می‌خواهیم ۱۴ یخچال را بین ۴ فروشگاه تقسیم کنیم. می‌خواهیم بدانیم با توجه به جدول زیر، چگونه یخچال‌ها توزیع شود که حداکثر درآمد را داشته باشیم:

درآمد حاصل از توزیع یخچال‌ها به فروشگاه‌ها

فروشگاه / تعداد	اول	دوم	سوم	چهارم
0	0	0	0	0
1	10	8	10	9
2	18	18	20	20
3	–	28	22	32
4	–	40	30	45
5	–	–	38	55

قدم اول تعریف مرحله است. فروشگاه‌ها را به عنوان مرحله‌ها در نظر می‌گیریم. حرکت مناسب هم پسرو و هم پیشرو می‌باشد. حرکت پسرو را در نظر می‌گیریم. حالت باید به گونه‌ای تعریف شود که بتوان در هر حالت تصمیمات مجاز را مشخص نمود. بنابراین می‌توان تعداد یخچال‌های باقیمانده برای فروشگاه‌های kام تا ۴ام را به عنوان حالت در نظر گرفت.

حرکت پسرو

با توجه به این که هدف حداکثر کردن درآمد است داریم:

$$U_k\left(S_k\right)=\max_{\substack{d_k\in D_k\\ S_{k+1}=g\left(S_k,d_k\right)\\ k=k,\ldots,1\\ U_5\left(S_5\right)=0}}\left\{f_k\left(S_k,d_k\right)+U_{k+1}\left(S_{k+1}\right)\right\}$$

باید توجه داشته باشیم که تخصیص به فروشگاه چهارم، زمانی اتفاق می‌افتد که ما به سه فروشگاه قبلی، تخصیص‌هایی داده باشیم. بنابراین، حداقل تعداد یخچالی که می‌توان به فروشگاه چهارم اختصاص داد، برابر است با ۲ چون:

حداکثر تعداد تخصیص	فروشگاه
2	اول
4	دوم
6	سوم
12	مجموع

و حداکثر تعداد یخچال قابل تخصیص به فروشگاه چهارم، طبق جدول داده‌ها برابر ۵ است. پس جدول مرحله چهارم را به صورت زیر رسم می‌کنیم:

$k=4$

S_4	$U_4(S_4)$	d_4^*
2	20	2
3	32	3
4	45	4
5	55	5

برای مرحله سوم، توجه کنید که تصمیمات ۰، ۱ و ۲ جزء تصمیمات مجاز نیستند؛ زیرا که کل تقاضای سایر فروشگاه‌ها ۱۱ عدد یخچال است. حالا با هم جدول را پر می‌کنیم:

اگر سه یخچال، به فروشگاه سوم بدهیم، از یخچال‌های باقیمانده حداکثر پنج تا را می‌توانیم به فروشگاه چهارم اختصاص بدهیم. بنابراین باتخصیص ۵ به فروشگاه چهارم، درآمد ۵۵ و با تخصیص ۳ به فروشگاه سوم درآمد ۲۲ را داریم. توجه کنید که حالت‌های ۶، ۷ و۸ جزء تخصیص‌های مجاز برای فروشگاه ۴ نیست. بنابراین در ستون اول، تنها سطر اول مقدار می‌پذیرد. بقیه سطرها و ستون‌ها را نیز به همین صورت پر می‌کنیم. در نهایت، جدول مرحله سوم به این شکل است:

$k=3$

S_3 \ d_3	$f_3(S_3,d_3)+U_4(S_4)$				$U_3(S_3)$	d_3^*
	3	4	5	6		
8	$22+55$	$30+45$	$38+32$	$45+20$	77	3
9	–	$30+55$	$38+45$	$45+32$	85	4
10	–	–	$38+55$	$45+45$	93	5
11	–	–	–	$45+55$	100	6

جدول مرحله دوم نیز به این ترتیب است:

$k=2$

S_2 \ d_2	$f_2(S_2,d_2)+U_3(S_3)$ 1	2	3	4	$U_2(S_2)$	d_2^*
12	$8+100$	$18+93$	$28+85$	$40+77$	117	4
13	–	$18+100$	$28+93$	$40+85$	125	4
14	–	–	$28+100$	$40+93$	133	4

در مرحله اول، چون حداکثر تقاضای فروشگاه‌های ۲، ۳ و ۴ بیش از ۱۴ است، پس می‌توان به فروشگاه ۱ چیزی نداد. بنابراین صفر جزء تصمیمات مجاز فروشگاه ۱ است و برای جدول مرحله اول داریم:

$k=1$

S_1 \ d_1	$f_1(S_1,d_1)+U_2(S_2)$ 0	1	2	$U_1(S_1)$	d_1^*
14	$0+133$	$10+125$	$18+117$	135	1 یا 2

بنابراین، حداکثر عایدی تخصیص یخچال‌ها به فروشگاه‌ها، ۱۳۵ است که در نتیجه با توجه به جدول‌های فوق، داریم:

4	3	2	1	فروشگاه	
5	4	4	1	روش اول	تعداد تخصیص
5	3	4	2	روش	

$135 = 55 + 30 + 40 + 10 =$ درآمد حاصل از روش اول توزیع

$135 = 55 + 22 + 40 + 18 =$ درآمد حاصل از روش دوم توزیع

حرکت پیشرو

همین مثال را با حرکت پیشرو حل می‌کنیم. در حرکت پیشرو، حالت را تعداد یخچال‌های توزیع شده بین فروشگاه‌های اول تا kام (شامل فروشگاه مرحله kام) در نظر می‌گیریم:

$$U_k(S_k) = \max_{\substack{d_k \in D_k \\ S_{k-1}=g(S_k,d_k) \\ k=1,\dots,4 \\ U_0(S_0)=0}} \left\{ f_k(S_k,d_k) + U_{k+1}(S_{k-1}) \right\}$$

$k=1$

S_1	$U_1(S_1)$	d_1^*
0	0	0
1	10	1
2	18	2

برای $k = 2$ حداقل حالت، برابر است با ۳ چون مجموع تخصیص‌های بعدی حداکثر ۱۱ می‌باشد.

$k=2$

S_2 \ d_2	$f_2(S_2,d_2)+U_1(S_1)$				$U_2(S_2)$	d_2^*
	1	2	3	4		
3	$8+18$	$18+10$	$28+0$	–	28	2 یا 3
4	–	$18+18$	$28+10$	$40+0$	40	4
5	–	–	$28+18$	$40+10$	50	4
6	–	–	–	$40+18$	58	4

حداقل تخصیص برای فروشگاه سوم، ۳ تا است. بنابراین:

$k=3$

S_3 \ d_3	$f_3(S_3,d_3)+U_2(S_2)$				$U_3(S_3)$	d_3^*
	3	4	5	6		
9	$22+58$	$30+50$	$38+40$	$45+28$	80	4 یا 4
10	–	$30+58$	$38+50$	$45+40$	88	3 یا 5
11	–	–	$38+58$	$45+50$	96	5
12	–	–	–	$45+58$	103	6

$k=4$

S_4 \ d_4	$f_4(S_4,d_4)+U_3(S_3)$				$U_4(S_4)$	d_4^*
	2	3	4	5		
14	$20+103$	$32+96$	$45+88$	$55+80$	135	5

حداکثر سود عایدی در حرکت پسرو و پیشرو با هم مساوی و برابر با ۱۳۵ است.

۳-۸- تنزیل

فرض کنید شرکت برق برای تامین برق ۶ سال آتی نیروگاه‌هایی احداث می‌کند، با این شرط که هزینه مینیمم شده و جوابگوی نیاز مصرف کنندگان نیز باشد. در ضمن در هر سال حداکثر ۳ نیروگاه میتوان احداث کرد و اگر در سالی نیروگاهی ایجاد نکنیم، هزینه ثا بت وجود ندارد، در غیر این صورت یک هزینه ثابت ۲ میلیون دلاری نیز باید منظور شود. جدول زیر هزینه و تقاضای تجمعی برای نیروگاه در ۶ سال آینده را نشان می‌دهد:

سال	تقاضاي تجمعي در پايان سال (نيروگاه)	هزينه هر نيروگاه (ميليون دلار)
86	1	54
87	2	56
88	4	58
89	6	57
90	7	55
91	8	52

با حل مسأله با روش پسرو یا پیشرو، چنین جوابی خواهیم داشت:

حداقل هزینه = ۴۴۵ میلیون دلار

سياست بهينه:

سال	86	87	88	89	90	91
تعداد نيروگاه	3	3	0	0	1	1

در این مثال می‌توان هدف را یافتن تعداد ساخت بهینه با کمترین هزینه و با در نظر گرفتن ارزش فعلی پول قرار داد. به عبارت ساده‌تر، این موضوع بدین معنی است که ارزش یک دلاری که امروز دریافت می‌شود، بیش از یک دلاری است که در سال بعد دریافت می‌شود. زیرا یک دلار امروز می‌تواند برای دریافت سود اضافی در طول سال سرمایه‌گذاری شود.

ضریب تنزیل یک دوره‌ای β را به عنوان ارزش فعلی یک دلاری که یک دوره بعد دریافت می‌شود، تعریف می‌کنیم. اگر نرخ سود برای هر دوره با i نشان داده شود، در این صورت ارزش هر یک دلاری که در هر دوره سرمایه‌گذاری شود در پایان دوره به $1+i$ می‌رسد.

برای مشاهده رابطه بین ضریب تنزیل β و نرخ سود i این سوال را مطرح می‌کنیم که برای دریافت یک دلار در دوره بعد، چقدر باید در دوره فعلی سرمایه‌گذاری شود؟

واضح است که این مقدار از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$i+1=1/\beta$$

به عبارت دیگر $\beta = 1/(1+i)$. اگر در حال حاضر یک دلار با نرخ سود i برای n دوره بعد سرمایه‌گذاری کنیم و سود نیز به صورت مرکب باشد؛ در این صورت در پایان n دوره، ارزش تجمعی آن برابر با $(1+i)^n$ می‌شود. بنابراین ارزش فعلی هر یک دلاری که n دوره بعد دریافت می‌شود، برابر است با $\frac{1}{(1+i)^n}$ و یا β^n.

مفهوم تنزیل به سادگی قابل آمیختن با رابطه برگشتی پسرو برنامه‌ریزی پویا می‌باشد. زیرا در هر دوره (مرحله) یک برگشت داریم که ممکن است بخواهیم آن را با ضریب تنزیل دوره‌ای نزول دهیم. رابطه برگشتی برای چنین مسأله‌هایی به صورت زیر می‌باشد:

$$U_k(S_k)=\min_{\substack{d_i\in D_i\\ S_{j+1}=g(S_j,d_j)\\ i=k,\dots,n\\ j=K,\dots,n-1}}\left\{\begin{array}{l} f_k(S_k,d_k)\\ +\beta f_{k+1}(S_{k+1},d_{k+1})\\ +\dots\\ +\beta^{n-k} f_n(S_n,d_n)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow U_k(S_k)=\min_{\substack{d_k\in D_k\\ S_{k+1}=g(S_k,d_k)}}\left\{f_k(S_k,d_k)\right\} + \min_{\substack{d_i\in D_i\\ S_{j+1}=g(S_j,d_j)\\ i=k+1,\dots,n\\ j=k+1,\dots,n-1}} \beta\left\{\begin{array}{l} f_{k+1}(S_{k+1},d_{k+1})\\ +\dots\\ +\beta^{n-k-1} f_n(S_n,d_n)\end{array}\right\}$$

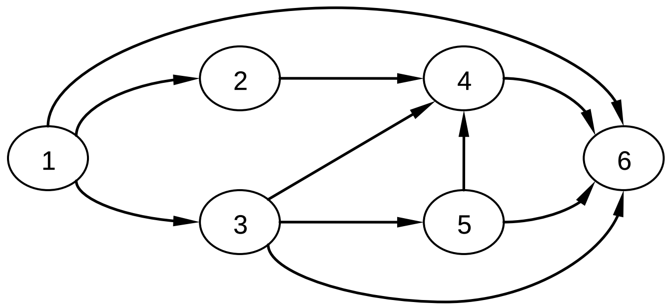
$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} U_k(S_k)=\min\limits_{\substack{d_k\in D_k\\ S_{k+1}=g(S_k,d_k)}}\left\{\begin{array}{l} f_k(S_k,d_k)\\ +\beta U_{k+1}(S_{k+1})\end{array}\right\}\\ \\ k=n,n-1,\dots,1\\ U_{n+1}(S_{n+1})=0\end{array}\right.$$

۳-۹- شبکه‌ها

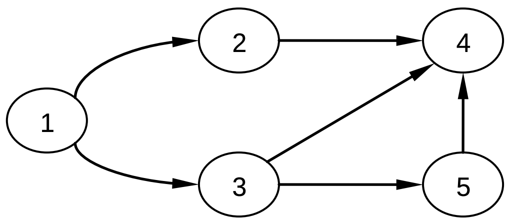
یک شبکه از چند گره و کمان‌هایی که آن گره‌ها را به هم متصل می‌کند تشکیل شده است. شبکه‌ها انواع مختلف دارند؛ شبکه‌های با حلقه و بدون حلقه. شبکه با حلقه شبکه‌ای است که در آن بتوان بعد از چند حرکت در جهت کمان‌ها، از یک گره دوباره به همان گره برسیم.

۳-۹-۱- شبکه‌های بدون حلقه

برای تعیین تعداد مرحله‌ها وحالت‌ها، هر مرحله کار را از گره‌هایی که ورودی داشته، اما خروجی نداشته باشند، آغاز می‌کنیم و گره‌ها و کمان‌های وارد شده به آنها را حذف می‌کنیم. به عنوان مثال شبکه زیر را در نظر بگیرید.



اولین گره‌ای که ورودی دارد، اما خروجی ندارد، گره ۶ می‌باشد. با حذف آن گره و کمان‌های مربوط به آن، شبکه زیر حاصل می‌شود:



حال گره‌ای که ورودی دارد، اما خروجی ندارد، گره ۴ است؛ که عملیات فوق را بر روی آن انجام می‌دهیم. کار بر روی سایر گره‌ها را نیز به همین صورت ادامه می‌دهیم تا به آخرین گره موجود برسیم.

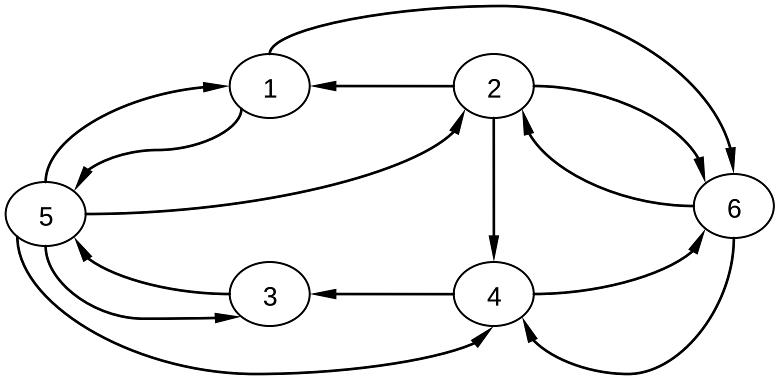
۳-۹-۲- شبکه‌های دارای حلقه

باید در نظر داشته باشیم که خود این شبکه‌ها نیز به دو دسته تقسیم می‌شوند:

1. حلقه با طول منفی
2. حلقه بدون طول منفی

افتادن در حلقه با طول منفی، تابع هدف را منفی‌تر می‌کند و به سمت $-\infty$ می‌برد. برای حل مسأله‌های دارای حلقه به روش برنامه‌ریزی پویا، به این صورت عمل می‌کنیم:

مرحله را برای این مسأله‌ها، حداکثر تعداد گره‌های واسطه در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال شبکه زیر را در نظر بگیرید:

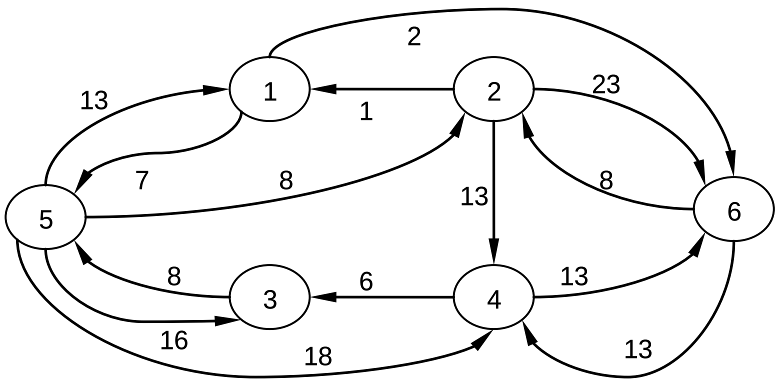


برای رفتن از گره ۱ به گره ۶ می‌توان مستقیما از ۱ به ۶ رفت و یا این که از ۱ به ۵ و از ۵ به ۴ و از ۴ به ۶ رفت. که در حالت دوم ۲ گره واسطه داریم.

یافتن کوتاه‌ترین مسیر یکی از مسأله‌های مهمی است که در شبکه‌ها مطرح می‌شود. هرگاه گره مقصد معلوم باشد، از حرکت پسرو و هرگاه گره مبدا معلوم باشد، از حرکت پیشرو استفاده می‌شود. با استفاده از یک مثال روش حل را توضیح می‌دهیم.

مثال ۱:

در شبکه زیر، با استفاده از حرکت پیشرو، طول کوتاهترین مسیر از گره ۱ به سایر گره‌ها را بیابید. طول کمان‌ها بر روی آنها نوشته شده است.



شبکه بالا، یک شبکه دارای حلقه است. با کنترل مسیر ۵-۱-۲-۵ این مورد مشخص می‌شود.

حرکت: پیشرو

مرحله: داشتن حداکثر n گره واسطه بین دو نقطه در مرحله nام

$V_n(j) =$ طول مسیر بهینه از گره ۱ به گره j مشروط بر این که حداکثر n گره واسطه داشته باشیم.
$d_{ij} =$ طول کمان از گره i به گره j

رابطه بازگشتی:

$$V_n(j) = \min_i \{d_{ij} + V_{n-1}(i)\} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

بنابراین به عنوان مثال $V_0(i)$ مقدار فاصله بدون گره واسطه بین گره ۱ و گره i را نشان می‌دهد و $V_1(i)$ مقدار فاصله بهینه بین گره ۱ و گره i را برای مسیرهایی با حداکثر یک واسطه نشان می‌دهد.

برای شروع کار، یک جدول از d_{ij}ها می‌نویسیم که در آن مبدا را با i و مقصد را با j نمایش می‌دهیم. در خانه‌هایی که کمانی وجود ندارد، باید مقدار ∞ را اختصاص داد.

سپس در سمت راست جدول یک ستون اضافه می‌کنیم و در آن $V_0(i)$ را می‌نویسیم که این مقدار فاصله بین گره ۱ تا گره i را با حداکثر ۰ گره واسطه نشان می‌دهد.

در مرحله بعد یک سطر جدید در پایین جدول برای $V_1(j)$ ایجاد می‌کنیم. این سطر، مقدار بهینه فاصله بین گره ۱ تا گره j را با حداکثر ۱ گره واسطه نشان می‌دهد. با توجه به رابطه بازگشتی، برای بدست آوردن مقدار هر یک از $V_1(j)$ ها، به ازای هر j کمترین مقدار حاصل جمع $V_0(i)$ و d_{ij} را به ازای تمام i ها به دست می‌آوریم که این مقدار نشان دهنده کمترین طول مسیر از گره ۱ به گره i و سپس به گره j است. در واقع در این مرحله $V_0(i)$ را به طور ستونی با ستون k ام جدول از - به جمع می‌کنیم و کمترین مقدار آن را $V_1(j)$ می‌نامیم. یعنی:

$$V_1(j) = \min_i \{V_0(i) + d_{ij}\}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} V_1(1) = \min_i \{V_0(i) + d_{i1}\} = 0 \\ V_1(2) = \min_i \{V_0(i) + d_{i2}\} = \min_i \{7+8\,,\,2+8\} = 10 \\ V_1(3) = \min_i \{V_0(i) + d_{i3}\} = \min_i \{16+7\} = 23 \\ V_1(4) = \min_i \{V_0(i) + d_{i4}\} = \min_i \{18+7, 13+2\} = 15 \\ V_1(5) = \min_i \{V_0(i) + d_{i5}\} = \min_i \{7+0, 0+7\} = 7 \\ V_1(6) = \min_i \{V_0(i) + d_{i6}\} = \min_i \{2+0, 0+2\} = 2 \end{array} \right.$$

در مرحله بعد $V_1(j)$ را به ستون $V_1(i)$ منتقل می‌کنیم و عملیات فوق را ادامه می‌دهیم تا جایی که جواب بهتر نشود.

d_{ij}		$j=1$	2	3	4	5	6	$V_0(i)$	$V_1(i)$	$V_2(i)$
i	1	0	∞	∞	∞	7	2	0	0	0
	2	1	0	∞	13	∞	23	∞	10	10
	3	∞	∞	0	∞	8	∞	∞	23	21
	4	∞	∞	6	0	∞	13	∞	15	15
	5	13	8	16	18	0	∞	7	7	7
	6	∞	8	∞	13	∞	0	2	2	2
$V_1(j)$		0	10	23	15	7	2			
$V_2(j)$		0	10	21	15	7	2			
$V_3(j)$		0	10	21	15	7	2			

پس از محاسبه $V_3(j)$ مشاهده می‌شود که بهبودی نسبت به $V_2(j)$ حاصل نشده است. نتیجه به دست آمده، با توجه به جدول عبارت است از:

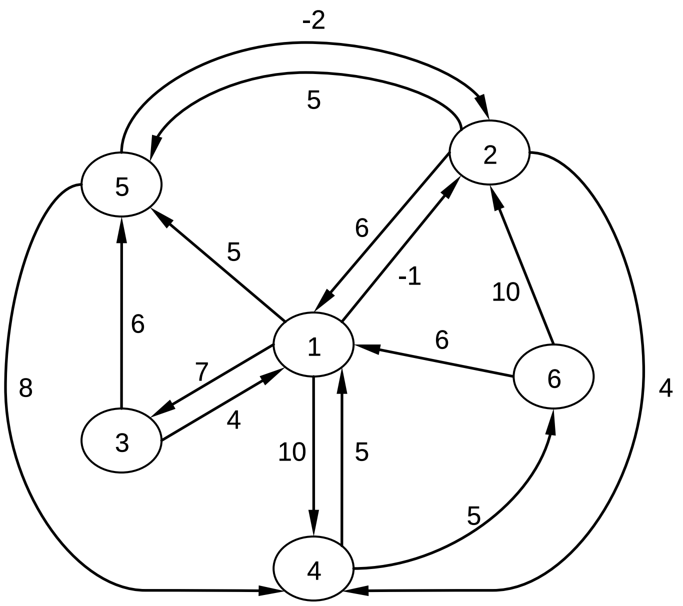
مسیر بهینه از گره ۱ به گره ۲ با طول ۱۰ است و به ترتیب از گره‌های ۱ و ۶ و ۲ عبور می‌کند.

مسیر بهینه از گره ۱ به گره ۳ با طول ۲۱ است و به ترتیب از گره‌های ۱ و ۶ و ۴ و ۳ عبور می‌کند.

و به همین ترتیب...

مثال ۲:

در شبکه زیر، با استفاده از حرکت پسرو، طول کوتاهترین مسیر از هر گره به گره ۳ را بیابید.



واضح است که این شبکه، یک شبکه دارای حلقه است. در تعیین مرحله برای این مسأله، گره‌هایی که به طور مستقیم با گره ۳ ارتباط دارند، در مرحله اول، گره‌هایی که حداکثر با یک گره واسطه با گره ۳ مرتبط هستند، در مرحله دوم و به طور کلی مسیرهایی که حداکثر با m گره واسطه دو گره را به هم مرتبط می‌کنند، در مرحله $m+1$ بررسی می‌شوند. به این ترتیب، اگر شبکه n گره داشته باشد، آخرین مرحله، مرحله $n-1$ ام خواهد بود که در آن $n-2$ گره واسطه خواهیم داشت. همچنین چون گره مقصد مشخص است، حرکت مناسب حرکت پسرو می‌باشد و برای یافتن مسیر بهینه، باید خروجی‌های هر گره مشخص شود.

حرکت: پسرو
مرحله: داشتن حداکثر n گره واسطه بین دو نقطه در مرحله nام
$U_n(i)=$ طول مسیر بهینه از گره i به گره ۳ مشروط بر این که حداکثر n گره واسطه داشته باشیم.
$d_{ij}=$ طول کمان از گره i به گره j

رابطه بازگشتی:

$$U_n(i)=\min_j\left\{d_{ij}+U_{n-1}(j)\right\}\quad,\quad \mathrm{n}=1,2,\ldots$$

مانند مثال قبل، برای استفاده راحت‌تر از فرمول، جدولی به شکل زیر رسم می‌کنیم. با این تفاوت که چون از حرکت پسرو استفاده می‌کنیم، باید برای شروع $U_0(j)$ را در یک سطر جدید در پایین جدول بنویسیم و $U_1(i)$ جدید را در یک ستون جدید در سمت راست جدول محاسبه کنیم. برای بررسی روش کار جدول زیر را مشاهده کنید:

d_{ij}		j=1	2	3	4	5	6	$U_1(i)$	$U_2(i)$	$U_3(i)$
i	1	0	–1	7	10	5	∞	7	7	7
	2	6	0	∞	4	5	∞	13	13	13
	3	4	∞	0	∞	6	∞	0	0	0
	4	5	∞	∞	0	∞	5	12	12	12
	5	∞	–2	∞	8	0	∞	∞	11	11
	6	6	10	∞	∞	∞	0	13	13	13
$U_0(j)$		7	∞	0	∞	∞	∞			
$U_1(j)$		7	13	0	12	∞	13			
$U_2(j)$		7	13	0	12	11	13			

وقتی دو ستون متوالی $U_j(i)$ و $U_{j+1}(i)$ به طور کامل برابر شدند، یعنی رابطه بازگشتی بهبودی ایجاد نکرده است و در صورتی که دوباره به کار رود، دوباره همان ستون را ایجاد می‌کند. بنابراین نیازی به ادامه دادن نیست و جواب به دست آمده بهینه است.

۳-۱۰- مسأله‌های احتمالی

تا اینجا ما تنها مسأله‌های قطعی را در نظر گرفتیم. اما وقتی که در یک مسأله برنامه‌ریزی پویا، پدیده‌ای غیرحتمی وجود داشته باشد، یک تصمیم مشخص برای یک حالت از مرحله‌ای از فرآیند، به تنهایی حالت سیستم را در مرحله بعد تعیین نمی‌کند.

در برنامه‌ریزی پویا تحت شرایط غیر حتمی، با فرض این که سیستم در حالت S_k مرحله k و تصمیم فعلی d_k باشد، یک حادثه احتمالی رخ می‌دهد که متغیر تصادفی $\tilde{E}_k$ نشانگر آن است.

به عنوان مثال در مسأله تولید، هنگامی که میزان تقاضا احتمالی است با دانستن موجودی در ابتدای ماه و مشخص شدن میزان تولید در آن ماه، میزان موجودی در ابتدای ماه بعد قطعی نیست. در مسأله‌های احتمالی، حالت، تصادفی است و ما یک شبکه با ساختار ثابت نداریم. در این گونه مسأله‌ها، هدف، بهینه‌سازی امید ریاضی مسیری است که باید طی شود. این بدین معنی است که اگر این برنامه بارها در شرایط ثابت تکرار شود، سیاست مشخص شده، در دراز مدت بهترین سیاست می‌باشد اما ممکن است در کوتاه مدت سیاست مناسبی نباشد.

در مسأله‌های احتمالی، نوع حرکت پسرو است. رابطه برگشتی مسأله‌های احتمالی به این صورت می‌باشد:

$$U_k\left(S_k\right)=\max_{\substack{d_k\in D_k \\ \tilde{S}_{k+1}=g\left(S_k,d_k,\tilde{E}_k\right)}} E\left[f_k\left(S_k,d_k,\tilde{E}_k\right)+U_{k+1}\left(\tilde{S}_{k+1}\right)\right]$$

مثال:

می‌خواهیم برای تولید یک کالای ویژه در دو دوره، برنامه‌ریزی نماییم. موجودی در ابتدای برنامه صفر است و تقاضا به صورت جدول زیر می‌باشد.

دوره 2		دوره 1	
احتمال	تعداد	احتمال	تعداد
0.6	0	0.25	0

هزینه تولید یک واحد از این کالا ۲۰ میلیون تومان است که می‌توان در هر دوره به تعداد لازم از آن تولید کرد. قیمت فروش هر واحد از این کالا در دوره اول ۳۰ میلیون تومان و در دوره دوم ۴۰ میلیون تومان می‌باشد. در پایان هر دوره به هر واحد موجود در انبار ۰/۵ میلیون تومان هزینه انبارداری تعلق می‌گیرد و پس از پایان دوره، هر واحد موجود به قیمت حراجی ۱۰ میلیون تومان به فروش می‌رسد. هدف تعیین سیاست بهینه تولید این کالا در این دو دوره است.

روش حل:

با توجه به این که در مسأله‌های احتمالی، حرکت مورد نظر حرکت پسرو می‌باشد، مسأله را حل می‌کنیم:

هر دوره تولید را یک مرحله و حالت S_k را مقدار کالای موجود در ابتدای دوره k در نظر می‌گیریم.

بنابراین S_3 مقدار کالایی است که در دوره دوم اضافه آمده و حراج می‌شود که حداکثر مقدار آن ۲ می‌باشد؛ زیرا حداکثر می‌توان ۱ واحد در دوره اول و ۱ واحد در دوره دوم تولید کرد. همچنین $\tilde{S}_3$ یک متغیر تصادفی است که تابعی است از:

$$\tilde{S}_3 = g\left(S_2, d_2, \tilde{E}_2\right)$$

اولین گام از حرکت پسرو را از مرحله سوم شروع می‌کنیم.

$k = 3$

S_3	$U\left(S_3\right)$
0	0
1	10
2	20

در مرحله دوم با توجه به این که حداکثر یک واحد از قبل تولید شده است، S_2 می‌تواند مقادیر 0 و 1 را بگیرد. در حالت $S_2 = 1$، از آنجا که تقاضا حداکثر یک واحد است، تولید باید مقدار 0 را بگیرد.

جدول مربوط به مرحله دوم به این شکل است:

$k = 2$

S_2		0			1	
d_2		0	1		0	
فروش	تعداد	0	0	1	0	1
	احتمال	1	0.6	0.4	0.6	0.4
S_3		0	1	0	1	0
هزینه	انبار	0	0.5	0	0.5	0
	تولید	0	20	20	0	0
درآمد	فروش	0	0	40	0	40
	$U_3(S_3)$	0	10	0	10	0
سود		0	−10.5	20	9.5	40
سود × احتمال		0	−6.3	8	5.7	16
امید						

در مرحله اول جدول زیر را رسم کرده و به این صورت پر می‌کنیم:

$k=1$

<table>
<tr><td colspan="2">S_1</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td colspan="2">d_1</td><td>0</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">فروش</td><td>تعداد</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>احتمال</td><td>1</td><td>0.25</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td colspan="2">S_2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">هزینه</td><td>انبار</td><td>0</td><td>0.5</td><td>0</td></tr>
<tr><td>تولید</td><td>0</td><td>20</td><td>20</td></tr>
<tr><td rowspan="2">درآمد</td><td>فروش</td><td>0</td><td>0</td><td>30</td></tr>
<tr><td>$U_2(S_2)$</td><td>1.7</td><td>21.7</td><td>1.7</td></tr>
<tr><td colspan="2">سود</td><td>1.7</td><td>1.2</td><td>11.7</td></tr>
<tr><td colspan="2">سود × احتمال</td><td>1.7</td><td>0.3</td><td>8.775</td></tr>
<tr><td colspan="2">امید ریاضی سود</td><td>1.7</td><td colspan="2">9.075</td></tr>
</table>

دقت کنید که در جدول‌های بالا، $U_k(S_k)$ برابر است با حداکثر امید ریاضی سود به ازای d_kهای مختلف برای هر S_k خاص و بر اساس آن می‌توانیم تصمیم بگیریم که در هر مرحله در یک حالت (S_k خاص، کدام تصمیم (d_k) را بگیریم تا امید ریاضی سود بیشتر شود.

نتیجه:

تصمیم بهینه به این صورت است که در مرحله اول که حالت صفر است یک واحد تولید کنیم. پس از طی دوره اول تقاضای این دوره معلوم می‌شود. اگر تقاضای دوره اول صفر بود، تصمیم بهینه برای دوره بعد، نداشتن تولید است و اگر کالای تولید شده در دوره اول به فروش رفت، در مرحله دوم تصمیم بهینه، تولید یک واحد است.

۳-۱۱- مسائل

1. مسئله احداث نیروگاه در جزوه را با استفاده از حرکت پیشرو حل نمایید.(در هر سال حداکثر ۳ نیروگاه می‌توان احداث نمود.)
2. فرض کنید شرکت برق برای تامین برق ۴ سال آتی باید نیروگاه‌هایی احداث کند با این شرط که هزینه مینیمم شده و تعداد آنها جوابگوی نیازمصرف کنندگان باشد. در ضمن اگر در سالی

نیروگاهی ایجاد نکنیم هزینه ثابتی وجود ندارد در غیر این صورت یک هزینه ثابت ۳ میلیون دلاری منظور می‌شود. با حرکت پیشرو سیاست بهینه را تعیین کنید.

سال	تقاضاي تجمعي در پايان سال	هزينه هر نيروگاه (ميليون دلار)
82	1	58
83	3	57
84	5	55

3. ۳ وانت توت فرنگی داریم و می‌خواهیم آنها را به ۳ فروشگاه تخصیص دهیم. چگونه وانت ها را بین ۳ فروشگاه توزیع کنیم تا حداکثر سود عاید شود. نوع حرکت پسرو باشد. مراحل، حالتها و رابطه بازگشتی را مشخص نمایید.

تعداد وانت	سود مورد انتظار فروشگاه 1	2	3
0	0	0	0
1	9	11	9
2	15	16	14
3	16	18	17

4. شرکتی ۳ پروژه در دست اجرا دارد. با توجه به منابع تخصیص یافته برای پروژه‌ها زمان‌های لازم برای آنها ۳۰، ۴۰ و ۳۶ هفته می‌باشد.مدیریت برای کاهش این زمان‌ها می‌خواهد ۴۰۰۰۰ دلار بودجه اضافی خرج نماید. زمان‌های جدید انجام پروژه‌ها بر حسب بودجه اضافی در جدول آمده است. این بودجه اضافی چگونه هزینه گردد تا بیشترین کاهش را در مجموع زمان پروژه ها سبب شود.(پیشرو)

زمان اجرا			بودجه اضافي
پروژه 3	پروژه 2	پروژه 1	
36	40	30	0
30	32	24	10
24	26	20	20
20	22	16	30
18	18	14	40

5. تقاضای کالایی در تیر و مرداد غیر قطعی و دارای توزیع زیر است. هر عدد از کالا به قیمت ۲۰۰۰ تومان در ماه‌های تیر و مرداد به فروش می‌رسد. لازم است که سفارش در ابتدای هر ماه صورت بگیرد تا در ابتدای همان ماه تحویل گردد. به هر واحد کالای موجود در انبار در آخر هر ماه ۲۰۰ تومان هزینه نگهداری تعلق می‌گیرد. موجودی اولیه صفر و موجودی اول شهریور هر عدد ۵۰۰ تومان به فروش خواهد رسید. قیمت خرید برابر ۱۰۰۰ ت برای هر واحد می‌باشد. مطلوب است تعیین سیاست بهینه.

مرداد			تیر		ماه
2	1	0	1	0	تعداد تقاضا
1	2	7	2	8	

6. می‌خواهیم برای تولید یک کالای ویژه در دو دوره برنامه‌ریزی کنیم. موجودی در ابتدای برنامه صفر است و تقاضا به صورت جدول زیر است. هزینه تولید یک واحد از این کالا ۳۰ میلیون تومان است که می‌توان به تعداد لازم در هر دوره یا دوره بعد ازآن تولید کرد. قیمت فروش هر واحد از این کالا در دوره اول ۴۰ میلیون تومان و در دوره دوم ۳۰ میلیون تومان می‌باشد. در پایان هر دوره به هر واحد موجود در انبار ۰/۵ میلیون تومان هزینه انبار داری تعلق می‌گیرد. پس از پایان دوره هر واحد به قیمت حراجی ۱۵ میلیون تومان به فروش می‌رسد. سیاست بهینه تولید چیست؟

دوره 1		دوره 2	
تعداد	احتمال	تعداد	احتمال
0	0/4	0	0/5

فصل چهارم - نظریه صف

دانشجویان پس از فراگیری مطالب این فصل می‌توانند:

1. اجزاء اصلی سه گانه یک سیستم صف را که عبارتند از جامعۀ مشتریان، خط انتظار و امکانات خدمت‌دهی را شناسایی نمایند.
2. انواع سیستمهای صف پایه را بشناسند.
3. پیش فرضهای مختلف را درک کنند.
4. ویژگیهای مختلف یک سیستم صف را تجزیه و تحلیل کنند.
5. بده بستان میان هزینه سرویس و هزینه انتظار را شرح دهند.

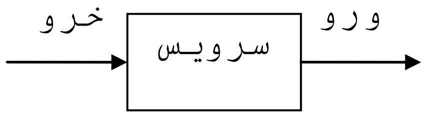
۴-۱- مقدمه

همه ما با تجربه ناخوشایند در صف ایستادن آشنا هستیم. متاسفانه، این پدیده روز به روز در زندگی شهرهای شلوغ خودنمایی بیشتری پیدا می‌کند. ما در اتومبیل‌های خود در راه‌بندان‌ها، در صف نان و در آرایشگاه‌ها منتظر می‌مانیم. ما برای انجام امور بانکی و امور دیگر انتظار می‌کشیم. نه ما به عنوان یک مشتری این انتظار را دوست داریم و نه مدیران تشکیلات مربوطه که نگران از دست دادن مشتری خود هستند. سوالی که مطرح میشود این است که، پس چرا صف وجود دارد؟ جواب نسبتا ساده است. علت این است که تقاضا برای کالا و خدمات در یک زمان معین، بیش از ظرفیت تولید و عرضه آن است. چرا چنین است؟ دلایل متعددی ممکن است وجود داشته باشد. برای مثال کمبود کالا و عرضه کننده خدمت و یا غیر اقتصادی بودن عرضه خدمت در سطحی که سبب حذف صف گردد و یا محدودیت جا و مکان و غیره.
معمولا با انجام سرمایه‌گذاری، محدودیت‌های فوق را می‌توان کاهش داد یا برطرف کرد. برای تعیین میزان تولید و یا عرضه خدمت، نیاز داریم پاسخ سؤالاتی از قبیل اینکه "چه مقدار یک مشتری باید در انتظار بماند؟" یا اینکه "چند نفر در صف خواهند بود؟" را بدانیم. نظریه صف تلاش می‌کند که پاسخ این سوالات را با انجام تجزیه و تحلیل ریاضی بیابد. در زندگی روزمره، منظور از کلمه صف همان مفهوم خط انتظار است. اما در نظریه صف، سیستم صف ممکن است سیستمی باشد که در آن هیچگاه صف به مفهوم روزمره آن وجود نداشته باشد. مثل سیستم صف مربوط به تعمیرکاری که به منازل و یا کارگاه‌ها برای تعمیر لوازم خانگی می‌رود.

۴-۲- توصیف مسأله صف

یک سیستم صف را می‌توان به این صورت توصیف کرد که مشتریان برای دریافت کالا و یا خدمت وارد می‌شوند، در صورت لزوم به انتظار می‌مانند و پس از انجام کار سیستم را ترک می‌کنند. هر سیستم صف

شامل ورودی، خروجی و مکان یا مکان‌هایی برای سرویس‌دهی می‌باشد. شکل زیر چنین سیستمی را نشان می‌دهد:



اگرچه هرگونه سیستم صف را می‌توان به صورت شکل فوق نشان داد، ولی آشکار است که برای نمایش دقیق به شناخت کامل صفات فرآیند مورد نظر نیاز است.

خصوصیات یک سیستم صف، به خصوصیات هر جزء آن باز می‌گردد. از جمله آنها خصوصیات ورودی است، مثلا اینکه آیا ورودی فردی است یا گروهی؟ یا اینکه نحوه سرویس‌دهی چگونه است؟ آیا به فرد سرویس داده می‌شود یا به یک گروه؟ توزیع زمان سرویس‌دهی چگونه می‌باشد؟ چند مرحله باید طی شود؟ آیا جامعه مورد مطالعه محدود است یا نه؟ و غیره.

معمولا برای معرفی نوع سیستم صف، از سه حرف با فرمت زیر استفاده می‌شود:

تعداد جایگاه‌های موازی و مستقل سرویس / الگوی سرویس / الگوی ورودی

سیستم صف مورد مطالعه در این فصل سیستم مارکوفی است. سیستم مارکوفی، سیستمی است بدون حافظه، یعنی احتمال حادثه ای که در زمان آینده اتفاق می‌افتد، با دانستن وضع کنونی به گذشته بستگی ندارد.

در بین توزیع‌های پیوسته، تنها توزیع نمایی است که خاصیت مارکوفی دارد. توزیع نمایی تجزیه و تحلیل سیستم‌های صف را آسان می‌کند. وقتی می‌گوییم سیستم صف، نمایی است، منظور این است که "زمان بین دو ورودی متوالی یک متغیر تصادفی دارای توزیع نمایی است و زمان سرویس نیز همینطور است. در این حالت سیستم به صورت .../M/M نشان داده می‌شود. (M=Markov)

۳-۴- چندمثال واقعی سیستم صف

برخی سیستمهای صف را در بخش تجارت و بازرگانی مشاهده میکنیم. بیشتر کار آن‌ها، خدمت شخص به شخص در یک مکان ثابت است؛ مثل آرایشگاه، باجه بانک، صندوق فروشگاه‌ها و سلف‌سرویس‌ها. ولی در بعضی از سیستم‌ها شخص با شخص درگیر نیست؛ مثل تعمیر لوازم خانگی و پمپ‌های بنزین. یک طبقه دیگر از سیستم‌های صف آن‌هایی هستند که مربوط به حمل و نقل می‌شوند. در بعضی از این سیستم‌ها، وسایل نقلیه، مشتری هستند؛ برای مثال: ماشین‌هایی که برای پرداخت عوارض بزرگراه در خط هستند یا منتظر چراغ سبز می‌باشند، یک کامیون (قطار یا کشتی) که منتظر بارگیری یا تخلیه است و هواپیماهایی که منتظر نشستن یا برخاستن هستند. برای برخی دیگر از سیستم‌ها، وسایل نقلیه به عنوان خدمت دهندگان می‌باشند؛ مثل تاکسی، ماشین آتش‌نشانی و آسانسور. یک مثال غیرمعمول، محوطه پارکینگ می‌باشد که در آن ماشین‌ها مشتری و فضای پارکینگ به عنوان خدمت دهنده عمل می‌کند و معمولا وقتی

پارکینگ جا ندارد، صفی تشکیل نمی‌شود. یک نوع دیگر از سیستم صف دستگاه‌های اجتماعی مثل دادگاه‌ها، مجالس قانونگذاری، سیستم بهداشت و درمان و غیره می‌باشند.

در سال‌های اخیر، نظریه صف برای حل مسأله‌های داخلی موسسات تولیدی، بسیار به کار رفته است. برای مثال سیستم جابه‌جایی مواد، سیستم نگهداری و تعمیرات و سیستم کنترل از آن جمله‌اند.

۴-۴- صفات سیستم صف

در این قسمت، شش صفت سیستم صف مورد بررسی قرار می‌گیرد:

1. الگوی ورودی‌ها
2. الگوی خدمت دهندگان
3. نظم صف
4. ظرفیت سیستم
5. تعداد مسیرهای خدمت‌دهی
6. تعداد مرحله‌های انجام کار

۴-۴-۱- الگوی ورودی‌ها

الگوی ورودی‌های یک سیستم صف غالبا به وسیله متوسط تعداد ورودی‌ها در یک واحد زمان و یا متوسط فاصله زمان بین دو ورودی متوالی اندازه‌گیری می‌شود. از آنجا که این اندازه‌ها با یکدیگر رابطه معکوس دارند، داشتن هر کدام از آنها دیگری را نیز مشخص می‌کند.

هنگامیکه جریان ورودی‌ها حتمی است و در واقع احتمالی نیست، الگوی ورودی‌ها به وسیله تعداد ورودی‌ها و یا فاصله زمان بین ورودی‌های متوالی کاملا مشخص می‌گردد. اما اگر جریان ورودی‌ها احتمالی یا تصادفی باشد، این متوسط کافی نیست و اطلاعات دیگری در مورد توزیع احتمال فرآیند ورودی‌ها لازم است.

عامل دیگری که باید به آن توجه کرد این است که ورودی ممکن است به صورت گروهی یا دسته‌ای باشد، نه فردی. در مورد ورودی گروهی علاوه بر این که زمان بین ورودی‌ها ممکن است احتمالی باشد، تعداد افراد گروه هم ممکن است تصادفی باشد، هم چنین دانستن عکس‌العمل ورودی‌ها هم لازم است. یک مشتری ممکن است که تصمیم بگیرد که بدون توجه به طول صف، به صف وارد شود و دیگری ممکن است به خاطر طولانی بودن نسبی صف، از ورود به آن خودداری کند؛ که در این صورت وی را مشتری "انصرافی" می‌گوییم.

اگر کسی وارد صف گردد و پس از مدتی انتظار در صف، از صف خارج شود وی را "بی‌قرار" می‌نامیم. در حالتی که چند خط موازی ارائه خدمات وجود دارد و کسی پس از مدتی انتظار، از خطی به خط دیگری برود، به وی "موقعیت طلب" می‌گوییم. این سه حالت نمونه‌هایی از یک سیستم صف با مشتریان "بی‌صبر" هستند.

نکته دیگری که باید درنظر داشت تغییر الگوی ورودی‌ها در اثر زمان است. الگوی ورودی‌ای که در اثر زمان تغییر نمی‌کند، "مانا" نامیده می‌شود و در غیر این صورت به آن "نامانا" می‌گوییم.

۴-۴-۲- الگوی خدمت دهندگان

بیشتر خصوصیات الگوی ورودی‌ها، در مورد الگوی خدمت دهندگان نیز صادق است. برای مثال، الگوی کارکنان را نیز به وسیله متوسط تعداد افرادی که کارشان در یک واحد زمان انجام می‌شود و یا متوسط زمان لازم برای انجام کارهای یک مشتری می‌توان توصیف کرد. اگر کسی در سیستم نبوده و جایگاه خدمت خالی باشد، می‌گوییم که سیستم "بی‌کار" است.

خدمت دهندگان ممکن است که در آن واحد به یک نفر و یا یک گروه خدمت کنند. قطار، اتوبوس، و هواپیما مثال‌هایی هستند از خدمت دهندگانی که در آن واحد به یک گروه خدمت می‌دهند.

خدمت‌دهی ممکن است به تعداد افراد منتظر در صف بستگی داشته باشد. زیرا بعضی ممکن است به خاطر وجود صف سریعتر کار کنند و بعضی به همان دلیل کندتر کار کنند. در صورتی که سرعت انجام کار به تعداد افراد در صف بستگی داشته باشد، خدمت را "وابسته به حالت" می‌نامیم. اگرچه این تعریف در مورد الگوی ورودی‌ها داده نشد، ولی در صورت وجود مشتریان بی‌صبر در سیستم این تعریف صادق است.

حتی اگر سرعت انجام کار بالا باشد، امکان دارد که برخی از مشتریان مجبور باشند که در صف به انتظار بمانند و لذا طول صف الگوی مخصوصی نخواهد داشت. مگر این که الگوی ورودی‌ها و خدمت دهندگان هر دو حتمی باشند. بنابراین توزیع احتمال طول صف نتیجه دو فرآیند جامع و مانع ورودی‌ها و خدمت دهندگان است.

همانند الگوی ورودی، الگوی خدمت نیز ممکن است مانا یا نامانا باشد.

نکته: دو عبارت "وابسته به حالت" و "نامانا" نباید با هم اشتباه شوند. الگوی "وابسته به حالت" ارتباطی با این که چه مدت سیستم در حال انجام کار است ندارد و فقط بستگی به این دارد که چند نفر در سیستم هستند. "نامانا" نیز به این که چند نفر در سیستم وجود دارد، ارتباطی ندارد و مفهوم آن این است که متوسط زمان ثابت نیست. البته یک صف ممکن است هم "وابسته به حالت" و هم "نامانا" باشد.

۴-۴-۳- نظم صف

منظور از نظم صف، نحوه انتخاب مشتری برای انجام کارش در زمان ایجاد صف است. نظم شایع در زندگی روزمره نظم نوبتی یا ترتیبی است که در آن افراد به ترتیب ورودشان برای انجام کار انتخاب می‌شوند. البته این نوع، تنها نوع نظم ممکن نمی‌باشد. نوع دیگری از انواع نظم صف عبارت است از انتخاب بر اساس نوبت معکوس یا ترتیب معکوس که در آن آخرین فرد صف، اولین کسی است که برای انجام کارش انتخاب می‌شود. این مورد در سیستم انبارداری اشیایی که فاسد و کهنه نمی‌شوند، به کار گرفته می‌شود.

انتخاب تصادفی و انتخاب براساس اولویت دو نظم دیگر انتخاب مشتری می‌باشند. انتخاب اولویتی دو گونه می‌باشد. در گونه اولی که آن را اولویت با حق انقطاع می‌نامند، هنگامی که یک مشتری با اولویت بالاتر وارد صف می‌شود و فردی با اولویت پایینتر در حال خدمت‌گیری است، خدمت‌دهندگان، کار وی را متوقف کرده و کار فرد با اولویت بالاتر را شروع می‌کنند و کار فردی که کارش نیمه تمام مانده، پس از انجام کار افراد با اولویت بالاتر، ادامه می‌یابد و یا این که به عنوان یک کار جدید تلقی می‌گردد. در گونه دوم که آن را اولویت بدون حق انقطاع می‌نامند، هنگامی‌که یک مشتری با اولویت بالاتر وارد صف می‌شود و فردی با اولویت پایینتر در حال خدمت‌گیری است، فرد با اولویت بالاتر تنها در اول صف قرار می‌گیرد و کار فرد با اولویت پایینتر ادامه می‌یابد.

اولویت‌ها به دو طبقه یا بیشتر می‌بایست تقسیم‌بندی گردند و چنانچه در هر طبقه‌ای، بیش از یک فرد وجود داشته باشد، نحوه انتخاب افراد می‌تواند به شکل هر یک از انواع تعریف شده در فوق باشد. به عنوان مثال پیام‌های نظامی را می‌توان به چهار دسته تقسیم کرد: عادی، با اولویت، فوری و اضطراری. اگر به مرکز مخابرات نظامی از یک دسته چند پیام ارسال شود، معمولا آنها را براساس نوبت دریافت می‌دارد و هنگامی‌که پیامی با اولویت بالاتر برسد، دریافت پیام با اولویت پایینتر را متوقف می‌کند. البته در عمل ممکن است که تنها ارسال پیام اضطراری سبب توقف دریافت پیام با اولویت پایینتر گردد و آن هم در صورتی که به پایان آن پیام نزدیک نباشد.

نکته: اگر نظم صف از نوع ترتیبی نباشد باید نوع آن به طور دقیق مشخص شود.

۴-۴-۴- ظرفیت سیستم

در برخی موارد به دلیل محدودیت جا و غیره، طول صف نمی‌تواند از حد معینی تجاوز کند و اگر طول صف به حد مزبور برسد، دیگر به کسی اجازه ورود به صف داده نمی‌شود تا این که کار کسی انجام شود و طول صف کوتاه‌تر گردد. این حالت را "صف محدود" می‌نامیم.

۴-۴-۵- تعداد مسیرهای خدمت‌دهی

تعداد مسیرهای خدمت‌دهی به تعداد مکانهای موازی انجام کار اطلاق می‌گردد که به طور هم زمان می‌توانند کار کنند.

۴-۴-۶- تعداد مرحله‌های انجام کار

آرایشگاه و نانوایی، مثال‌هایی از کارهای یک مرحله‌ای هستند و معاینه کامل که شامل تاریخچه بیماری‌ها، معاینه گوش و حلق و بینی و چشم، آزمایش خون و ادرار و آزمایش قلب و غیره است مثالی است از کارهای چند مرحله‌ای.

۴-۵- تعریف‌ها و علامت‌های مورد استفاده

بیشتر مدل‌هایی که در این فصل مورد بحث قرار می‌گیرند، این شرط را دارند که فاصله‌های زمانی بین ورودی‌ها، از هم مستقل‌اند و توزیع یکسانی دارند. به همین ترتیب، زمان انجام کارها از هم مستقل‌اند و توزیع یکسانی را دارا می‌باشند. این مدل‌ها حداقل با سه نماد زیر مشخص می‌شوند:

تعداد مسیرهای خدمت‌دهی / توزیع زمان انجام خدمت / توزیع زمان بین ورودی‌ها

برخی نمادهای توزیع عبارتند از:

M توزیع نمایی

D توزیع با زمان ثابت

E_k توزیع ارلنگ k که در آن k عبارتست از پارامتر شکل

G توزیع عمومی

مثلا مدل M/M/S نشان می‌دهد که توزیع فاصله زمان بین ورودی‌های متوالی و زمان انجام کار هر دو نمایی هستند و تعداد مسیرهای خدمت‌دهی یعنی تعداد خدمت دهندگان S است که می‌تواند هر عدد صحیح مثبتی باشد. و مدل M/G/1 نشان می‌دهد که توزیع فاصله زمان ورودی‌های متوالی نمایی و توزیع انجام کار عمومی است و تنها یک نفر خدمت‌دهنده وجود دارد.

۴-۵-۱- نقش توزیع نمایی

همانطور که گفته شد، الگوهای ورود و خدمت سیستم‌های صف به وسیله دو توزیع احتمالی یکی توزیع زمان بین ورودی‌های متوالی و دیگری زمان انجام کار مشخص می‌شود. در صف‌های واقعی این توزیع‌ها ممکن است از هر نوعی باشند. تنها محدودیت این است که مقادیر منفی نمی‌توانند پیش بیایند. اما برای ساختن مدل مربوط، لازم است که نوع توزیع زمان بین ورودی‌ها و زمان انجام کار مشخص شود. این مدل‌ها می‌بایست واقعیت را نشان دهند و در ضمن آنقدر ساده باشند که بتوان آنها را تجزیه و تحلیل ریاضی کرد. با توجه به نکات فوق در نظریه صف توزیع نمایی، مهمترین توزیع مورد استفاده می‌باشد.

فرض کنید که متغیر تصادفی T زمان بین ورودی‌ها و یا زمان انجام کار را نشان دهد. به عمل وارد شدن یک فرد به سیستم و پایان کار یک فرد یک اتفاق می‌گوییم. اگر تابع توزیع تجمعی برای T ، به صورت زیر باشد، آن را توزیع نمایی گوییم:

Exponential

Deterministic

Erlang

General

$$P\{T \le t\} = 1 - e^{-\alpha t}$$
$$P\{T > t\} = e^{-\alpha t}$$

و میانگین و واریانس آن برابر است با:

$$E(T) = \frac{1}{\alpha}$$
$$Var(T) = E(T - E(T))^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

اگر یک توزیع نمایی باشد، چه نتایجی را می‌توان انتظارداشت؟ در ادامه بحث، برای جواب به این سوال، ۵ خاصیت توزیع نمایی را بررسی خواهیم کرد.

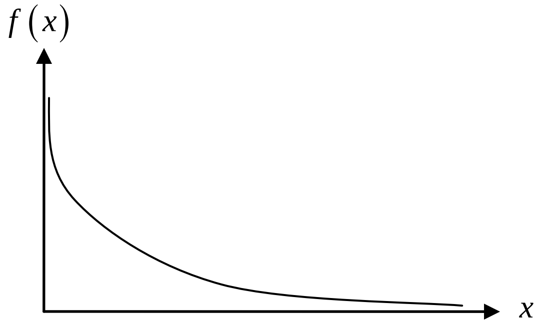
۴-۵-۲- مرور توزیع‌های نمایی،پواسون و خواص و روابط آن‌ها

1. توزیع نمایی یک توزیع کاهشی است.

$$f_T(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & t \ge 0, \alpha > 0 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

$$P\left(0 \le T \le \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha}\right) = 0.393 = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$
$$P\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha} \le T \le \frac{3}{2}\frac{1}{\alpha}\right) = 0.383 = \left(1 - e^{-\frac{3}{2}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$P\left(\frac{3}{2}\frac{1}{\alpha} \le T\right) = 0.224$$

شکل نمودار توزیع نمایی، به شکل زیر است:



بنابراین اگر T متغیری تصادفی با توزیع نمایی باشد، بیشترین اتفاق‌ها در فاصله کمی از مبدا روی می‌دهد.

Cumulative

2. خاصیت عدم حافظه برای توزیع نمایی صادق است؛ یعنی آنچه که قرار است در آینده اتفاق بیافتد، با دانستن وضعیت فعلی به آنچه در گذشته اتفاق افتاده بستگی ندارد.

$$
\begin{aligned}
&P\left(T>t+\Delta t \mid T>\Delta t\right)=P\left(T>t\right)\\
&\frac{P\left(T>t+\Delta t \text{ and } T>\Delta t\right)}{P\left(T>\Delta t\right)}=\frac{P\left(T>t+\Delta t\right)}{P\left(T>\Delta t\right)}\\
&=\frac{e^{-\alpha(t+\Delta t)}}{e^{-\alpha\Delta t}}=e^{-\alpha t}=P\left(T>t\right)
\end{aligned}
$$

3. تعدادی متغیر تصادفی مستقل که هریک دارای توزیع نمایی مربوط به خود باشند، را در نظر بگیرید؛ حداقل این متغیرهای تصادفی خود متغیری تصادفی با توزیع نمایی است و پارامتر آن مجموع پارامترهای متغیرهای $T_n,...,T_1$ می‌باشد.

$$
\begin{aligned}
&U=\min\left(\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2,\ldots,T_n\right)\\
&\Rightarrow U\sim\exp\left(\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{\mathrm{i}}\right)
\end{aligned}
$$

T_i: متغیر تصادفی مستقل با توزیع نمایی و پارامتر α_i

$$
\begin{aligned}
P\left(U>t\right)&=P\left(T_1>t\,\&\,T_2>t\,\&\ldots T_n>t\right)\\
&=P\left(T_1>t\right)P\left(T_2>t\right)\ldots P\left(T_n>t\right)\\
&=e^{-\alpha_1 t}e^{-\alpha_2 t}\ldots e^{-\alpha_n t}=e^{-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)t}=e^{-\alpha t}
\end{aligned}
$$

برای مثال اگر چند ایستگاه با زمان سرویس‌دهی نمایی داشته باشیم، زمان سرویس اولین مشتری‌ای که خارج می‌شود، برابر حداقل زمان سرویس جایگاه‌های مشغول است.

4. هرگاه زمان بین دو ورود متوالی دارای توزیع نمایی باشد، تعداد ورودی‌ها در یک فاصله زمانی مشخص دارای توزیع پواسون است.

$$
P\left(N\left[\Delta t,\Delta t+t\right]=n\right)=\frac{e^{-\alpha t}\left(\alpha t\right)^n}{n!}
$$

$$
\Leftrightarrow\ f_T\left(t\right)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha t} & \mathrm{t}\geq 0\\ 0 & \text{Otherwise}\end{cases}\qquad \mathrm{P}\left(T>t\right)=e^{-\alpha t}
$$

5. احتمال این که در یک فاصله زمانی کوچک Δt اتفاقی رخ دهد، به طور تقریبی برابر است با $\alpha\Delta t$

$$P\left(0\le T\le \Delta t\right)=P\left(t\le T\le t+\Delta t\right)\approx \alpha\Delta t$$

چون:

$$\mathrm{P}\left(0\le T\le \Delta t\right)=1-e^{-\alpha\Delta t}$$

$$e^{-\alpha\Delta t}=1-\alpha\Delta t+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(-\alpha\Delta t\right)^n}{n!}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(-\alpha\Delta t\right)^n}{n!}\to 0$$

۴-۵-۳- برخی پیش فرض‌ها در تجزیه و تحلیل سیستم‌های صف

1. جامعه نامحدود است.
2. هر مشتری که مراجعه می‌کند، وارد می‌شود. (پشیمان نشود.)
3. سیستم ظرفیتی نامحدود دارد.
4. مشتری‌ها به ترتیب ورود سرویس دریافت می‌کنند.
5. اگر $S>1$ باشد، یعنی تعداد مسیرهای خدمت‌دهی بیشتر از یک باشد، همه مشتری‌ها یک نوع سرویس را دریافت می‌کنند و همه جایگاههای سرویس یک نوع سرویس ارائه می‌کنند.

۴-۵-۴- علامت‌های قراردادی

در این بخش سعی می‌کنیم، علامت‌ها و متغیرهای قراردادی، که برای فرموله کردن و حل مسأله‌های نظریه صف به کار می‌رود را معرفی کنیم:

$N(t)$: تعداد مشتریان موجود در سیستم در زمان $t\ge 0$

$P_n(t)$: احتمال این که در لحظه t حالت سیستم، یعنی مجموع تعداد مشتریان

نکته ۱: وقتی احتمال به زمان وابسته نباشد، $P_n(t)$ با P_n و $N(t)$ با N نشان داده می‌شود. این گونه سیستم‌ها به ثبات رسیده‌اند و پایا نام دارند.

از آنجا که تجزیه و تحلیل حالت‌های انتقالی یا ناپایا مشکل تر است، در نظریه صف بیشتر کارها روی حالت پایای سیستم متمرکز شده است.

S : تعداد کانال‌هاي موازي انجام کار

λ_n : متوسط نرخ ورودي سيستم در واحد زمان مشروط به اين که n مشتري در سيستم وجود داشته باشد.

μ_n : متوسط نرخ انجام کار در يك واحد زمان مشروط بر اين که n فرد در سيستم باشد. توجه شود که μ_n نرخ تمام خدمتدهندگان و برابر با مجموع

نکته ۲: اگر λ_n و μ_n به n بستگی نداشته باشد، آنها را بدون n به کار می‌بریم. یعنی:

λ : نرخ ورودي هنگامي که $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n$

μ : نرخ انجام کار هنگامي که

نکته ۳: اگر جایگاه سرویس‌دهی خالی باشد، $\mu = 0$ است.

$\frac{1}{\lambda}$: ميانگين فاصله زماني بين دو ورودي متوالي

$\frac{1}{\mu}$: ميانگين زمان خدمت يك مشتري

ρ : ضريب اشتغال سيستم يا احتمال مشغول بودن تمام مسيرهاي خدمت

نکته ۴: در مواقعی که μ, λ به n وابسته نباشند، داریم:

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

Steady

۴-۶- روابط Little

تعاریف زیر را در نظر بگیرید:

L: متوسط تعداد مشتری‌های موجود در سیستم[۱]

L_q: متوسط تعداد مشتری‌های موجود در خط انتظار سیستم

W: میانگین زمان انتظار یک مشتری در سیستم از لحظه ورود تا لحظه خروج[۲]

W_q: میانگین زمان انتظار یک مشتری در خط انتظار سیستم از لحظه ورود تا لحظه شروع سرویس

روابط Little ارتباط بین L و W و L_q و W_q را در یک سیستم پایا نشان می‌دهند:

$$\begin{cases} L = \lambda W & \text{(I)} \\ L_q = \lambda W_q & \text{(II)} \\ W = W_q + \dfrac{1}{\mu} & \text{(III)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = \lambda\left(W_q + \frac{1}{\mu}\right) \Rightarrow L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{(IV)}$$

رابطه آخر از ترکیب روابط دیگر به دست آمده است. به طور خلاصه روابط زیر را روابط Little می‌نامیم:

$$\begin{array}{|l} L = \lambda W \\ L_q = \lambda W_q \\ W = W_q + \dfrac{1}{\mu} \\ L = L_q + \dfrac{\lambda}{\mu} \end{array}$$

روابط Little خیلی مهم هستند؛ از این نظر که اگر هر یک از مقادیر L، L_q، W و یا W_q را بدانیم، با استفاده از این روابط می‌توانیم بقیه را محاسبه کنیم. به علاوه اکثر اوقات محاسبه برخی از این مقادیر، ساده‌تر از بقیه است.

---

[۱] Line

[۲] Waiting

۴-۷- فرآیند

تعریف ریاضی فرآیند عبارتست از مجموعه یک سری از اعداد؛ مثلا $X(t)$. به عنوان مثال اگر t، دفعات پرتاب یک تاس باشد، x_t به طور تصادفی مقادیر ۱ تا ۶ را به خود اختصاص می‌دهد و یا اگر t زمان باشد، x_t می‌تواند دمای هوا در زمان t باشد.

اندیس t در فرآیند می‌تواند به یکی از دو صورت زیر باشد:

1. پیوسته مثل زمان.
2. گسسته مثل ساعت ۱۶ هر شنبه.

x_t نیز می‌تواند به دو صورت باشد:

1. پیوسته مثل دما.
2. گسسته مثل موجودی یخچال یا تعداد مشتری در سیستم.

پس در مجموع چهار حالت برای ترکیب گسسته و پیوسته t و x_t داریم. وقتی x_t گسسته است، به جای کلمه فرآیند از کلمه زنجیره یا زنجیر استفاده می‌کنیم. فرآیندها ممکن است برحسب تعریف در سه دسته قرار گیرند:

1. یک فرآیند ممکن است یک فرآیند تولد تنها (زاد) باشد؛ مثل قرار گرفتن ویروس‌ها و باکتری‌ها در یک محیط و تکثیر آن‌ها. البته این تولد تا یک جای مشخص می‌تواند ادامه یابد، مثلا تا پر شدن آن مکان.
2. یک فرآیند ممکن است یک فرآیند مرگ تنها (میر) باشد؛ مثل وارد شدن سمی در یک محیط و مرگ تدریجی باکتری‌ها و یا حیواناتی که نسل آنها در حال انقراض است.
3. بیشتر فرآیندها، فرآیندهای زاد و میر هستند، یعنی معمولا هم تولد داریم و هم مرگ.

۴-۷-۱- فرآیند مارکوف

فرآیندی که در آن x_{n+1} با داشتن مقادیر x_0 تا x_n فقط به x_n وابسته باشد، یعنی خاصیت عدم حافظه داشته باشد، فرآیند مارکوف نام دارد. یعنی:

$$P\left\{x(t_{n+1})=i_{n+1}\,\middle|\,x(t_0)=i_0,x(t_1)=i_1,\dots,x(t_{n-1})=i_{n-1},x(t_n)=i_n\right\}=$$
$$P\left\{x(t_{n+1})=i_{n+1}\,\middle|\,x(t_n)=i_n\right\}$$

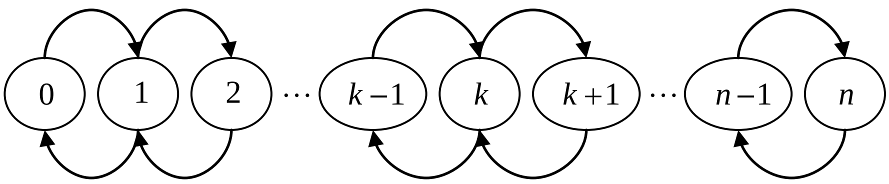
۴-۷-۲- فرآیند زاد و میر[۲۶]

Birth and Death Process [۲۶]

در یک سیستم صف ورود مشتری به مفهوم زاد و خروج مشتری به مفهوم میر است. در نظریه صف برای داشتن یک فرآیند زاد و میر سه ویژگی لازم است و نمی‌توان به هر فرآیند که مرگ و تولد داشت، یک فرآیند زاد و میر گفت. این سه ویژگی عبارتند از:

1. زمان باقیمانده تا ورود بعدی دارای توزیع نمایی باشد.
2. زمان باقیمانده تا خروج بعدی دارای توزیع نمایی باشد؛ مشروط بر این که سیستم تهی نباشد.
3. در یک Δt بسیار کوچک حداکثر یک اتفاق بتواند رخ دهد. (ورود یک مشتری یا خروج آن)

فرض کنید یک فرآیند زاد و میر (سیستمی‌با ورود و خروج) داشته‌باشیم. می‌خواهیم این سیستم را در یک Δt بسیار کوچک تجزیه و تحلیل کنیم. یک فرآیند زاد و میر گسسته که مقادیر ۰ و ۱ و ... را به خود می‌گیرد، را در نظر بگیرید. حالت‌هایی که سیستم می‌تواند به خود بگیرد، عبارتند از:



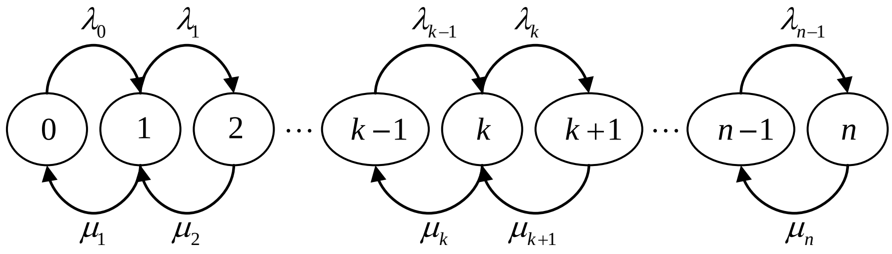
شکل نرخ

به نمودار فوق شکل نرخ گفته می‌شود.

چون در یک Δt بسیار کوچک تنها یک ورود یا یک خروج داریم، پس تغییرات حالت‌ها فقط به صورت بالا میسر است. همچنین:

- قدرمطلق اختلاف تعداد دفعاتی که وارد یک حالت می‌شویم با تعداد دفعاتی که از آن حالت خارج می‌شویم، حداکثر برابر یک است. یعنی در بعضی موارد این دو مقدار مساوی و در برخی موارد یکی از آنها به اندازه یک واحد از دیگری بزرگتر است.
- میانگین تعداد دفعاتی که وارد یک حالت می‌شویم، برابر است با میانگین دفعاتی که از آن خارج می‌شویم. این اصل را اصل تعادل گویند.

Rate Diagram



طبق اصل تعادل برای $k=0,1,2,\ldots$ میانگین نرخ خروج از حالت k با میانگین نرخ ورود به حالت k برابر است. بنابراین اگر P_k برابر احتمال این باشد که در حالت k باشیم، داریم:

$$\begin{cases} \mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0 \\ \mu_2 P_2 + \lambda_0 P_0 = \left(\mu_1 + \lambda_1\right) P_1 \\ \vdots \\ \mu_{k+1} P_{k+1} + \lambda_{k-1} P_{k-1} = \left(\mu_k + \lambda_k\right) P_k \\ \vdots \end{cases}$$

پس یک سیستم با تعداد معادلات نامحدود داریم و نیز باتوجه به تعداد مجهولات که همواره یکی بیشتر از تعداد معادلات است، بی‌نهایت جواب داریم. پس می‌توان یکی از مجهولات را انتخاب کرد و بقیه را براساس آن به دست آورد و در آخر از رابطه $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ آن مجهول را به دست آورد:

$$\begin{cases} if \quad \dfrac{\lambda_0}{\mu_1} = c_1, \quad \mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0 \Rightarrow \mathrm{P}_1 = \dfrac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 = c_1\, P_0 \\ if \quad \dfrac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} = c_2\,, \quad \mu_2 P_2 + \lambda_0 P_0 = \left(\mu_1 + \lambda_1\right) \mathrm{P}_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow P_2 = \dfrac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} P_0 = c_2\, P_0 \\ \vdots \\ \ldots \qquad \mathrm{P}_{\mathrm{k}+1} = \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_k}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{k+1}} P_0 = c_{\mathrm{k}+1} P_0 \end{cases}$$

با فرض $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ و $c_0 = 1$ داریم:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k P_0 = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} C_k}$$

در روابط فوق برای این که P_0 دارای مقدار باشد، باید مقدار $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ محدود باشد و برای این منظور باید مقدار C_k وقتی که $k \to \infty$ برابر صفر باشد.

شرط لازم و کافی برای همگرایی سری این است که:

$$\lim_{k \to \infty} C_k = \frac{\lambda_0 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \ldots \mu_k} = 0$$

اگر $P_0 = 0$ شود همه P_nها صفر می‌شوند. یعنی سیستم به هیچ حالتی بازگشت ندارد و اگر وضعیت سیستم از یک حالت گذشت، دیگر با گذشت زمان به آن حالت برنمی‌گردد. در این حالت می‌گوییم سیستم ناپایدار است.

اگر $P_0 > 0$ باشد، سیستم پایدار است و ما می‌توانیم پس از محاسبه P_nها، L یا L_q را محاسبه کنیم و آنگاه با استفاده ازروابط Little بقیه پارامترها نیز به دست می‌آیند:

N تعداد مشتری‌های سیستم
N_q تعداد مشتری‌های در صف

$$E(N) = L \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = L$$

$$E(N_q) = L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) P_n$$

$$L = \lambda W \quad , \quad \lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$$

$$L_q = \lambda W_q$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \quad , \quad \mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n P_n$$

روابط فوق برای هر فرآیند زاد و میر پایا، صادق است.

۴-۷-۳- یک روش دیگر برای به دست آوردن معادلات تعادل

تعاریف زیر را در نظر بگیرید:

$P_n(t)$: احتمال این که درلحظه t حالت n باشد.

$P_n(t+\Delta t)$: احتمال این که در لحظه $t+\Delta t$ حالت n باشد.

$\lambda_n \Delta t$: احتمال این که پس از گذشت زمان

احتمال این که در لحظه $t+\Delta t$ حالت سیستم n باشد را برابر مجموع سه احتمال زیر قرار می‌دهیم.

1. احتمال این که در لحظه t حالت n باشد و پس از گذشت زمان Δt، ورود و خروج نداشته باشیم.
2. احتمال این که در لحظه t حالت $n+1$ باشد و پس از گذشت زمان Δt، ورود نداشته و یک خروج داشته باشیم.
3. احتمال این که در لحظه t حالت $n-1$ باشد و پس از گذشت زمان Δt، یک ورود داشته و خروج نداشته باشیم.

$$\begin{aligned}
\underset{n=1,2,\ldots}{P_n(t+\Delta t)} = {} & P_n(t)(1-\lambda_n\Delta t)(1-\mu_n\Delta t) \\
& +P_{n+1}(t)(1-\lambda_{n+1}\Delta t)(\mu_{n+1}\Delta t) \\
& +P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}\Delta t)(1-\mu_{n-1}\Delta t) \\
& +O(\Delta t)
\end{aligned}$$

احتمال خارج نشدن هنگامی‌که هیچ فردی داخل سیستم نیست برابر با یک می‌باشد. بنابراین:

$$\begin{aligned}
P_0(t+\Delta t) = {} & P_0(t)(1-\lambda_0\Delta t)\times 1 \\
& +P_1(t)(1-\lambda_1\Delta t)\mu_1\Delta t \\
& +O(\Delta t)
\end{aligned}$$

با در نظر گرفتن دو رابطه بالا داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = {} & -(\lambda_n+\mu_n)P_n(t) \\
& +P_{n+1}(t)\mu_{n+1} \\
& +P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}+\frac{O(\Delta t)}{\Delta t}
\end{aligned}$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = -(\lambda_0)P_0(t)+P_1(t)\mu_1\frac{O(\Delta t)}{\Delta t}$$

از طرفین روابط فوق هنگامی‌که $\Delta t \to 0$، حد می‌گیریم:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}=P_n'(t)$$
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=P_0'(t)$$

اگر بخواهیم سیستم حالتی پایدار داشته باشد، باید این حدود به سمت صفر میل کند. یعنی:

$P_0'(t)\to 0$ و $P_n'(t)\to 0$

بدین معنی که روابط فوق به t وابسته نباشند. بنابراین:

$$-\lambda_0 P_0(t)+\mu_1 P_1(t)=0$$
$$-(\lambda_n+\mu_n)P_n(t)+P_{n+1}(t)\mu_{n+1}+P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}=0 \quad , \quad n=1,2,\ldots$$

یا:

$$\lambda_0 P_0=\mu_1 P_1$$
$$(\lambda_n+\mu_n)P_n=P_{n+1}\mu_{n+1}+P_{n-1}\lambda_{n-1}, \quad n=1,2,\ldots$$

۴-۸- انواع مدل‌ها

۴-۸-۱- مدل M/M/1

یکی ازمدل‌های سیستم صف، مدل M/M/1 است و یکی از حالت‌های خاص آن این است که λ و μ برای حالت‌های مختلف سیستم تغییر نکنند؛ یعنی وابسته به حالت نباشند:

$$P_1=\frac{\lambda}{\mu}P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \overset{\rho=\frac{\lambda}{\mu}}{\Rightarrow} P_n=\rho^n P_0$$
$$P_0=\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}C_n}=\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n}=\frac{1}{\frac{1}{1-\rho}}=1-\rho$$

بنابراین، برای این مدل شرط همگرایی، $|\rho|<1$ است.

$$P_n = (1-\rho)\rho^n \quad , \quad n = 1,2,\ldots$$

برای سیستم M/M/1 داریم:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\rho \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1}$$
$$= \rho(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{d\rho}\rho^n = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\right)$$
$$= \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = \frac{\rho(1-\rho)}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}$$
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$
$$L = \lambda W \Rightarrow W = \frac{1}{\mu-\lambda}$$
$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \Rightarrow W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$
$$L_q = \lambda W_q \Rightarrow L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

مثال ۱:

در یک سیستم صف M/M/1، نرخ ورود ۵ مشتری در ساعت می‌باشد ($\lambda = 5$) و در هر ساعت به طور متوسط ۱۰ مشتری سرویس داده می‌شود. ($\mu = 10$) می‌خواهیم ببینیم به طور متوسط، چند مشتری در کل سیستم و چند مشتری در خط انتظار وجود دارد و زمان متوسط، از لحظه ورود تا خروج و زمان متوسط، از لحظه ورود تا زمان شروع سرویس چقدر است؟ این مقادیر را برای سه حالت دیگر به ازای ۸ مشتری در ساعت، ۹ مشتری در ساعت و ۹/۹ مشتری در ساعت به دست آورید.

حل:

برای حالت اول داریم:

$$\lambda = 5 \ , \ \mu = 10$$
$$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \Rightarrow L = \frac{5}{10-5} = 1$$

یعنی به طور متوسط، یک مشتری در سیستم وجود دارد.

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} \Rightarrow W = \frac{1}{10-5} = \frac{1}{5}$$

یعنی متوسط زمانی که مشتری درسیستم می‌ماند برابر است با ۰/۲۰ ساعت یا ۱۲ دقیقه.

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{5}{5\times 10} = \frac{1}{10}$$

یعنی متوسط زمانی که مشتری درخط انتظار می‌ماند، از لحظه ورود تا لحظه شروع سرویس ، برابر است با ۰/۱۰ ساعت یا ۶ دقیقه. همچنین متوسط تعداد افراد منتظر در خط انتظار و احتمال تهی بودن سیستم که به معنای خالی بودن جایگاه سرویس و بیکار بودن سرویس‌دهنده نیز هست، به این ترتیب به دست می‌آید:

$$L_q = \lambda W_q \Rightarrow L_q = 5\times\frac{1}{10} = \frac{1}{2}$$

$$P_0 = \rho^0(1-\rho) = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) = 1-\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

برای حالت دوم:

$$\mu = 10\ ,\lambda = 8 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} L = \dfrac{8}{10-8} = 4 \\ W = \dfrac{1}{10-8} = \dfrac{1}{2} \\ \rho = \dfrac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \rho = \dfrac{8}{10} = 0.8 \\ W_q = \dfrac{8}{20} = 0.4 \\ L_q = 3.2 \\ P_0 = 0.2 \end{array} \right.$$

برای حالت سوم:

$$\mu = 10 \quad , \quad \lambda = 9 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \rho = 0.9 \quad , \quad L = 9 \quad , \quad W = 1 \\ \mathrm{W_q} = 0.9 \quad , \quad L_q = 8.1 \quad , \quad P_0 = 0.1 \end{array} \right.$$

و برای حالت چهارم:

$$\mu = 10 \quad , \quad \lambda = 9.9 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \rho = 0.99 \quad , \quad L = 99 \quad , \quad W = 10 \\ \mathrm{W_q} = 9.9 \quad , \quad L_q = (9.9)^2 \quad , \quad P_0 = 0.01 \end{array} \right.$$

با توجه به حالت‌های بالا مشاهده می‌شود که هرچه λ به μ نزدیکتر می‌شود، پارامترها بزرگتر شده و P_0 کوچکتر می‌شود. توجه کنید که برای پایدار بودن سیستم لازم استّ که $\rho < 1$ باشد.

۴-۸-۱-۱- اصل (قانون) احتمال کل

اگر اتفاقات $E_1, E_2 ... , E_n$ جامع و دو به دو ناسازگار باشند یعنی:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = P(U) = 1 \quad and \quad E_i \cap E_j = \varnothing$$

$$\text{for } i \neq j, \text{ with } p(E_i) > 0 \text{ for all } i.$$

آنگاه برای اتفاق A داریم:

$$P(A) = P(A \cap U) = P\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A | E_i) \mathrm{P}(E_i)$$

۴-۸-۱-۱- توزیع زمان انتظار یک مشتری در سیستم M/M/1

تعاریف زیر را در نظر می‌گیریم:

T_n : زمان انتظار يك مشتري در سيستم مشروط بر اين كه در لحظه ورودش n مشتري در سيستم وجود داشته باشد.

E_{n+1} : توزيع ارلنگ با پارامتر $n+1$

τ : زمان انتظار يك مشتري در سيستم.

$f(t)$: توزيع زمان انتظار يك مشتري در

به محض ورود مشتری جدید، فردی که در جایگاه سرویس است، به دلیل خاصیت مارکوفی، گویی تازه وارد جایگاه سرویس شده است. زمان سرویس مشتری را با S_1 نشان می‌دهیم. به محض تمام شدن سرویس این مشتری، نفر اول صف وارد جایگاه سرویس شده و زمان سرویس آن S_2 می‌شود و ...

این متغیرها $S_1, S_2 ... , S_{n+1}$ همگی دارای توزیع نمایی یکسان بوده و مستقلند.

$$T_n = S_1 + S_2 + ... + S_n + S_{n+1}$$

S_nها متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع نمائی یکسان یا IID هستند.

Independent Identical Distribution

داریم:

$$T_n \sim E_{n+1}$$

برای توزیع ارلنگ داریم:

$$f_{T_n}(t) = \frac{\mu(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}$$

و بنابراین:

$$f_\tau(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t} \times (1-\rho)\rho^n$$

$$f_\tau(t) = (\mu-\lambda)e^{-\mu t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = (\mu-\lambda)e^{-\mu t}e^{\lambda t} = (\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}$$

همانطور که در اینجا می‌بینیم و از قبل نیز می‌دانستیم، میانگین زمان انتظار یک مشتری در سیستم برابر است با $\frac{1}{\mu-\lambda}$.

مثال:

احتمال این که زمان انتظار یک مشتری کمتر از ۱۰ دقیقه باشد را به دست آورید.

$$P_r = \int_0^{\frac{10}{60}} (\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t} dt$$

زمان انتظار یک مشتری در صف برابر است با مجموع زمان سرویس n مشتری وقتی حالت سیستم n باشد و به طور مشابه مانند عملیات بالا عمل می‌شود:

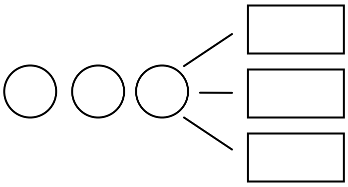
$$f_{\tau_q}(t_q) = \rho(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t_q}$$

۴-۸-۲- مدل M/M/S

خصوصیات این مدل M/M/S به این ترتیب است:

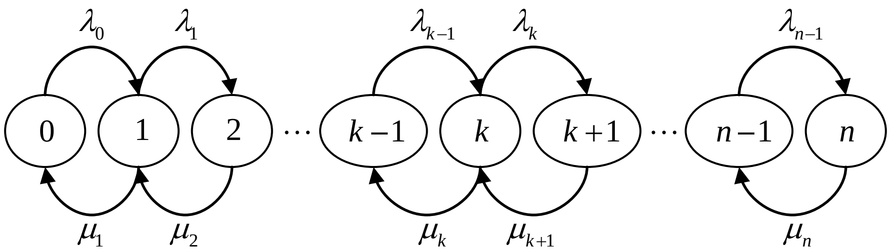
- فرآیند زاد و میر (زمان بین دو ورود متوالی و زمان سرویس هر دو توزیع نمایی دارند).
- وجود S جایگاه سرویس
- وجود تنها یک صف.

توجه کنید که صف هنگامی ایجاد می‌شود که تعداد مشتری‌های سیستم بیشتر از تعداد جایگاه‌های سرویس باشد.



جایگاه های

شکل نرخ برای این مدل به صورت زیر است:



داریم:

$$\mu_1 = \mu \,,\, \mu_2 = 2\mu \,,\, \ldots$$
$$,\, \mu_s = S\mu \,,\, \mu_{s+1} = S\mu \,,\, \ldots$$
$$,\, \mu_n = S\mu \,,\, \mu_{n+1} = S\mu$$

با توجه به شکل نرخ و روابط مربوط داریم:

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$
$$C_{n+1} = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_n}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n+1}} \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots$$
$$P_n = C_n P_0 \quad , \quad n = 1,2,\ldots \quad , \quad P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n} \quad , \quad C_0 = 1$$

نکته: توجه کنید که μ نرخ سرویس هرجایگاه است نه نرخ سرویس سیستم.

اگر μ و λ به حالت بستگی نداشته باشند، داریم:

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} & n < s \\ \dfrac{\lambda^n}{s!s^{n-s}\mu^n} & n \ge s \end{cases}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\lambda^n}{s!s^{n-s}\mu^n} \right]^{-1}$$

$$\sum_{n=s}^{\infty} \frac{\lambda^n}{s!s^{n-s}\mu^n} = \frac{\lambda^s}{s!\mu^s} \sum_{n=s}^{\infty} \rho^{n-s} = \frac{\lambda^s}{s!\mu^s} \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j$$

با توجه به این که $\rho < 1$ باید باشد، داریم:

$$\rho < 1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j = \frac{1}{1-\rho}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{\lambda^s}{s!\mu^s (1-\rho)} \right]^{-1}$$

که در آن P_0 احتمال خالی بودن جایگاه‌های سرویس می‌باشد.
متوسط تعداد مشتری‌ها در صف از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} L_q = E\left[N_q\right] &= \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) P_n \\ &= \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) \frac{\lambda^n}{s!s^{n-s}\mu^n} P_0 \\ &= \frac{P_0 \lambda^s}{s!\mu^s} \sum_{n=s}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s} (n-s) \\ &= \frac{\rho P_0 \lambda^s}{s!\mu^s} \sum_{n=s}^{\infty} \rho^{n-s-1} (n-s) \\ &= \frac{\rho P_0 \lambda^s}{s!\mu^s} \sum_{j=0}^{\infty} j \rho^{j-1} \\ &= \frac{\rho P_0 \lambda^s}{s!\mu^s} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^j \right) \\ &= \frac{\rho P_0 \lambda^s}{s!\mu^s} \left(\frac{d}{d\rho} \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \right) \\ &= \frac{\rho P_0 \lambda^s}{s!\mu^s (1-\rho)^2} \end{aligned}$$

بنابر این:

$$L_q = \frac{\rho P_0 \lambda^s}{s!\mu^s \left(1-\rho\right)^2}$$

در اینجا می‌توان مقادیر W_q، W و L را از روابط Little به دست آورد.

مثال:

در یک سیستم صف M/M/S، جامعه و ظرفیت نامحدود بوده و مشتری‌ها به ترتیب ورود سرویس دریافت می‌کنند. احتمال خالی بودن یک جایگاه مشخص را در حالت‌های زیر به دست آورید:

1. $S = 2$، $\mu = 5$ و $\lambda = 8$
2. $S = 3$، $\mu = 5$ و $\lambda = 8$

حل:

در حالت اول، از آنجا که $S = 2$ است، سیستم M/M/2 است. با توجه به فرمول داریم:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{\lambda^s}{s!\mu^s\left(1-\rho\right)}\right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[1 + \frac{8}{5} + \frac{64}{2\times 25\times\left(1-0.8\right)}\right]^{-1}$$

$$= \left[2.6 + 6.4\right]^{-1} = \frac{1}{9} = 0.11$$

یعنی در ۱۱٪ اوقات هر دو جایگاه سرویس خالی می‌باشد.

$$P_1 = C_1 P_0 = \frac{8}{5}\times\frac{1}{9} = \frac{8}{45} = 0.17$$

اگر سیستم تصادفی باشد و مشتری به طور تصادفی به جایگاه‌های خالی هدایت شود، داریم:

(هر دو جایگاه خالی باشند)$= P$(خالی
P(بودن یک جایگاه مشخص
(فقط آن جایگاه مشخص
$+P$(خالی باشد

$P\big($ هر دو جایگاه مشغول سرویس دهي باشد $\big)$

برای حالت دوم، از آنجا که $S=3$ است، سیستم M/M/3 است. با توجه به فرمول داریم:

$$P_0=\left[1+\frac{8}{5}+\frac{64}{2\times 25}+\frac{512}{6*125\left(1-\frac{8}{15}\right)}\right]^{-1}=(5.3)^{-1}=0.19$$

$$P_1=\frac{8}{5}\times 0.19=0.304$$

$$P_2=\frac{64}{50}\times 0.19=0.24$$

$$P_3=\frac{512}{750}\times 0.19=0.13$$

$$P\big(\text{خالی بودن یک جایگاه مشخص}\big)=P_0+\frac{2}{3}P_1+\frac{1}{3}P_2=0.47$$

نتیجه: با مقایسه حالت اول و دوم مشاهده می‌شود که اضافه شدن یک جایگاه وقتی نرخ ورود و خروج تغییر نکرده باشند احتمال خالی بودن هر سه جایگاه را بیشتر می‌کند.

۴-۸-۲-۱- توزیع زمان انتظار مشتری در خط انتظار در مدل M/M/S

تعاریف زیر را در نظر بگیرید:

τ_q : متغیر تصادفي بیانگر زمان انتظار در خط انتظار

τ_{q_n} : زمان انتظار در صف براي مشتري‌اي که در لحظه ورود حالت سیستم را n مي‌بیند

S : [illegible] $S\mu$

اگر حد اقل یک جایگاه سرویس خالی باشد، مشتری در خط انتظار نمی‌ماند:

$$\begin{cases} T_{q_n} = 0 \quad , \quad n = 0,1,\ldots,S\text{-}1 \\ T_{q_n} = S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-s+1} \quad , \quad n = S, S+1,\ldots \end{cases}$$

T_{q_n} برای $n \geq S$ دارای توزیع ارلنگ با پارامترشکل $n - S + 1$ است. پس:

$$f_{T_{q_n}}\left(t_q\right) = S\mu \frac{\left(S\mu t_q\right)^{n-S} e^{-S\mu t_q}}{\left(n-S\right)!} \quad , \quad n = S, S+1,\ldots.$$

$$\sum_{n=s}^{\infty} f_{T_{q_n}}\left(t_q\right) P_n = \sum_{n=s}^{\infty} \frac{S\mu\left(S\mu t_q\right)^{n-S} e^{-S\mu t_q}}{\left(n-S\right)!} \times \frac{\lambda^n}{S!\mu^n S^{n-S}} P_0$$

$$= \frac{P_0 S\mu\lambda^S}{S!\mu^S} e^{-S\mu t_q} \sum_{n=S}^{\infty} \frac{\left(\lambda t_q\right)^{n-S}}{\left(n-S\right)!} = \frac{P_0 S\mu\lambda^S}{S!\mu^S} e^{-S\mu t_q} e^{\lambda t_q}$$

$$= \frac{P_0 S\mu\lambda^S}{S!\mu^S} e^{-(S\mu-\lambda)t_q}$$

توزیع زمان انتظار در خط انتظار برابر است با:

$$f_{T_q}\left(t_q\right) = \begin{cases} 1 - \dfrac{S\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^s}{S!\left(S - \dfrac{\lambda}{\mu}\right)} P_0 & t_q = 0 \\ \dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^S \mu e^{-(S\mu-\lambda)t_q}}{\left(S-1\right)!} P_0 & t_q > 0 \end{cases}$$

توزیع زمان انتظار درسیستم که از پیچش توزیع‌های نمائی غیریکسان بدست می‌آید عبارتست از:

$$f_T\left(t\right) = \frac{\left(\mu e^{-\mu t}\left[\lambda - S\mu + \mu f_{T_q}\left(0\right)\right] - \left[1 - f_{T_q}\left(0\right)\right]\left[\left(\lambda - S\mu\right)\mu e^{-(S\mu-\lambda)t}\right]\right)}{\left[\lambda - \left(S-1\right)\mu\right]}$$

۴-۸-۲-۲- مدل M/M/S/k

منظور از M/M/S/k این است که سیستم گنجایش مشخصی برابر k دارد. یعنی تا زمانی که حالت سیستم k نشده، هر فردی که مراجعه کند می‌تواند وارد شود؛ ولی از آن به بعد هر فردی که مراجعه کند نمی‌تواند وارد شود. چون سیستم M/M است، فرآیندزاد و میر داریم و کلیه فرض‌های قبلی وجود دارند:

$$P_n = C_n P_0$$
$$C_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_{n-1}\mu_n}$$

چون سیستم محدود شده، نیازی به شرط $\rho < 1$ نیست. چون حتی اگر λ خیلی بزرگتر از μ هم باشد و سیستم ظرفیت خالی نداشته باشد، مراجعین نمی‌توانند وارد سیستم شوند.

داریم:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & n = 0,\dots,k-1 \\ 0 & n = k \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n = 0,\dots,S-1 \\ S\mu & n = S,\dots,k \end{cases}$$

$$P_0 = \begin{cases} \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S}{S!} \left(\frac{1-\left(\frac{\lambda}{S\mu}\right)^{k-S+1}}{1-\frac{\lambda}{S\mu}} \right) \right]^{-1} & \frac{\lambda}{S\mu} \neq 1 \\ \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S}{S!} (k-S+1) \right]^{-1} & \frac{\lambda}{S\mu} = 1 \end{cases}$$

$$L_q = E\left(N_q\right) = \sum_{n=S}^{k} (n-S) P_n$$
$$= \begin{cases} \frac{\rho P_0 (S\rho)^S}{S!(1-\rho)^2}\left[1-\rho^{k-S+1} - (1-\rho)(k-S+1)\rho^{k-S}\right] & \rho \neq 1 \\ \frac{P_0 (S\rho)^S}{2\times S!}\left[(k-S)(k-S+1)\right] & \rho = 1 \end{cases}$$

هنگامی که برای سیستم صف، ظرفیت در نظر بگیریم، نرخ ورود به سیستم و نرخ مراجعه به سیستم یکسان نیستند و نرخ ورود به سیستم به این ترتیب محاسبه می‌شود:

$$\bar{\lambda} = E(\lambda_n) = \sum_{n=0}^{k-1} \lambda_n P_n = \lambda(1 - P_k)$$

$$L_q = \bar{\lambda} w_q$$

$$w = w_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = \bar{\lambda} w$$

۴-۸-۲-۳- مدل M/M/1/k با ρ=1

مدل M/M/1 را با ظرفیت محدود k در نظر بگیرید، اگر $\rho = 1$ باشد، یعنی نرخ مراجعه و سرویس یکسان باشند، با احتمال یکسان به حالت قبلی و بعدی می‌رویم:

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{k+1}} & \rho \neq 1,\ n = 1, 2, 3, \ldots, k \\ \dfrac{1}{1+k} & \rho = 1,\ n = 1, 2, 3, \ldots, k \end{cases}$$

۴-۸-۲-۴- مدل M/M/S/S

اگر $k = S$ باشد، خط انتظار هیچگاه تشکیل نمی‌شود؛ مثل سیستم‌های تلفن ساده که اگر خط آزاد باشد می‌توان شماره گرفت، ولی اگر اشغال باشد، نه در صفی وارد می‌شوید و نه نوبتی خواهید داشت. به این نوع سیستم، سیستم ارلانگ گویند. ($N = 0, \ldots, S$)

برای این سیستم داریم:

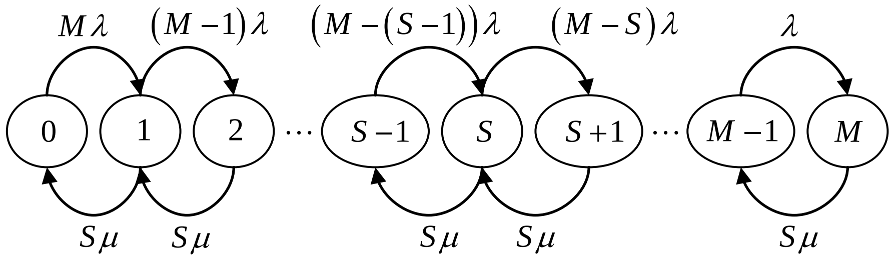
$$L_q = 0 \quad , \quad W_q = 0 \quad , \quad L = E(N) = \sum_{n=0}^{s} nP_n$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{s-1} \lambda_n P_n \quad , \quad L = W\bar{\lambda}$$

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{\sum_{n=0}^{s} nP_n}{\sum_{n=0}^{s-1} \lambda_n P_n} \quad , \quad W = W_q + \frac{1}{\mu} \Rightarrow W = \frac{1}{\mu}$$

۴-۸-۲-۵- سیستم صف M/M/S با تعداد افراد جامعه M

شکل نرخ زیر را در نظر بگیرید:



اگر مسأله را مورد خرابی ماشین‌های یک کارخانه در نظر بگیریم، هر حالت تعداد ماشین‌های خراب را نشان می‌دهد و با افزایش ماشین‌های خراب از تعداد ماشین‌های مفید کاسته می‌شود.

در روابط فوق λ نرخ خرابی هر ماشین در واحد زمان بوده و ماشین‌ها پس از خراب شدن وارد سیستم می‌شوند. درنتیجه داریم:

$$C_n = \frac{\lambda_0 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \ldots \mu_n} \quad , \quad P_n = C_n P_0 \quad , \quad P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{M} C_n}$$

$$\lambda_n = \begin{cases} (M-n) & \lambda n = 0,1,\ldots,M-1 \\ 0 & n \geq M \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n = 0,1,\ldots,S-1 \\ S\mu & n = S,\ldots,M \end{cases}$$

$$P_n = \begin{cases} \binom{M}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & n = 0,\ldots,S-1 \\ \binom{M}{n} \frac{n!}{s^{n-s} s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & n = S,\ldots,M \end{cases}$$

$$L = E(N) = \sum_{n=0}^{M} nP_n$$

$$L_q = E(N_q) = \sum_{n=S}^{M} (n-S) P_n = \sum_{n=S}^{M} nP_n - S\sum_{n=S}^{M} P_n$$

$$= \left(L - \sum_{n=0}^{S-1} nP_n\right) - S\left(1 - \sum_{n=0}^{S-1} P_n\right)$$

$$\Rightarrow L_q = L - S + \sum_{n=0}^{S-1} (S-n) P_n$$

$$L = \bar{\lambda} w \quad , \quad \bar{\lambda} = E(\lambda_n) = \sum_{n=0}^{M} \lambda (M-n) P_n = \lambda (M-L)$$

۳-۸-۴- مدل M/M/∞

مثل سیستم‌های سلف سرویس که هر فردی خودش به خودش سرویس می‌دهد.

$$P_n = C_n P_0 \quad , \quad C_n = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} \quad , \quad \lambda_n = \lambda, \mu_n = n\mu$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} = P_0 e^{\frac{\lambda}{\mu}} \Rightarrow P_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

به علت این که به هر فرد مراجعه کننده در زمان مراجعه سرویس‌داده می‌شود، صف تشکیل نمی‌شود. داریم:

$$L_q = 0 \quad , \quad W_q = 0 \quad , \quad W = W_q + \frac{1}{\mu} \Rightarrow W = \frac{1}{\mu} \Rightarrow L = \frac{\lambda}{\mu}$$

نکته: گاهی یک گروه به سیستم مراجعه می‌کند در این صورت اگرتعداد افراد گروه ثابت باشد، مثل قبل می‌توان عمل کرد. ولی اگر تعداد افراد ثابت نباشد، حالت‌های متفاوتی پیش خواهد آمد. در این حالت می‌توان میانگین افراد گروه‌ها را به عنوان نرخ مراجعه به سیستم درنظر گرفت. این مطلب درمورد نرخ سرویس هم صادق است. مثلا ممکن است بتوان یکجا به چند نفر سرویس داد.

۴-۹- مشتری نا شکیبا

در این قسمت چهار نوع مشتری ناشکیبا را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این انواع عبارتند از:

۱- امتناع (انصراف) ازورود به سیستم صف

در این مدل نرخ مراجعه به سیستم با تغییرزمان تغییر نمی‌کند. اما این که چند نفر از این افراد وارد سیستم می‌شوند، به حالت سیستم وابسته است.

$$\lambda_n = b_n \lambda$$
$$0 \le b_{n+1} \le b_n \le 1 \qquad \mathrm{n} = 0,1,\ldots, b_0 = 1$$

یکی از اشکال b_n:

$$b_n = \frac{1}{n+1}, b_n = \frac{1}{n^2+1}, b_n = e^{-\alpha n}$$

در رابطه فوق α ضریبی است که شرط انصراف را برای آن سیستم بیان می‌کند.

۲- دبه کردن، یعنی خروج از صف پس از ورود به آن (انصراف یا امتناع از ماندن در صف)

اگر نرخ سرویس به صورت ثابت μ باشد، تابعی به نام $r(n)$ را در نظر می‌گیریم تا بیانگر حالت افرادی باشیم که از صف خارج می‌شوند. (در حقیقت سیستم از حالتی به حالت دیگر می‌رود، بدون این که به کسی سرویس داده باشد.)

$$\mu_n = \mu + r(n)$$

۳- تعویض صف

گاهی چند صف برای سرویس دادن وجود دارد که مشتری پس از ورود ، یکی از آنها را انتخاب می‌کند. امکان دارد در طول مدتی که مشتری در سیستم است، چندین بار صف خود را عوض کند.

۴- عدم رعایت نوبت در صف

گاهی سرویس در سیستم به گونه‌ای است که مشتری‌ها به ترتیب ورود، سرویس دریافت نمی‌کنند. به عنوان مثال آخرین نفری که وارد صف شده، اولین نفری است که سرویس دریافت

Balking

Reneging

Jockeying

می‌کند. باید توجه داشت که میانگین‌های چهارگانه W و L و W_q و L_q به نظم صف بستگی ندارند.

۴-۱۰- اولویت

الف) اولویت با حق انقطاع[۱]

اگر یک مشتری، با اولویت بالاتر از مشتری در جایگاه سرویس وارد سیستم شود، مشتری سرویس گیرنده از جایگاه سرویس خارج شده و مشتری با اولویت بالاتر، وارد جایگاه سرویس می‌شود؛ مثل اورژانس بیمارستان‌ها. همچنین افرادی که اولویت یکسانی دارند، با نظم ترتیبی، وارد جایگاه سرویس می‌شوند.

ب) اولویت بدون حق انقطاع[۲]

مشتری که وارد جایگاه سرویس می‌شود، سرویس خود را تمام می‌کند؛ حتی اگر اولویتش از بقیه افرادی که بعدا وارد شده‌اند کمتر باشد. سپس بعد از سرویس وی مشتری‌ای که بیشترین اولویت را دارد، وارد جایگاه سرویس می‌شود. همچنین افرادی که اولویت یکسانی دارند، با نظم ترتیبی، وارد جایگاه سرویس می‌شوند.

۴-۱۰-۱- اولویت با حق انقطاع در مدل M/M/1

اگر w_1 میانگین زمان انتظار یک مشتری با اولویت ۱ در سیستم باشد داریم:

$$w_1 = \frac{1}{\mu - \lambda_1}$$

با استفاده از روابط Little بقیه پارامترها به دست می‌آیند.

$W_{1,2}$ میانگین زمان انتظار برای مشتری‌هایی با اولویت ۱ یا ۲ عبارتست از:

$$\begin{cases} W_{1,2} = \dfrac{1}{\mu - \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)} \\ W_{1,2} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} W_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} W_2 \end{cases}$$

---

[۱] Preemptive Priority
[۲] Non-Preemptive Priority

با قرار دادن مقادیر W_1 و $W_{1,2}$ در آخرین معادله، مقدار W_2 محاسبه می‌شود.

زمان انتظار مشتری‌ای که اولویت ۱ یا ۲ یا ۳ دارد عبارتست از:

$$\begin{cases} W_{1,2,3} = \dfrac{1}{\mu - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \\ W_{1,2,3} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} W_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} W_2 + \dfrac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} W_3 \end{cases}$$

حال W_3 به دست خواهد آمد و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

تذکر: در روابط فوق دو فرض را در نظر گرفتیم. یکی اینکه تمام مشتری‌ها یک نوع سرویس دریافت می‌کنند و فرض دیگر این است که ورودی هر اولویت، نمایی است. در نتیجه ورودی کل نیز نمایی با پارامتری برابر با مجموع پارامترها می‌باشد.

$$\frac{\lambda_1}{\mu} < 1 \quad , \quad \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu} < 1 \quad , \quad \ldots$$

نکته: برای گروه‌هایی که $\rho < 1$ دارند سیستم صف، سیستمی پایا است و روابط برقرار است. ولی اگر به گروه‌هایی رسیدیم که در آنها $\rho \geq 1$ شد، برای آن گروه‌ها سیستم دیگر در حالت پایا نیست.

۴-۱۰-۲- اولویت بدون حق انقطاع در مدل M/M/S و مدل M/M/1

در مدل M/M/S برای زمان انتظار در صف برای مشتری با اولویت i ام داریم:

$$W_{q_i} = \frac{1}{AB_{i-1}B_i} \quad , \quad i = 1, \ldots, N$$

$$A = S\mu + S!(S\mu - \lambda)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^S \sum_{j=0}^{S-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!}$$

$$B_0 = 1 \quad , \quad B_i = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{i} \lambda_j}{S\mu} \quad , \quad i = 1, \ldots, N$$

و در مدل M/M/1 داریم:

$$W_{q_1} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda_1)}$$
$$W_{q_i} = \frac{\lambda}{(\mu-\lambda_1-\ldots-\lambda_{i-1})(\mu-\lambda_1-\ldots-\lambda_i)} \quad , \quad i=2,3,\ldots$$

مثال:

تعداد دعاوی که به یک دادگاه می‌رسد، دارای توزیع پواسون با میانگین ۱۰ عدد در ماه است. تنها قاضی این دادگاه، می‌تواند به طور متوسط به ۱۲ پرونده در ماه رسیدگی کند. مدت زمان رسیدگی به هر پرونده نیز دارای توزیع نمایی است و دعاوی رسیده، در سه نوع اضطراری، مهم و عادی می‌باشند. ٪۱۰ دعاوی رسیده در ماه، اضطراری، ٪۲۰ مهم و مابقی دعاوی عادی می‌باشند.

الف) مطلوبست مدت زمانی که طول می‌کشد تا به یک پرونده رسیدگی شود.

ب) مطلوبست تعداد پرونده‌های موجود ازهر نوع در دادگاه.

حل:

$$W = \frac{1}{(\mu-\lambda)} = \frac{1}{12-10} = 0.5 \text{ ماه}$$

هر پرونده، به طور متوسط ۱۵ روز در دادگاه می‌ماند. مدل این مثال، با توجه به وجود یک قاضی و توزیع‌های ورودی و خروجی، M/M/1 با اولویت‌بندی بدون حق انقطاع می‌باشد.

$$W_{q_1} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda_1)} = \frac{10}{12\times(12-10\times0.1)} = 0.075$$
$$W_{q_2} = \frac{10}{(12-1)(12-1-2)} = \frac{10}{11\times9} = 0.10$$
$$W_{q_3} = 0.555$$

با کاهش اولویت، متوسط زمان انتظار هم بیشتر می‌شود.

با استفاده از روابط Little داریم:

$$W_1 = W_{q_1} + \frac{1}{\mu} = 0.075 + \frac{1}{12} = 0.16$$
$$L_1 = \lambda_1 W_1 = 1 \times 0.16 = 0.16$$
$$L_2 = \lambda_2 W_2 = 0.368$$
$$L_3 = 4.472$$
$$L_1 + L_2 + L_3 = 5$$
$$W = 0.5 \Rightarrow L = \lambda W = 10 \times 0.5 = 5$$

میانگین زمان انتظار در خط انتظار:

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{5}{12}$$
$$W_q = \frac{\lambda_1}{\lambda} W_{q_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda} W_{q_2} + \frac{\lambda_3}{\lambda} W_{q_3}$$
$$\lambda_1 = 0.10\lambda = 0.10 \times 10 = 1$$
$$\lambda_2 = 0.20\lambda = 0.20 \times 10 = 2$$
$$\lambda_3 = 0.70\lambda = 0.70 \times 10 = 7$$
$$\Rightarrow W_q = 0.10 \times 0.075 + 0.20 \times 0.12 + 0.70 \times 555 = 0.42$$

۴-۱۱- بهینه‌سازی درسیستم‌های صف

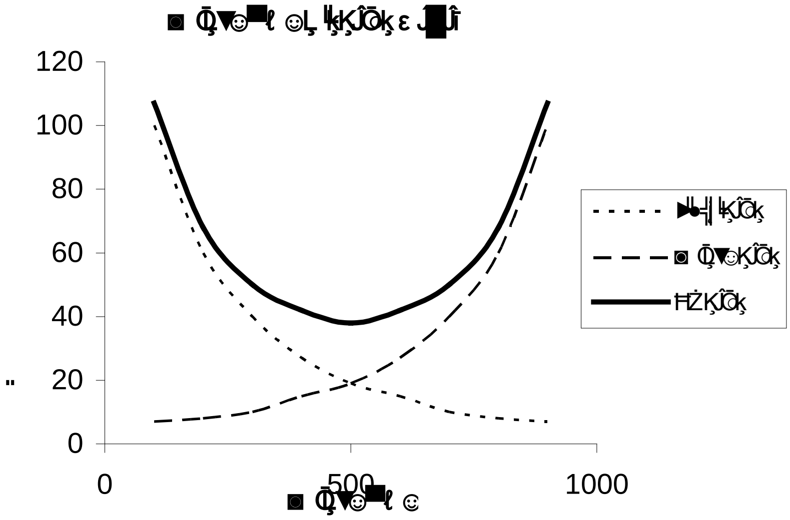
بیشتر مسائل خط انتظار مربوط است به تعیین سطوح بهینه سرویس بنگاههای اقتصادی. فروشگاههای بزرگ میبایست در مورد تعداد صندوقهای دریافت وجوه کالاهای خریداری مشتریها، پمپ بنزینها میبایست در مورد تعداد پمپها و تعداد کارکنان، تولید کنندگان میبایست در مورد تعداد افراد مکانیک که کار نت (نگهداری و تعمیرات) را انجام می‌دهند و بانکها می‌بایست در مورد تعداد باجه‌های ارائه دهنده خدمات بانکی تصمیم بگیرند. در بسیاری از موارد میزان سطح سرویس گزینه‌ای است که تحت کنترل مدیر مربوط می‌باشد. برای مثال در جدول زیر تجزیه و تحلیل هزینه بندری یک خط کشتی رانی را ملاحظه می‌کنید.

جدول تجزیه و تحلیل هزینه بندري یك خط کشتي راني

	تعداد تیمهاي تخلیه			
	1	2	3	4
الف ـ میانگین کشتیهاي ورودي در یك شیفت	5	5	5	5
ب ـ میانگین زمان تخلیه هر کشتي به ساعت	7	4	3	2
ج ـ میانگین کل ساعات تلف شده در هر شیفت	35	20	15	10
د ـ هزینه ساعتي هر کشتي متوقف	1000	1000	1000	100
ه ـ کل هزینه انتظار در یك شیفت	35000	20000	15000	10000
و ـ هزینه کارکنان تیم	6000	12000	18000	24000
ز ـ مجموع هزینه	[illegible]	32000	[illegible]	[illegible]

افزایش سطح سرویس، به معنای افزایش نرخ سرویس می‌باشد. مثل افزایش تعداد جایگاه‌های سرویس و یا کاهش زمان سرویس. به طور کلی با افزایش سطح سرویس، متوسط زمانی که یک مشتری در سیستم می‌ماند کاهش پیدا کرده و هزینه انتظار کم می‌شود، ولی هزینه سرویس افزایش پیدا می‌کند.

هزینه انتظار برای مشتری‌های داخل سیستم به خوبی قابل محاسبه می‌باشد مثل هزینه کار نکردن و انتظار یک ماشین خراب شده برای تعمیرات ولی هزینه انتظار برای مشتری‌های خارج از سیستم عبارتست از هزینه از دست دادن مشتری .



در شکل فوق هزینه سرویس، هزینه انتظار و مجموع آنها یعنی هزینه کل نشان داده شده است. هدف پیدا کردن سطحی از سرویس است که حداقل هزینه کل (سطح بهینه) را بدهد. پیدا کردن سطح بهینه در اینجا با توجه به این که سطح سرویس گسسته است، از طریق مشتق‌گیری ممکن نیست. لذا باید از طریق محاسبات در هر سطح سرویس، سطح بهینه را تعیین کرد (از حداقل تعداد جایگاه سرویس شروع کرده و آنرا هر بار یک واحد افزایش می‌دهیم تا حالت بهینه به دست آید.)

ولی در جاهایی که بتوان سطح سرویس را پیوسته در نظر گرفت، مشتق‌گیری راهی مناسب است.

۴-۱۱-۱- تابع هزینه خطی

تابع هزینه خطی در یک سیستم صف عبارت است از:

$$\begin{aligned} TC = {} & C_1\left(S - L + L_q\right) + C_2\left(L - L_q\right) + C_3\left(S\right) \\ & + C_4\left(\lambda - \overline{\lambda}\right) + C_5\left(L_q\right) + C_6\left(L - L_q\right) + C_7 K \end{aligned}$$

که در آن تعاریف زیر مورد استفاده قرار گرفته است:

TC: هزینه کل در واحد زمان

C_1: هزینه یك خدمت دهنده بیکار در واحد زمان

C_2: هزینه یك خدمت دهنده مشغول در واحد زمان

C_3: هزینه سرمایه‌گذاري براي هر جایگاه سرویس در واحد زمان

C_4: هزینه هر مشتري از دست رفته در واحد زمان

در برخی موارد $C_1 = C_2$ و $C_5 = C_6$ است. در نتیجه:

$$TC = \left(C_1 + C_3\right)S + C_6 L + C_4\left(\lambda - \bar{\lambda}\right)$$

مثال:

سیستمی M/M/S داریم، تعداد بهینه S چه می‌تواند باشد، اگر:

$$\begin{vmatrix} \lambda = 15 \\ \mu = 10 \\ C_1 = C_2 = 120 \\ C_5 = C_6 = 360 \\ C_3 = C_4 = 0 \end{vmatrix}$$

هزینه هر ساعت وقت مشتری ۳۶۰ است و محدودیت ظرفیت و هزینه سرمایه‌گذاری نداریم.

حل)

$$L - L_q = \frac{\lambda}{\mu}$$

اختلاف L و L_q که مساوی $\frac{\lambda}{\mu}$ می‌شود بستگی به S ندارد، بنابراین:

$$TC(S) = 120S + 360L_q$$

$$\rho = \frac{\lambda}{S\mu} < 1$$

$$\rho = \frac{15}{10S} < 1 \Rightarrow S \geq 2$$

S تعداد جایگاه‌های سرویس، مقادیر گسسته را می‌گیرد. بنابراین:

L	$TC(S)$	P_0	S
1.92	934.3	0.14	2
0.24	445.3	0.21	3
0.04	496.1	0.22	4

تعداد بهینه جایگاه‌های سرویس برابر ۳ می‌باشد، یعنی $S = 3$.

۴-۱۱-۲- نرخ سرویس پیوسته

μ : نرخ سرویس و در اینجا مجهول

C_1 : بیان می‌کند که اگر نرخ سرویس یك واحد افزایش یابد هزینه سرویس در واحد زمان چه تغییري خواهد کرد. (خطي فرض شده است)

C_6 : هزینه انتظار یك مشتري درسیستم در واحد زمان

برای هزینه کل داریم:

$$TC(\mu) = C_1\mu + C_6L$$

اگر سیستم M/M/1 باشد، داریم:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

اگر μ بتواند مقادیر پیوسته را به خود بگیرد (مثل ماشینی که بتوان سرعت آن را به دلخواه تغییر داد)، داریم:

$$TC(\mu) = C_1\mu + \frac{C_6\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$\frac{\partial TC(\mu)}{\partial\mu} = 0 \Rightarrow \mu = \lambda + \sqrt{\frac{C_6\lambda}{C_1}}$$

$$\rho < 1 \Rightarrow \frac{\lambda}{\mu} < 1 \Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda + \sqrt{\frac{C_6\lambda}{C_1}}} < 1$$

مثال:

یک شرکت برای امور چاپ خود نیاز به اجاره یک چاپگر دارد. چاپگرها سرعت‌های مختلف دارند. هدف پیدا کردن چاپگری با سرعت بهینه است. در ۸ ساعت (یک روز کاری) ۵۰ تقاضای چاپ وجود دارد که طبق توزیع پواسون، وارد می‌شوند. میانگین تعداد خطوط این چاپ‌ها، ۱۰۰۰ خط می‌باشد و زمان چاپ نیز نمایی در نظر گرفته شده است. همچنین به تاخیر افتادن هر کار چاپ از روز خودش به روز بعد، ۱۰ دلار هزینه در بر دارد. برای اجاره چاپگر نیز به ازای هر ۱۰۰ خط افزایش سرعت در دقیقه، هزینه در ماه نیز ۱۰۰ دلار بالا می‌رود. مطلوبست سرعت بهینه برای اجاره چاپگر.

حل:

با توجه به شرایط، سیستم M/M/1 است:

$$\lambda = 50$$
$$\mu = ?$$
$$\mathrm{C}_6 = 10, \quad C_1 = 0.0948$$
$$\mu = \lambda + \sqrt{\frac{\mathrm{C}_6\lambda}{C_1}} = 50 + \sqrt{\frac{50\times 10}{0.0948}} = 123$$

بنابراین سرعت چاپگر ۱۲۳ کار در روز خواهد بود.

برای به دست آوردن C_1 با توجه به این که یک ماه را ۲۲ روز کاری در نظر گرفته‌ایم، داریم:

افزایش هزینه روزانه $100/22 = 4.55$

خطوط اضافی که در یک روز کاری به ازای افزایش ۱۰۰ واحد در سرعت چاپ در دقیقه می‌توان چاپ کرد:

$$100\times 60\times 8 = 48000$$

یعنی افزایش سرعت در یک روز کاری برابر است با ۴۸۰۰۰ خط و یا ۴۸ کار بیشتر در هر روز کاری. در نتیجه افزایش هزینه سرویس در واحد زمان برابر است با:

$$\frac{4.55}{48} = 0.0948$$

که از آن در محاسبه μ استفاده شده است.

۴-۱۱-۳- نرخ سرویس گسسته

فرض کنید S و μ هر دو مجهول باشند. در این صورت S را برابر با یک قرار داده و سپس مقدار بهینه μ را با هدف حداقل کردن هزینه به دست می‌آوریم. گام دوم افزایش S به اندازه یک واحد است. سپس S و μ بهینه را که کمترین هزینه را بدهد، از بین تمام S و μها به دست می‌آوریم.

مثال:

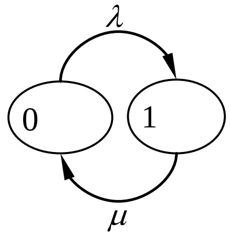
در یک سیستم صف، یک جایگاه سرویس و ظرفیت محدود داریم و نرخ سرویس و ظرفیت سیستم صف مجهول می‌باشند. با توجه به این که $\mu \in \{5,7,12\}$ نرخ سرویس μ چه باشد تا هزینه کل حداقل گردد.

حل)

حالت سیستم M/M/1/K است و k و μ مجهول هستند.

$$TC = C_1\mu + C_6L + C_4\lambda P_K + C_7K$$
$$TC = 10\mu + 8L + 5K + 20\times 10P_K$$

حداقل مقدار k را برابر ۱ قرار می‌دهیم:



بنابراین:

$$k = 1 \Rightarrow TC = 10\mu + 8L_{(k)} + 5\times 1 + 20\times 10P_1$$
$$L = E(N) = 1\times P_1 = P_1$$
$$TC = 10\mu + 5 + 208P_1$$

که در آن L و P به k وابسته‌اند.

حال برای مقادیر مختلف μ، TC را به دست می‌آوریم تا کمترین هزینه کل به دست آید. طبق فرض:

$$\mu \in \{5,7,12\}$$

بنابراین هزینه کل یعنی TC را به ازای μ برابر با ۱۲ و ۷ و ۵ به دست می‌آوریم:

$$10P_0 = 5P_1 \Rightarrow 2P_0 = P_1$$
$$P_0 + P_1 = 1 \Rightarrow P_1 = \frac{2}{3}, P_0 = \frac{1}{3}$$

$$\mu = 5 \Rightarrow TC = 10\times5+5+208\times\frac{2}{3} = 193.6$$
$$\mu = 7 \Rightarrow P_1 = \frac{10}{17} \quad , \quad P_0 = \frac{7}{17}$$
$$\Rightarrow TC = 10\times7+5+208\times\frac{10}{17} = 197.35$$
$$\mu = 12 \Rightarrow P_1 = \frac{10}{22} \quad , \quad P_0 = \frac{12}{22}$$
$$\Rightarrow TC = 10\times12+5+208\times\frac{10}{22} = 219.54$$

با مقایسه μها، برای $k=1$ مقدار $\mu=5$ بهینه است. حال k را برابر ۲ قرار می‌دهیم، در نتیجه داریم:

$$TC = 10\mu + 8L + 10 + 200P_2$$
$$10P_0 = \mu P_1$$
$$(10+\mu)P_1 = 10P_0 + \mu P_2$$
$$P_0 + P_1 + P_2 = 1$$

و از اینجا L، P_0، P_1 و P_2 را محاسبه کرده و مانند قبل برای مقادیر مختلف μ، TC را محاسبه می‌کنیم. حال این سوال مطرح است که k تا کجا افزایش یابد؟

اگر در حال افزایش k به مقداری از k رسیدیم که مقدار بهینه TC مربوط به آن، بزرگتر یا مساوی مقدار بهینه k قبلی است، دیگر k را افزایش نمی‌دهیم و همانجا کار را تمام می‌کنیم.

جواب بهینه مسأله مذکور عبارتست از $\mu = 7, k = 3, TC = 179.384$.

۴-۱۲- مسائل

۱- اگرتعداد ورودی ها به یک سیستم دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda=\frac{1}{4}$ دردقیقه باشد وازساعت ۱۱ تا ۱۱:۲۰ هیچ مشتری وارد سیستم نشده باشد، احتمال اینکه تا ساعت ۱۱:۴۰ دو مشتری وارد سیستم شوند را به دست آورید.

۲- یک جایگاه سرویس دارای یک پمپ بنزین است. اتومبیل‌ها با پیروی از توزیع پواسون با میانگین ۱۵ ماشین برساعت وارد جایگاه می‌شوند. اگر n ماشین درجایگاه باشند، اتومبیلی که قصد ورود دارد، با احتمال $\frac{n}{3}$ وارد نمی‌شود $(n=1,2,3)$. زمان مورد نیاز برای سرویس هر ماشین دارای توزیع نمایی بامیانگین ۴ دقیقه می‌باشد.

الف) دیاگرام نرخ این جایگاه را رسم کنید.

ب) معادلات تعادل را نوشته آنها را حل کنید.

ج) متوسط زمان انتظار ماشین‌هایی که وارد سیستم می‌شوند را به دست آورید.

۳- در اتاقی ۲ لامپ وجود دارد و میانگین زمان کارکرد یک لامپ ۲۲ روز می‌باشد (با توزیع نمایی) چنانچه یک لامپ بسوزد، به طور متوسط به ۲ روز زمان نیاز دارد تا با یک لامپ سالم عوض شود. در چند درصد اوقات هر دو لامپ سالم است؟

۴- مغازه آرایشگری ۱۰ صندلی دارد. به طور متوسط در هر ساعت ۲۰ مشتری مراجعه می‌کند. هر مشتری به طور متوسط ۱۲ دقیقه نیاز به اصلاح دارد و هرمشتری که در هنگام ورود صندلی خالی نیابد آرایشگاه را ترک می‌کند.

الف) به طور متوسط در هر ساعت آرایشگر چند سر را اصلاح می‌کند؟

ب) به طور متوسط هر مشتری چقدر وقت در آرایشگاه می‌ماند؟

ج) نرخ ورود به مغازه چند است؟

۵- دو سیستم زیر با نرخ ورود یکسان λ را در نظر بگیرید:

۱) M/M/1 با نرخ سرویس: 3μ

۲) M/M/3 با نرخ سرویس: μ

بدون محاسبات طولانی برای W و L بگویید کدام سیستم W و L کوچکتری دارد؟

۶- یک سیستم صف M/M/3 تنها ظرفیت ۴ مشتری (۳ نفر در جایگاه و ۱ نفر در صف) را دارد. اگر نرخ مراجعه ۱۰ مشتری در هر ساعت و نرخ سرویس هر جایگاه ۲ مشتری در ساعت باشد:

الف) شکل نرخ را رسم و معادلات تعادل وحل آنها را به دست آورید.

ب) مطلوب است مقدار W و L.

ج) هنگامی که هر سه جایگاه مشغول ارائه سرویس هستند، مطلوبست احتمال اینکه اولین فردی که سرویسش تمام می‌شود از جایگاه دوم نباشد، اگر چه سرویسش در جایگاه دوم زودتر از جایگاه‌های دیگر شروع شده باشد.

د) هر جایگاه در چه درصدی از زمان مشغول است؟

ه) میانگین تعداد جایگاه‌های بیکار چندتا است؟

۷- یک سیستم صف دارای گنجایش ۳ مشتری (۲ تا در صف و یکی در جایگاه) و متوسط ۵ مراجعه در ساعت و زمان سرویس نمایی با میانگین ۱۵ دقیقه برای هر مشتری می‌باشد:

الف) شکل نرخ را ترسیم کنید.

ب) درچند درصد از اوقات سیستم تهی است؟

ج) چند درصد از مشتری‌ها ازدست می‌روند؟

د) اگر گنجایش تغییر نکند ولی تعداد جایگاههای سرویس یکی اضافه گردد، به سوالات الف و ب پاسخ دهید.

ه) چنانچه زیان هر مشتری از دست رفته ۵۰ تومان و هزینه هر ساعت انتظار هر مشتری در سیستم ۱۰ تومان باشد و هزینه هر جایگاه اضافی ۲۰۰ تومان در ساعت باشد و گنجایش تغییر نکند، تعداد بهینه جایگاه‌های سرویس چندتا است؟

۸- یک سیستم صف M/M/1 با پارامترهای λ و μ و مشتری‌های ناشکیبا در نظر بگیرید. یک مشتری خاص در زمان رسیدن به صف، زمان انتظار W را تخمین می‌زند و سپس یا با احتمال $e^{-\alpha w}$ به صف می‌پیوندد و یا با احتمال $1-e^{-\alpha w}$ صف را ترک می‌کند. فرض کنید زمانی که k مشتری در سیستم وجود دارد، تخمین $w=\dfrac{k}{\mu}$ برقرار است. همچنین فرض کنید $\alpha>0$.

Find the state distribution of system at equilibrium (P_0 and P_k).

What will be distribution of system state as seen by an arriving customer who actually joins the system? (Pr=P(arriving customer seen r in system before joining the system) =?).

۱۰ـ یک جایگاه سرویس دارای یک پمپ بنزین است . اتو مبیلها با یک نرخ پواسون با میانگین ۱۵ ماشین بر ساعت وارد جایگاه می‌شوند . اگر n ماشین در جایگاه باشند ، اتومبیلی که قصد ورود دارد با احتمال $\dfrac{n}{3}$ وارد نمی‌شود $(n=1,2,3)$. زمان مورد نیاز برای سرویس هر ماشین توزیع نمایی با میانگین ۴ دقیقه می‌باشد.

الف ـ دیاگرام نرخ این جایگاه را رسم کنید.

ب ـ معادلات تعادل را نوشته و آن را حل کنید.

ج ـ متوسط زمان انتظار ماشینی که وارد سیستم می‌شود را به دست آورید (از لحظهٔ ورود تا لحظهٔ خروج).

۱۱- در اتاقی دو لامپ وجود دارد اگر میانگین زمان کارکرد یک لامپ ۲۲ روز باشد (توزیع: نمایی) و چنانچه یک لامپ بسوزد نیاز به دو روز زمان دارد تا عوض شود. (به طور متوسط دو روز طول می‌کشد تا با لامپ سالم تعویض شود) در چند درصد اوقات هر دو لامپ سالم است؟ (یک سرویس‌دهنده داریم .)

۱۲- یک سیستم صف M/M/1 با $\lambda = \frac{30}{h}$ و $\mu = \frac{50}{h}$ داریم که در آن زمان‌ها دارای توزیع نمایی است. مطلوب است L با استفاده از فرمول‌های اولیه (بدون استفاده از فرمول).

۱۳- مغازهٔ آرایشگری ۱۰ صندلی انتظار دارد. به طور متوسط در هر ساعت ۲۰ مشتری مراجعه می‌کند. اگر هر مشتری به طور متوسط ۱۲ دقیقه نیاز به اصلاح داشته باشد. (توزیع زمانها نمایی است) هر مشتری که در هنگام ورود صندلی خالی نیابد آرایشگاه را ترک می‌کند .

الف ـ به طور متوسط، در هر ساعت آرایشگر چند سر را به طور کامل اصلاح می‌کند؟

ب ـ به طور متوسط، هر مشتری چقدر وقت در آرایشگاه می‌ماند؟

ج ـ نرخ ورود به مغازه چقدر است؟

۱۴- یک سیستم صف M/M/3 تنها گنجایش ۴ مشتری را دارد(۳ نفر در جایگاه و ۱ نفر در صف). اگر نرخ مراجعه، ۱۰ مشتری در هر ساعت و نرخ سرویس هر جایگاه، ۲ مشتری در ساعت باشد:

الف ـ شکل نرخ را رسم نموده و معادلات تعادل را بنویسید.

ب ـ W و L را محاسبه کنید.

ج ـ هنگامی که هر سه جایگاه مشغول سرویس‌دهی هستند مطلوب است احتمال اینکه اولین فردی که سرویسش تمام شود، از جایگاه دوم نباشد.

د ـ در چه درصدی از زمان هر جایگاه مشغول است؟

ه ـ میانگین تعداد جایگاه‌های بیکار چقدراست؟

۱۵- در یک سیستم صف با گنجایش ۳ مشتری (دوتا در صف و یکی در جایگاه) تعداد مراجعین دارای توزیع پواسون با متوسط ۵ مشتری در ساعت و زمان سرویس نمایی با میانگین ۱۵ دقیقه برای هر مشتری میباشد.

الف ـ شکل نرخ را رسم کرده و حساب کنید در چند درصد اوقات سیستم تهی می‌باشد؟ (در دراز مدت)

ب ـ چند درصد از مشتریها از دست می‌روند؟ (در دراز مدت)
ج ـ اگر گنجایش تغییر نکند ولی تعداد جایگاههای سرویس دو تا گردد به سؤالات فوق جواب دهید.
د ـ چنانچه زیان هر مشتری از دست رفته ۵۰ تومان و هزینهٔ هر ساعت انتظار هر مشتری (در سیستم) ۱۰ تومان باشد. و هزینه هر جایگاه اضافی ۲۰۰ تومان در ساعت باشد. اگر گنجایش تغیر نکند تعداد بهینه جایگاههای سرویس چند تا است؟

16- consider an M / M / 1 system with parameters λ and μ where the customers are impatient. Specifically, on arrival ,a customer estimates its queuing time w and then either joins the queue with probability exp($-\alpha w$) or leaves without servic with probability [1-exp($-\alpha w$)]. the stimate is w=k/μ when the arrival finds k users in system. Assume $\alpha > 0$.

a) find the state distribution of the system at equibibrium.(P_0 and P_k).

b) what will be distribution of system state as seen by an arriving customer who aetually joins the system? ($P_r = P$ (arriving customer sees r in system (befor joining the system))=?)

۱۷- پس از اتمام یک مهمانی بزرگ حدود ۱۰۰۰ ظرف باید شسته شود. این کار توسط دو نفر که یکی ظرف‌ها را می‌شوید و دیگری خشک می‌کند، باید انجام پذیرد. کسی که ظرف‌ها را می‌شوید، بر طبق فرآیند پواسون با متوسط هر دقیقه یک ظرف عمل نموده و کسی که ظرف‌ها را خشک می‌کند، بر طبق توزیع نمایی با متوسط ۴۵ ثانیه برای هر ظرف عمل می‌کند. متوسط تعداد ظرف‌های بین این دو نفر چقدر است؟

۱۸- در ساعاتی که کشیک شب یک مؤسسه کار می‌کند، ورودی‌ها بر طبق فرآیند پواسون با میانگین ۱۰ نفر در ساعت به او مراجعه می‌کند. زمان لازم برای خدمت‌دهی به هر مشتری مراجعه کننده بر طبق توزیع نمایی با متوسط ۴ دقیقه می‌باشد:
الف ـ احتمال تشکیل شدن صف چقدر است؟
ب ـ میانگین طول صف چند نفر است؟
ج ـ متوسط زمانی که یک مشتری در صف طی می‌کند چقدر است؟
د ـ احتمال اینکه یک مشتری بیش از ۵ دقیقه در صف بماند چقدر است؟
ه - اگر این کشیک در زمان‌های بیکاری خود بتواند در هر ساعت ۲۰ صفحه از یک کتاب را مطالعه نماید، در یک شیفت کاری ۵ ساعته او چند صفحه از کتاب را مطالعه خواهد نمود؟

۱۹- ورود کامیون‌ها به یک ایستگاه بازرسی در گمرک، بر طبق فرآیند پواسون با متوسط ۱۰ کامیون در ساعت است. در این ایستگاه کامیون‌ها توسط یک فرد مورد بازرسی قرار می‌گیرند که مدت زمان بازرسی توسط او یک متغیر تصادفی نمایی با متوسط ۵ دقیقه است.

الف ـ اگر یک کامیون هنگام نزدیک شدن به ایستگاه از دور مشاهده کند که ایستگاه دارای صف نسبتا طولانی است، احتمال اینکه پس از نزدیک شدن مشاهده نماید که طول این صف از ۳ کامیون بیشتر است، چقدر است؟

ب ـ متوسط زمان انتظار هر اتومبیل در این ایستگاه بازرسی چقدر است؟

ج ـ چند درصد کامیون‌ها بیشتر از نیم ساعت در صف منتظر می‌مانند؟

دـ اگر کامیون‌هایی که در صف منتظر می‌مانند، موتور خود را خاموش ننمایند و ادارهٔ گمرکات به ازاء هر دقیقه زمانی که آنها در صف منتظر می‌ماند به هر اتومبیل ۱۰ ریال (بابت سوخت مصرفی) بپردازد، این اداره به طور متوسط به هر اتومبیلی که در صف می‌ماند، چقدر پول می‌پردازد؟

ه ـ اگر مدیریت این ایستگاه بازرسی تصمیم بگیرد که جهت انجام عملیات بازرسی از یک دستگاه اتوماتیک استفاده نماید که زمان انجام بازرسی توسط این دستگاه متغیر تصادفی نمایی نبوده بلکه دقیقا در هر ۴ دقیقه یک کامیون را بازرسی می‌نماید، چند درصد اوقات این دستگاه مشغول به کار خواهد بود؟

۲۰- اگر در مدل M/M/1 مقدار λ و μ دو برابر شود، چه تأثیری بر روی معیارهای ارزیابی سیستم خواهد گذاشت؟

۲۱- دو سیستم صف زیر را در نظر بگیرید.

الف ـ یک سیستم M/M/1 با نرخ ورودی λ و نرخ سرویس 3μ

ب ـ یک سیستم M/M/3 با نرخ ورودی λ و نرخ سرویس μ برای هر سرویس‌دهنده.

با توجه به نمودار نرخ (Rate Diagram) بگویید که کدامیک را شما ترجیح می‌دهید؛ یعنی کدام یک W و L کوچکتری خواهد داشت.

۲۲- خیابان‌های شهری ۱۰۰۰۰ لامپ دارد. بررسی‌های انجام شده نشان داده که در هر زمان ۱۰۰۰ تا از آن ها سوخته است. یک لامپ خیابان به‌طور متوسط پس از ۱۰۰ روز می‌سوزد. شهرداری با شرکتی قرارداد بسته که لامپ‌های سوخته را تعویض نماید. در این قرارداد آمده است که به طور متوسط هر لامپ سوخته ظرف ۷ روز تعویض گردد. آیا شما فکر می‌کنید که شرکت مذکور می‌تواند به تعهد خود عمل کند یا خیر؟ چرا؟

۲۳- در خانهٔ من از دو لامپ استفاده می‌شود. به‌طور متوسط یک لامپ ۲۲ روز روشنایی می‌دهد که توزیع آن نمایی می‌باشد. هنگامی که یک لامپ بسوزد، به‌طور متوسط دو روز زمان می‌خواهد که آن را عوض کنم و این زمان هم توزیع نمایی دارد.

الف ـ نمودار نرخ این سیستم صف را بکشید.

ب ـ نسبت زمانی که هر دو لامپ کار می‌کنند را به دست آورید.

پ ـ نسبت زمانی که هیچ کدام کار نمی‌کند را به دست آورید.

۲۴- در یک کارگاه به‌طور متوسط ۱۰ تعمیرکار در ساعت به مرکز ابزار جهت دریافت ابزار مراجعه می‌کنند. در حال حاضر مرکز ابزار را یک نفر اداره می‌نماید که ساعتی ۶ دلار به وی پرداخت می‌گردد و وی به‌طور متوسط ۵ دقیقه صرف انجام در خواست‌های هر تعمیرکار می‌نماید. هر ساعتی را که یک تعمیرکار در انتظار می‌گذراند -شامل زمان سرویس- برای کارگاه ۱۰ دلار هزینه در بر دارد. مدیر کارگاه می‌خواهد بداند که آیا یک دستیار با مزد ۴ دلار در ساعت استخدام کند که متوسط زمان سرویس را به ۴ دقیقه برساند یا خیر؟ فرض کنید زمان بین ورودی‌ها و زمان سرویس دارای توزیع نمایی هستند.

۲۵- یک جایگاه سرویس با ظرفیت ۳ تا مشتری شامل یک سرویس‌دهنده بوده که به‌طور متوسط ۲ تا مشتری را در ساعت سرویس می‌دهد و زمان سرویس دارای توزیع نمایی می‌باشد. به‌طور متوسط در هر ساعت ۳ تا مشتری به جایگاه مراجعه می‌کند که زمان بین ورودیها نیز دارای توزیع نمایی می‌باشد.

الف ـ به‌طور متوسط چند تا مشتری بالقوه وارد سیستم می‌گردد.

ب ـ احتمال اینکه سرویس‌دهنده مشغول باشد چیست.

۲۶- نرخ ورود به جایگاه سرویس $20-5j$ در ساعت برای $0 \le j \le 4$ می‌باشد که در آن j تعداد مشتری در سیستم می‌باشد. سود خالص هر مشتری ۰/۵ دلار و مزد هر سرویس‌دهنده ۳ دلار در ساعت است. یک سرویس‌دهنده به‌طور متوسط در هر ساعت به ۱۰ مشتری سرویس می‌دهد. چند تا سرویس‌دهنده باید استخدام گردند تا سود حاصله حداکثر گردد. فرض کنید که زمان سرویس و زمان بین ورودی‌ها دارای توزیع نمایی هستند.

۲۷- به‌طور متوسط ۱۰۰ تا مشتری در ساعت وارد یک بانک می‌شوند. متوسط زمان سرویس هر مشتری یک دقیقه می‌باشد. زمان سرویس و زمان بین ورودی‌ها دارای توزیع نمایی هستند. مدیر بانک می‌خواهد مطمئن گردد که مشتریانی که بیش از ۵ دقیقه در صف (نه زمان سرویس) در انتظار می‌مانند کمتر یا مساوی یک درصد کل مشتریان است. اگر سیاست بانک این باشد که تنها یک صف تشکیل گردد تعداد باجه‌های بهینه را بدست آورید.

۲۸- در یک سیستم صف یک جایگاه سرویس وجود دارد. هنگامی که یک مشتری وارد می‌گردد سرویس‌دهنده تصمیم می‌گیرد که آیا وی به سرویس نیاز دارد یا خیر. احتمال اینکه یک مشتری به سرویس نیاز نداشته باشد -یعنی زمان سرویس اش صفر باشد- ۰/۳ می‌باشد. احتمال این که یک مشتری به سرویس نیاز داشته باشد ۰/۷ است و در این صورت زمان سرویسش ده دقیقه است. اگر تعداد ورودی‌های سیستم دارای توزیع پواسون با میانگین ۵ در ساعت باشد مطلوب است:

الف ـ L_q, L, W_q, W برای این سیستم؟
ب ـ احتمال اینکه سیستم تهی باشد.
ج ـ احتمال اینکه در اولین لحظه پس از خروج یک مشتری از سیستم ۱۰ مشتری در سیستم باشد مشروط بر اینکه در هنگام شروع سرویسش ۴ مشتری در سیستم بوده باشد.

۲۹- در یک سیستم صف M/M/1 اگر ورودی‌ها به صورت گروه ۶ نفری باشند ولی سرویس به صورت انفرادی صورت گیرد. با فرض $\lambda = 1$ در ساعت و $\mu = 20$ در ساعت:
الف ـ آیا فرآیند فوق یک فرآیند زادومیر است یا خیر؟ چرا؟
ب ـ شکل نرخ سیستم فوق را رسم کنید.

۳۰- یک کتابخانه عمومی دارای یک کتابدار است. اعضای کتابخانه طبق فرآیند پواسون با میانگین ۱۰ نفر در ساعت وارد می‌شود. مدت زمانی که طول می‌کشد تا این کتابدار به تقاضای یک عضو رسیدگی کند متغیری نمایی با میانگین ۵ دقیقه است:
الف ـ چند درصد اوقات این کتابدار بیکار است؟
ب ـ احتمال اینکه ۳ نفر منتظر باشند تا کتابدار به تقاضای آن‌ها رسیدگی کند؟
ج ـ به طور متوسط یک مشتری چه مدت منتظر می‌ماند تا کتابدار به تقاضای او رسیدگی کند؟
د ـ به طور متوسط چند نفر منتظر هستند تا کتابدار به تقاضای آن‌ها رسیدگی کند؟
ه ـ از لحظهٔ ورود یک مشتری تا زمانی که به کار او رسیدگی شود به‌طور متوسط چقدر طول می‌کشد؟

۳۱- دستگاه بسته‌بندی یک واحد صنفی، هر کالا را در مدت ۵ دقیقه بسته‌بندی نموده و برای فروش آماده می‌سازد. تعداد قطعات ساخته شده در هر ساعت ۱۱۰ قطعه می‌باشد و قسمت بسته‌بندی گنجایش ذخیره ۴ قطعه وجود دارد. درصورتی‌که از ابتدا در قسمت بسته‌بندی کالایی وجود نداشته باشد. مطلوبست:
الف ـ تابع تعداد کالایی که در انتظار بسته‌بندی می‌باشند.
ب ـ مدت زمانیکه n امین کالا بایستی در صف منتظر بسته‌بندی بماند و زمانی‌که امکان ورود کالا به قسمت بسته‌بندی وجود ندارد را تعیین نمایید.
ج ـ به عنوان مدیریت این واحد چه پیشنهادی را برای بهبود وضعیت بخش بسته‌بندی دارید؟

۳۲- فرض کنید که در یک سیستم صف M/M/7/8، زمانی وارد شوید که همهٔ سرویس‌ها مشغول باشند. در این صورت با چه احتمالی سرویس شما قبل از حداقل یکی از هفت نفر دیگر تمام می‌شود؟

۳۳- یک سرویس‌دهنده در زمان $t = 0$ شروع به کار می‌کند و تجربه نشان داده است که ورود مشتریان دارای توزیع پواسون با پارامتر λ می‌باشد. اگر s زمان لازم برای انجام یک سرویس، p احتمال این که یک

مشتری در حالت تعادل صف معطل نشود و W متوسط مدت انتظار یک مشتری در حالت تعادل صف باشد، p و W را در شرایط خاص زیر بدست آورید:

الف) مدت زمان سرویس S ثابت و برابر با c باشد.

ب) مدت زمان سرویس S دارای توزیع نمایی با پارامتر μ باشد.

۳۴- در هر یک از موارد زیر صف مربوطه را تشریح نموده و ساختار آن را مشخص نمایید.

الف) فرود هواپیما در یک فرودگاه

ب) عبور از محل‌های کنترل سوپر مارکت

پ) مشتریان متفاوت در اداره پست

ت) پرداخت عوارض عبور از یک اتوبان

ث) زدن بنزین دریک پمپ بنزین با باندهای مختلف

ج) مراجعه به کارواش با امکانات اتوماتیک

چ) تماس‌هایی که با یک مرکز تلفن برقرار می‌شود

ح) وقت گرفتن بیماران از منشی یک پزشک

خ) قطعات الکترونیکی در یک خط مونتاژ که شامل سه مرحله کار و یک مرحله بازرسی در پایان خط می‌باشد.

۳۵- سه مثال از تشکیل یک صف متفاوت با موارد ذکر شده در تمرین ۱ بزنید و ضمن تشریح آن ساختار صف را نیز مشخص نمایید.

۳۶- کالاهایی به‌طور یکنواخت با نرخ یک کالا در هر ۵ دقیقه به یک محل بازرسی که در ابتدا بیکار فرض شده است وارد می‌شوند. با در نظر گرفتن زمان اولین ورود در زمان صفر زمان‌های تکمیل بازرسی برای اولین ۱۰ کالا به ترتیب به صورت زیر مشاهده شده‌اند:

۷ ۹ ۱۳ ۲۴ ۳۰ ۳۳ ۳۴ ۳۹ ۴۵ ۵۰

با استفاده از این داده‌ها و شبیه‌سازی دستی برای ۵۰ دقیقه، نتایج نمونه‌ای زیر را به دست آورید:

الف) متوسط تعداد کالا در سیستم.

ب) درصد زمان بیکاری سیستم.

۳۷- برای سیستم صف‌های زیر مطلوبست مقادیر $w_q^{(n)}, t_i, n(t)$.

الف) $\frac{1}{\lambda}=\frac{2}{3}\ ,\ \frac{1}{\mu}=4\frac{2}{3}\ ,\ k=7$

ب) $\frac{1}{\lambda}=2\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{\mu}=3\frac{1}{3}\ ,\ k=6$

۳۸- برای سیستم صف معین[۱] زیر مقادیر $w_q^{(n)}, t_i, n(t)$ را محاسبه کنید:

$$\frac{1}{\lambda}=5\ ,\ \frac{1}{\mu}=2\frac{2}{3}\ ,\ M=15$$

۳۹- قسمت الف مسئله ۲ را با پیدا کردن اولین مشتری که سعی می‌کند وارد سیستم شود و می‌داند که اگر وارد سیستم شود، زمان انتظار او در سیستم از $\frac{(k-1)}{\mu}$ بزرگتر خواهد بود، حل کنید. (چرا این کار را انجام می‌دهیم؟)

۴۰- فرض کنید ورود افراد می‌تواند به صورت یکی یکی یا در دسته‌های دوتایی اتفاق بیفتد. توزیع احتمال اندازه دسته‌ها به صورت زیر است:

$$f(1)=p \qquad , \qquad f(2)=1-p \quad , \qquad (0<p<1)$$

و زمان بین ورودی‌های متوالی دسته‌ها دارای توزیع نمایی است به صورت:

$$a(t)=\lambda e^{-\lambda t} \qquad (t\geq 0)$$

نشان دهید که توزیع احتمال تعداد افراد در زمان t یک توزیع پواسون مرکب است با:

$$P_n(t)=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{P^{n-2k}(1-P)^k(\lambda t)^{n-k}}{(n-2k)!k!}$$

که در آن $\left[\frac{n}{2}\right]$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی $\frac{n}{2}$ است.

۴۱- اگر در سیستم M/M/1 مقادیر λ و μ دو برابر شوند W, L_q, L چه تغییری می‌کنند؟

۴۲- یک دانشجو در کافه تریایی که نوشیدنی‌های ساده در اختیار دانشجویان قرار می‌دهد، کار می‌کند. در مدت خدمتش او به تنهایی کار می‌کند. به نظر می‌رسد ورود مشتریان دارای توزیع پواسون با میانگین ۱۰ نفر در ساعت باشد. در هر مرتبه یک نفر سرویس می‌شود (سرویس گروهی نیست) و زمان سرویس دارای توزیع نمایی نیست با میانگین ۴ دقیقه.

مطلوبست:

۱- Deterministic

الف ـ احتمال این که صف تشکیل شود.
ب ـ احتمال این که یک مشتری بیشتر از ۵ دقیقه در صف انتظار بماند.
ج ـ متوسط زمانی که یک مشتری در سیستم منتظر می‌ماند.
د ـ این دانشجو دوست دارد وقت بیکاری خودش را با خواندن روزنامه بگذراند. اگر او موفق به این کار شود، به‌طور متوسط در هر ساعت ۲۲ صفحه مطالعه می‌کند.
در مدتی که او مشغول به کار است به طور متوسط چند صفحه می‌تواند مطالعه کند.

۴۳- نشان دهید دو عبارت $\lambda' = \lambda\left(1-P_k\right)$ و $\lambda' = \mu\left(L-L_q\right)$ برای میانگین نرخ ورود مؤثر در سیستم صف M/M/1/K با هم برابرند.

۴۴- برای سیستم صف M/M/1/3 با $\lambda = 4$ ساعت و $\frac{1}{\mu} = 15$ دقیقه، مطلوبست: احتمال این که یک مشتری بیش از ۲۰ دقیقه در صف منتظر بماند؟

۴۵- در یک کارواش کوچک، تا وقتی که شستن یک ماشین کامل نشده است، ماشین بعدی نمی‌تواند وارد عمل شستشو شود. ظرفیت نگهداری اتومبیل در حوالی کارواش حداکثر ۱۰ تا است (شامل ماشینی که تحت سرویس است). معلوم شده است که ورودها دارای توزیع پواسون با نرخ ۲۰ ماشین در ساعت و مدت زمان سرویس دارای توزیع نمایی با میانگین ۱۲ دقیقه است. به عنوان نتیجه‌ای از ظرفیت محدود، حساب کنید در هر ۱۰ ساعت از روز چه تعداد اتومبیل از دست می‌رود؟

۴۶- (در مثال آرایشگاه آقای کات). فرض کنید که اگر هیچ جای خالی برای نشستن وجود نداشته باشد مشتریان منتظر نمانند. در همسایگی آقای کات یک مرکز کامپیوتر قرار دارد که او می‌تواند اتاق کنفرانس آن را برای روزهای شنبه به قیمت ۴ دلار کرایه کند. آرایشگاه او روز شنبه از ساعت ۸ صبح تا ۲ بعدازظهر باز است و او برای اصلاح هر سر ۲/۲۵ دلار مزد می‌گیرد. در اینجا آقای کات می‌تواند ۴ صندلی بیشتر برای نشستن مشتریان قرار بدهد. آیا کرایهٔ این جا برای او مقرون به صرفه است؟

۴۷- با استفاده از روابط بین متوسط اندازه‌ها در سیستم صف M/M/1 نشان دهید متوسط زمان‌های بیکاری و شلوغی سیستم به ترتیب $1/\lambda$ و $1/(\mu-\lambda)$ است.

۴۸- در سیستم M/M/C/∞ مطلوبست احتمال اینکه k نفر یا بیشتر در سیستم باشند. برای هر $k \geq C$

۴۹- در سیستم M/M/C/∞ مطلوبست P_n بر حسب P_c و همچنین L_q و W_q (4) بر حسب P_c, ρ

۵۰- در سیستم M/M/C/∞ با استفاده از خصوصیات امید ریاضی نشان دهید $L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$

(راهنمایی: قرار دهید n متغیر تصادفی نشان دهندهٔ تعداد افراد در سیستم و N_q متغیر تصادفی نشان دهندهٔ تعداد افراد در صف. در این صورت داریم:

$$N_q = \begin{cases} N - N, N < C \\ N - C, N \geq C \end{cases}$$

حال با استفاده از رابطه های P_0, P_n عبارت فوق را نتیجه بگیرید.)

۵۱- در سیستمM/M/C/∞ نشان دهید احتمال اینکه یک سرویس‌دهنده مشغول باشد برابراست با $\frac{\lambda}{c\mu}$.

۵۲- یک بانک کوچک دو باجه دارد: یکی جهت دریافت ودیگری جهت پرداخت. ورود مشتریان به هر کدام از باجه‌ها پوآسون با نرخ ۲۰ نفر در ساعت و کل نرخ ورود به بانک ۴۰ نفر در ساعت است.

زمان سرویس برای هر باجه دارای توزیع نمایی با متوسط ۲ دقیقه است. به منظور جلوگیری از حالتی که جلوی یکی از باجه‌ها شلوغ و باجه دیگر بیکار است، رییس بانک تصمیم دارد وضعیت جدیدی به وجود بیاورد. به این ترتیب که هر دو باجه وظیفهٔ پرداخت و دریافت را بر عهده بگیرند.

اما چون هر دو کار توسط هر دو باجه انجام می‌شود میانگین نرخ سرویس به ۲/۴ دقیقه افزایش می‌یابد. با در نظر گرفتن موارد زیر سیستم کنونی بانک را با سیستمی که قرار است اجرا شود مقایسه کنید:

الف) متوسط کل مشتریانی که در بانک هستند

ب) متوسط زمان انتظار هر مشتری در بانک

ج) احتمال اینکه یک مشتری بیش از ۵ دقیقه منتظر سرویس بماند

د) متوسط زمان بیکاری هر باجه.

۵۳- سیستم صفی را با یک کانال سرویس در نظر بگیرید. ورود مشتریان پواسون با نرخ ۳۰ نفر در ساعت است. سرویس با یک ماشین انجام می‌شود که با استفاده از آن، زمان لازم برای سرویس هر مشتری دقیقا ۱/۵ دقیقه است. فرض کنیم کار سرویس را با ماشین دیگری که زمان سرویس آن نمایی است انجام بدهیم. متوسط نرخ سرویس این ماشین چقدر باشد تا:

الف) متوسط زمان انتظار در سیستم تغییر نکند.

ب) متوسط طول صف تغیر نکند.

۵۴- یک تولید کننده مجموعه‌های تلوزیونی، قبل از فرستادن تولیدات خود به انبار، آن‌ها را کنترل می‌کند. هر مورد توسط یک کارشناس کنترل می‌شود. در موردی که حجم کار زیاد است رییس معتقد است که آزمایش یک حالت خاص دارد و باید مطالعه مفصلی توسط واحد کنترل انجام شود. ورود تولیدات به

مرکز کنترل، پواسون با نرخ ۵ تا در ساعت است. در واحد کنترل ۱۰ آزمایش جداگانه صورت می‌گیرد و هر کدام به‌طور متوسط ۵ دقیقه وقت لازم دارد. تجربه نشان داده است که زمان هر تست تقریبا نمایی است.

مطلوبست متوسط زمان انتظار یک مجموعه در محل کنترل، متوسط تعداد مجموعه‌ها در محل کنترل و متوسط زمان بیکاری واحد کنترل.

جواب:

۱)

$$P\left(N\left(t\right)=k\right)=e^{-\lambda t}\frac{\left(\lambda t\right)^{k}}{k!}$$

$N\left(t\right)$: تعداد اتفاق‌ها در یک فاصله ثابت به طول t

λ: نرخ رخداد اتفاقات در واحد زمان

$$P\left(N\left(20\right)=2\right)=e^{-\frac{1}{4}.20}\frac{\left(\frac{1}{4}20\right)^{2}}{2!}=0.0842$$

۱۰)

$$\lambda=15/hour,\mu=\frac{60}{4}=15$$

$$\lambda_n=b_n\lambda\rightarrow\begin{cases}\lambda_0=15\\ \lambda_1=15\times\frac{2}{3}=10\\ \lambda_2=15\times\frac{1}{3}=5\\ \lambda_3=0\end{cases}$$

معادلات تعادل $\begin{cases}......\\ ....\\ ....\end{cases}$ $\qquad P_0=\frac{9}{26}$

$$L=E\left(N\right)=\sum_{0}^{\infty}nP_n=0\times\frac{9}{26}+1\times\frac{9}{26}+2\times\frac{3}{13}+3\times\frac{1}{13}=...$$

$$\overline{\lambda}=\sum_{0}^{\infty}\lambda_nP_n=15\times\frac{9}{26}+10\times\frac{9}{26}+5\times\frac{3}{13}=...$$

$$w=\frac{L}{\overline{\lambda}}=...$$

۱۱)

N: تعداد لامپهای سوخته

لامپ می‌سوزد $\lambda=\frac{1}{22}\leftarrow 22$ = زمان کارکرد یک لامپ

۱۲)

$$\lambda = 30, \mu = 50, \rho = \frac{\lambda}{s\mu} = 0.6$$

$$c_j = \frac{\lambda_0 \ldots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \ldots \mu_j} = \frac{\lambda \ldots \lambda}{\mu \ldots \mu} = \rho^j = (0.6)^j$$

$$P_0 = \left[\sum_{j=0}^{\infty} c_j\right]^{-1} = \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} (0.6)^j\right]^{-1} = \left[1 + \frac{0.6}{1-0.6}\right]^{-1} = 0.4$$

$$P_n = c_n P_0 = (0.6)^n P_0 = 0.4 \times (0.6)^n$$

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) P_n = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) P_n = \ldots.$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \ldots$$

۱۳)

$\lambda =$ نرخ مراجعه $= 20/hour$ و $\mu = 5/hour$

الف)

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{1}^{\infty} c_i}, c_i = \frac{\lambda_0 \ldots \lambda_i}{\mu_1 \ldots \mu_{i+1}} = \rho^i$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{1}^{10} \rho^i} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} = 1.8 \times 10^{-7} \cong 0$$

$$P_n = \rho^n P_0 \rightarrow P_{11} = 4^{11} \times 1.8 \times 10^{-7} = 0.75$$

$$L = \sum_{0}^{10} n P_n = P_0(\rho + 2\rho^2 + \ldots) = 10.67$$

$$L = L_q + \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$$

ب)

$$w = \frac{l}{\bar{\lambda}} = \frac{10.67}{5} = 2.133$$

ج)

$$\bar{\lambda} = \sum_{0}^{10} \lambda_n P_n = \lambda(1 - P_{11}) = 5$$

۱۴)

الف)

$$2P_1 = 10P_0 \rightarrow P_1 = 5P_0$$
$$4P_2 + 10P_0 = 12P_1 \rightarrow P_2 = \frac{25}{2}P_0$$
$$6P_3 + 10P_1 = 14P_2 \rightarrow P_3 = \frac{125}{6}P_0$$
$$6P_4 + 10P_2 = 16P_3 \rightarrow P_4 = \frac{625}{18}P_0$$
$$\sum_0^4 P_i = 1$$

ب)

$$L = \sum_0^4 nP_n = 3.1245$$
$$w = \frac{L}{\bar{\lambda}} = 0.5883$$

ج)

$$\Pr\left(T_2 > \min\left(T_1, T_3\right)\right) = \frac{2}{3}$$

چون نرخ سرویس هر سه جایگاه با هم برابر است احتمال اینکه جایگاه اول تمام شود $\frac{1}{3}$ و احتمال اینکه جایگاه دوم تمام شود $\frac{1}{3}$ است.پس احتمال اینکه جایگاه دوم نباشد $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ است.

د)

$$P_4 + P_3 + \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_1 = ...$$

ه)

$$3P_0 + 2P_1 + P_2 = ...$$

۱۵)الف و ب)

$$\begin{cases} 5P_0 = 4P_1 \\ 9P_2 = 5P_1 + 4P_3 \\ 9P_1 = 5P_0 + 4P_2 \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_0 = \frac{64}{369} = 17.34\% \\ P_1 = \frac{80}{369} \\ P_2 = \frac{100}{369} \\ P_3 = \frac{125}{369} = 33.88\% \end{cases}$$

ج-الف و ج-ب)

$$\begin{cases} 5P_0' = 4P_1' \\ 9P_1' = 5P_0' + 8P_2' \\ 13P_2' = 5P_1' + 8P_3' \\ \sum_0^3 P_i' = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_0' = \dfrac{256}{901} = 28.41\% \\ P_1' = \dfrac{320}{901} \\ P_2' = \dfrac{200}{901} \\ P_3' = \dfrac{125}{901} = 13.87\% \end{cases}$$

د)

هزینه + $P_3 \times \lambda \times$ هزینه $\times L = 50 \times 5 \times 0.3388 + 10 \times 1.78 < 50 \times 5 \times 0.1387 + 10 \times 1.22 + 200$

$$L_0 = \sum nP_n = 1.78, L_0' = 1.22$$

۱۶)

(a

$$\lambda_k = \lambda e^{-\frac{k\alpha}{\mu}}, \mu_k = \mu$$

$$c_k = \frac{\lambda_0 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \ldots \mu_k} = \rho^k \left(1 \times e^{-\frac{\alpha}{\mu}} \times e^{-\frac{2\alpha}{\mu}} \times \ldots \times e^{-(k-1)\frac{\alpha}{\mu}} \right) = \rho^k e^{-\frac{\alpha}{\mu}\frac{k(k-1)}{2}}$$

$$\rightarrow P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{K=1}^{\infty} \rho^k e^{-\frac{\alpha k(k-1)}{2}}} \rightarrow P_k = c_k P_0 = P_0 \rho^k e^{-\frac{\alpha}{\mu}\frac{k(k-1)}{2}}$$

(b

Pr=P(arriving customer sees r in system(before joining sys)
ΔE=even of an arrived in (t,t+Δt) which actually joins the sys.
Ei=event of the sys. Being in state i.

$$\Pr = P\left(E_r / \Delta E \right) = \frac{P(E_r) P(\Delta E | E_r)}{P(\Delta E)}$$

$$= \frac{P(E_r) P(\Delta E | E_r)}{\sum_{i=0}^{\infty} P(E_i) P(\Delta E / E_i)}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_r \lambda(\Delta t) e^{-\frac{\alpha}{\mu} r}}{\sum_{i=0}^{\infty} P_i \lambda(\Delta t)}$$

$$= \frac{\rho^r e^{-\frac{\alpha}{\mu}\frac{r(r+1)}{2}}}{\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i e^{-\frac{\alpha i(i+1)}{2\mu}}}$$

منابع

1. برادلی اسپ، هکس آسی و مگننتی ت ال. ًبرنامه‌ریزی ریاضی کاربردیً. ترجمه ذکائی آشتیانی ﮬ. دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۶۵.
2. آشنایی با تحقیق در عملیات تألیف : حمدی طه، ترجمه : محمدباقر بازرگان ، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی سال ۱۳۷۵.
3. آریانژاد مبق و سجادی سج. "تحقیق در عملیات ۲ –ویرایش جدید": مرکز انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران-شماره ۳۶۷، ۱۳۸۶.
4. آریانژاد م¬ب¬ق و سجادی س¬ج. " برنامه ریزی خطی": مرکز انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران، ۱۳۸۵.
5. تحقیق در عملیات – برنامه ریزی خطی تألیف: فردریک س . هیلبر و جرالد ج . لیبرمن، جلد اول ، ترجمه: محمدمدرس و اردوان آصف وزیری ، انتشارات تندر، سال ۱۳۷۰.
6. برنامه ریزی خطی، تألیف: مختار بازارا ، جان جی. جارویس، حنیف دی . شرالی ، ترجمه: اسماعیل خرم، انتشارات نشر کتاب دانشگاهی سال ۱۳۸۰.
7. برنامه ریزی خطی (تحقیق در عملیات) به همراه سی دی و راهنمای نرم افزار لینگو ، تألیف: واین ال. وینستون ، ترجمه: رضا زنجیرانی فراهانی، نسرین عسگری، محمد مدرس یزدی . انتشارات ترمه، سال ۱۳۷۶.
8. مدرس یزدی م. ًنظریه صفً. مرکز نشر دانشگاهی.
9. قاسمی‌طاری ف، فاطمی قمی مت. "توالی عملیات و زمانبندی ": انتشارات دانشگاه صنعتی شریف، چاپ اول، ۱۳۷۶.
10. صباغ مس و قاسمی م. "یک راه حل ابتکاری آینده نگر برای مسئله فروشنده دوره گرد نامتقارن": مجله علوم دانشگاه شهید چمران، شماره۱۰ دوره جدید، ۱۳۸۲.
11. صباغ مس و امیری ع. "روش ابتکاری ساخت و بهبود تور مسئله فروشنده دوره گرد نامتقارن": نشریه دانشکده فنی دانشگاه تهران، شماره ۴ دوره جدید، ۱۳۸۵.
12. D. S. Johnson, G. Gutin, L. A. McGeoch, A.Yeo,W. Zhang, and A. Zverovitch. Experimental analysis of heuristics for the ATSP. In G. Gutin and A. Punnen, editors, The Traveling Salesman Problem and its Variations, pages, 369-487. Kluwer Academic Publishers, 2002.
13. G. Reinelt. TSPLIB – A traveling salesman problem library. ORSA Journal on Computing, Vol.3-4, pages, 376–385, 1991. See also http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95./
14. Cirasella, J., Johnson, D.S., McGeoch, L.A. and Zhang W.: The Asymmetric Traveling Salesman Problem: Algorithms, Instance Generators, and Tests. In A.L. Buchsbaum and J. Snoeyink, eds., Algorithm Engineering and Experimentation, Third International Workshop, ALENEX, 2001.

15. Cirasella J, Johnson DS, McGeoch LA, Zhang W. The asymmetric traveling salesman problem: algorithms, instance generators, and tests. ALENEX 2001 Proceedings, Springer Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2153, pages, 32–59. Berlin: Springer; 2002 .
16. Tucker, "On Directed Graphs and Integer Programs". IBM Mathematical Research Project Technical Report, Princeton University 1960.
17. Apostol T. M. (1975). Mathematical Analysis, Second Edition, Addison Wesley Publishing Company, Reading Massachusetts, pp. 127-133.
18. Cooper M. W. (1981). A survey of methods for pure nonlinear integer programming. Management Science, 27: pp. 353-361.
19. Dell'Amico, M. and Martello, S. (1997). Linear assignment. In M. Dell'Amico, F. Maffioli, and S. Martello, editors, Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization, pp. 355-371. Wiley, Chichester.
20. Dell'Amico, M. and Toth, P.(2000). Algorithms and Codes for Dense Assignment Problems: the State of the Art. Discrete Applied Mathematics, 100, pp. 17-48.
21. Derigs, U. (1985). The shortest augmenting path method for solving assignment problems-motivation and computational experience. In C. L. Monma, 14 editor, Algorithms and Software for Optimization- part I, volume 4 of Ann. Oper. Res., pp. 57- 102. Baltzer, Basel.
22. Gomory R. E. (1963). An all-integer programming algorithm. In: J.F. Muth and G.L. Thompson, Editors, Industrial Scheduling, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ Chapter 13.
23. Hansen P. (1955). Methods of Nonlinear 0-1 Programming. Ann. Discrete Math., 1979; 5: pp. 53-70.
24. Kuhn, H.W. (1955). The Hungarian method for the assignment problem, Naval Research Logistics quarterly, 2, pp. 83-97 .
25. Kuhn, H.W. (1956).Variants of the Hungarian method for the assignment problem, Naval Research Logistics quarterly, 3, pp. 253-258.
26. Laporte, G. (1992). The traveling salesman problem: An overview of exact and approximate algorithms, European Journal of operational Research 59 pp. 1234-1247.
27. Lawler, E. L., Lenstra, J. K., et al. (1955). The traveling salesman problem, John Wiley and Sons Ltd., Chichester.
28. Lawler E. L. and Bell M. D. (1996). A method for solving discrete optimization problems. Operations Res. 14: pp. 1098-1112.
29. Sabbagh M S. (1983). A general lexicographic partial enumeration algorithm for the solution of integer nonlinear programming problems. Doctor of Science Dissertation, Department of Operations Research, The George Washington University, Washington D.C .
30. Sabbagh M S. (1997). A general lexicographic partial enumeration algorithm for the solution of integer nonlinear programming problems with discrete isotone nondecreasing objective function and constraints. Amirkabir 33: pp. 80-85.
31. Sabbagh, M. S., (2007). "An improved Partial Enumeration Algorithm for Integer Programming Problems". Accepted for publication by Journal of Annals of Operations Research.
32. Sabbagh, M. S., (2007). "A Partial Enumeration Algorithm for Pure Nonlinear Integer Programming". Accepted for publication by Journal of appllied Mathematical Modelling.
33. Sabbagh M S. (2007). A generalized implicit enumeration algorithm for the all integer maximization programming. Accepted for publication by Journal of Industrial Engineering International.

34. Nemhauser, G. & Wolsey, L. (1988), Integer and Combinatorial Optimization, Wiley, New York.