فصل اول

تعاریف و مفاهیم اولیه DEA

1-1 مقدمه

به منظور ارزیابی عملکرد واحدها و بخش‌ها، فعالیت‌های علمی زیادی صورت گرفته است.

مسلماً رابطه عملکرد با عوامل تأثیرگذار، تابعی به‌صورت $Y = f(U,V)$ اسـت کـه در آن ورودی (U,V)، خروجی Y را تولید می‌کند. بردار ورودی از دو قسمت عوامل قابل کنترل (U) و عوامل غیر قابل کنترل (V) تشکیل شده است.

تابع تولید، تابعی است که برای هر ترکیب از ورودی‌ها، ماکسیمم خروجی را می‌دهد. ایـن تـابع در علم اقتصاد از اهمیت بسیاری برخوردار است. زیرا با داشتن آن می‌توان مشخص کـرد کـه یـک واحـد خوب عمل می‌کند یا نه. به علت پیچیدگی فرآیند تولید، تغییر در تکنولوژی تولید و چند مقدار بـودن تابع تولید، تابع تولید در دسترس نیست. در روش‌های پارامتری با استفاده از یـک سـری مشـاهدات و داده‌ها سعی می‌کنند این تابع را تخمین بزنند. برای ایـن منظـور از فرآینـد بـرازش منحنـی اسـتفاده

می شود. ولی به‌دست آوردن تابع تولید با استفاده از این فرآیند ایراداتی دارد که در زیر به تعدادی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

1) روابط بین ورودی‌ها و خروجی‌ها به طور دل‌خواه در نظر گرفته می‌شود. مثلاً در اقتصاد رابطه‌ی $Q = x_o A_1^{x_1} A_2^{x_2} \dots A_n^{x_n}$ را برای تابع تولید در نظر می‌گیرند، که در آن A_1 و A_2 و … و A_n ورودی‌ها، Q خروجی و x_1 و x_2 و … و x_n پارامترهای تابع‌اند، که باید تعیین شوند.

2) اگر بعد بردار خروجی بیش از یک باشد، این روش را نمی‌توان به‌کار برد و برای مسائلی به‌کار می‌رود که فقط یک خروجی دارند.

3) منحنی به‌دست آمده، تمایل مرکزی دارد و باید به گونه‌ای آن را برطرف کرد.

عیوب فوق اساسی ترین ایرادات روش پارامتری بود، لذا در سال 1957 فارل[1]، روش غیر پارامتری را ارائه کرد که اساس کار چارنز[2]، کوپر[3] و رودز[4] بود و در ادامه به آن می پردازیم.

2-1 واحد تصمیم گیرنده

منظور از واحد تصمیم گیرنده، عبارت است از واحدی که با دریافت بردار ورودی مانند $(x_1, \dots, x_m)$، بردار خروجی $(y_1, \dots, y_s)$ را تولید می‌کند. منظور از واحدهای تصمیم گیرنده متجانس این است که واحدها عمل مشابه دارند و با دریافت ورودی‌های مشابه، خروجی‌های مشابه تولید می‌کنند. مانند شعبات یک بانک، کارخانجات یک شرکت خاص یا ادارات یک سازمان دولتی.

فرض کنیم n واحد تصمیم گیرنده داریم که با $DMU_j = (x_j, y_j)$ $(j = 1, \dots, n)$ نشان خواهیم داد. به طوریکه $x_j \in R^m$، $x_j \geq 0$ و $x_j \neq 0$،$(j = 1, \dots, n)$ نشان دهنده بردار ورودی و $y_j \in R^s$، $y_j \geq 0$ و $y_j \neq 0$، $(j = 1, \dots, n)$ نشان دهنده بردار خروجی است.

DMU_o $(o \in \{1, \dots, n\})$، نشان دهنده واحد تحت ارزیابی بوده و نماد $(*)$ نشان دهنده مقدار بهینه بودن متغیر است. ماتریس ورودی X، ماتریسی است که ستون‌های آن را بردارهای ورودی DMU_jها، $(j = 1, \dots, n)$ تشکیل داده است، یعنی $X = [x_1, \dots, x_n]$ و به‌طور مشابه ماتریس خروجی Y به‌صورت $Y = [y_1, \dots, y_n]$ در نظر گرفته می‌شود.

1) Farrell
2) Charnes
3) Cooper
4) Rohds

3-1 کارایی

کارایی به معنای خوب کار کردن، تحت تأثیر شاخص‌های درون سازمانی مثل سود هر واحد، فروش هر واحد و از این قبیل قرار دارد، که به‌صورت نسبت خروجی به ورودی بیان می شود:

ورودی/خروجی = کارایی

کارایی مطلق یک DMU، مقایسه عملکرد آن با استانداردهای کلی و کارایی نسبی، سنجش عملکرد یک DMU، نسبت به واحدهای دیگر آن مجموعه است.

چون استانداردهای کلی معمولا تعریف نشده و در صورت تعریف شدن، رسیدن به آن مشکل است، لذا کاربرد کارایی نسبی گسترده تر از کاربرد کارایی مطلق است.

اگر واحد تصمیم گیرنده مورد نظر دارای یک ورودی و یک خروجی باشد، با استفاده از رابطه فوق کارایی آن قابل محاسبه بوده و اندازه حاصل، کارایی مطلق آن واحد به شمار می آید.

در صورت وجود چند ورودی و چند خروجی برای واحد تصمیم گیرنده مورد نظر، نسبت مجموع وزن‌دار شده خروجی به مجموع وزن‌دار شده ورودی به‌صورت

$$E_o = \frac{u_1 y_{1o} + \cdots + u_1 y_{so}}{v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo}} \qquad (1-1)$$

کارایی آن واحد را اندازه گیری می کند، که در آن u_r قیمت خروجی rام یعنی y_r $(r = 1, \dots, s)$ و v_{i} هزینه ورودی iام یعنی x_i $(i = 1, \dots, m)$ است. کارایی فوق به کارایی اقتصادی معروف است.

قابل ذکر است که تخصیص وزن‌های مناسب به ورودی‌ها و خروجی‌ها، نقش تعیین کننده ای در اندازه کارایی دارد.

کارایی نسبی، از تقسیم اندازه کارایی هر واحد به بزرگترین آن‌ها حاصل می شود. بنابراین اندازه کارایی هر واحد، همواره کوچکتر یا مساوی یک بوده و حداقل یک واحد کارایی نسبی برابر یک دارد.

به‌طور مثال کارایی نسبی واحد تصمیم گیرنده o به صورت زیر به‌دست می آید:

$$RE_o = \frac{E_o}{max_j\{E_j\}}. \qquad (2-1)$$

4-1 تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، شامل تکنیک‌ها و روش‌هایی برای ارزیابی کارایی و یا سنجش بهره وری واحدهای تصمیم گیرنده است.

DEA در واقع تعمیم کار فارل در ابداع اولین روش غیر پارامتری است. فارل با استفاده از ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای تصمیم گیرنده و اصول حاکم بر آن‌ها، مجموعه ای با عنوان مجموعه امکان تولید، ارائه و قسمتی از مرز آن را به عنوان تابع تولید معرفی نمود.

این مرز را مرز کارا نیز می نامند و واحدهای تصمیم گیرنده ای که روی این مرز قرار می گیرند، کارا ارزیابی می شوند.

از آنجائیکه DEA، تکنیک ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم گیرنده است، حداقل یکی از واحدها روی مرز و بقیه واحدها در زیر آن قرار دارند. نام تحلیل پوششی داده‌ها از ویژگی پوششی بودن، منشأ گرفته است.

این روش در مقایسه با روش‌های قبلی دارای مزیت‌هایی است که در ادامه به آن اشاره می کنیم.

در روش‌های DEA بر خلاف برخی روش‌های عددی، مشخص بودن وزن‌ها از قبل و تخصیص آن‌ها به ورودی‌ها و خروجی‌ها لازم نیست. همچنین این روش‌ها نیازی به اشکال تابعی از قبل تعیین شده (مانند روش‌های رگرسیون آماری) و یا شکل صریح تابع تولید (مانند برخی روش‌های پارامتری) ندارند.

تحلیل پوششی داده‌ها، امکاناتی را برای مطالعه واحدهایی با چند ورودی و چند خروجی فراهم می‌کند. اسلوب تحلیل پوششی داده‌ها بر پایه جبر خطی بنا نهاده شده است و توانایی آن بیشتر به دلیل استفاده از برنامه‌ریزی خطی است. برنامه‌ریزی خطی، تحلیل پوششی داده‌ها را قادر می‌سازد، تا از روش‌های حل مسأله برنامه‌ریزی خطی و قضایای دوآلیتی استفاده کند و به این ترتیب منبع و مقدار ناکارایی را برای هر ورودی و خروجی مشخص کند.

DEA همچنین فرصت‌های زیادی را برای همکاری میان تحلیل‌گر و تصمیم گیرنده ایجاد می کند. این همکاری‌ها می تواند در راستای انتخاب ورودی و خروجی واحدهای تحت ارزیابی و چگونگی عملکرد و الگویابی نسبت به مرز کارا باشد.

1-5 مجموعه امکان تولید (PPS)

1-5-1 **تعریف (مجموعه امکان تولید)**. مجموعه فعالیت‌های شدنی، مجموعه امکان تولید نامیده شده و به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$T = \{(x, y) \in R^{m+s}$:بردار خروجی $y \geq 0$ بتواند به وسیله بردار ورودی $x \geq 0$ تولید شود$\}$.

مدل‌های DEA هر کدام به یک مجموعه امکان تولید یکتا وابسته هستند که مجموعه امکان تولید نیز به طور یکتا، توسط یک مجموعه از فرض‌ها و اصول معین ساخته می‌شود. برای معرفی مدل‌ها، از اصول زیر روی مجموعه امکان تولید T استفاده می‌شود:

اصل1 (شمول مشاهدات). همه فعالیت‌های مشاهده شده، یعنی $DMU_j = (x_j, y_j)$ $(j = 1, \dots, n)$، به T تعلق دارند. این بدیهی ترین اصلی است که روی T تحمیل شده و همه مدل‌های DEA این اصل را دارا هستند.

اصل2 (تحدب). اگر $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in T$ آنگاه برای هر $\lambda \in [0,1]$، $(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}, \lambda y + (1 - \lambda)\bar{y}) \in T$، یا به‌صورت نمادین:

$$\forall\ (x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in T, \forall\ \lambda \in [0,1]\ ;\ (\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}, \lambda y + (1 - \lambda)\bar{y}) \in T.$$

به عبارت دیگر T یک مجموعه محدب است.

اصل3 (بیکرانی اشعه یا بازده به مقیاس ثابت). به ازای هر $(x, y) \in T$ و هر $\lambda \geq 0$، داریم $(\lambda x, \lambda y) \in T$، یا به‌صورت نمادین:

$$\forall\ (x, y) \in T\ , \forall\ \lambda \geq 0; \quad (\lambda x, \lambda y) \in T.$$

اصل4 (امکان پذیری). اگر $(\bar{x}, \bar{y}) \in T$ و $x \geq \bar{x}$، آنگاه $(x, \bar{y}) \in T$ و اگر $y \leq \bar{y}$ آنگاه $(\bar{x}, y) \in T$، یا به‌صورت نمادین:

$$\forall\ (\bar{x}, \bar{y}) \in T\ , \begin{cases} \forall x\ ;\ \ x \geq \bar{x} \Longrightarrow (x, \bar{y}) \in T \\ \forall y\ ;\ \ y \leq \bar{y} \Longrightarrow (\bar{x}, y) \in T \end{cases}.$$

این اصل بیان می‌کند که اگر خروجی $\bar{y}$ توسط $\bar{x}$ تولید شود، آنگاه همین خروجی توسط هر ورودی بزرگتر از $\bar{x}$ نیز می‌تواند تولید شود و همچنین هر خروجی کمتر از $\bar{y}$ نیز می‌تواند توسط ورودی $\bar{x}$ تولید شود.

اصل5 (کمینه درونیابی). T اشتراک همه‌ی مجموعه‌هایی مانند T است که در اصل 1 و بعضی از اصول دیگر فوق صدق می‌کند.

6-1 مدل CCR [5]

این مدل، اولین مدل DEA برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم گیرنده است که در سال 1978 توسط چارنز، کوپر و رودز [3]، ارائه شد.

1-6-1 **قضیه**. یک مجموعه منحصر به فرد وجود دارد که در اصول 1 تا با 5 صدق می‌کند. این مجموعه به‌صورت زیر است:

$$T_{CCR} = \left\{(x, y): x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \,, y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \,, \lambda_j \geq \circ \;\; (j = 1, \dots, n)\right\}.$$

برهان: به مرجع [18] رجوع شود.

اگر در T_{CCR} امکان تولیدی مانند (x, y) یافت نشود که غالب بر (x_o, y_o) باشد، یعنی هیچ (x, y) یافت نشود که $(-x, y) \geq (-x_o, y_o)$ و نامساوی حداکثر در یکی از مؤلفه‌ها به‌صورت اکید برقرار باشد، آنگاه گوییم که (x_o, y_o) کارای نسبی است. در غیر این صورت ناکارا می‌باشد.

اگر یکی از حالات زیر رخ دهد آنگاه به وضوح (x_o, y_o) ناکارا خواهد بود:

1) اگر بتوان امکان تولیدی در T_{CCR} یافت که با ورودی کمتر از x_o، خروجی بیشتر یا مساوی y_o داشته باشد.

2) اگر بتوان امکان تولیدی در T_{CCR} یافت که با خروجی بیشتر از y_o، ورودی کمتر یا مساوی x_o داشته باشد.

3) اگر بتوان امکان تولیدی در T_{CCR} یافت که با ورودی کمتر از x_o، خروجی بیشتر از y_o داشته باشد.

حالت اول به حل مدل زیر منجر می‌شود:

$$\begin{aligned} &\text{Min } \theta \\ &\text{s.t.} \quad (\theta x_o, y_o) \in T_{CCR}. \end{aligned} \tag{3-1}$$

با توجه به قضیه (1-6-1) و اصل شهودی تجرید و از اینکه $(\theta x_o, y_o) \in T_{CCR}$، مدل (3-1)، به مدل (4-1) تبدیل می شود. مدل (4-1)، که به مدل CCR در فرم پوششی با ماهیت ورودی

5) Charnes, Cooper, Rhodes (CCR)

معروف است، همواره شدنی بوده و بهینه متناهی دارد و جـواب بهـین در شـرط $0< \theta^* \leq 1$ صـدق می‌کند.

$$\begin{aligned} &\text{Min } \theta \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq \theta x_o, \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq y_o, \\ &\qquad \lambda_j \geq 0, \qquad (j = 1, \dots, n). \end{aligned} \tag{4-1}$$

شرط لازم کارایی تحت مدل فوق این است که $\theta^* = 1$. زیرا $\theta^* = 1$، به ایـن معنـی اسـت کـه امکان کاهش متناسب در همه ورودی‌های DMU_o، در مجموعه امکان تولید T_{CCR} وجود ندارد.

ولی این شرط کافی نیست. زیرا در این حالت اگر امکان کاهش بعضی از ورودی‌ها یا افزایش بعضی از خروجی‌های DMU_o، به‌صورت نامتناسب در مجموعـه امکـان تولیـد T_{CCR}، وجـود داشـته باشـد، DMU_o کارای ضعیف نامیده می‌شود. ولی اگر $\theta^* = 1$ و امکان کاهش در هیچ یـک از ورودی‌هـا و افزایش در هیچ یک از خروجی‌ها در مجموعه امکان تولید T_{CCR}، وجود نداشته باشد، آنگـاه DMU_o، کارای قوی نامیده می‌شود.

اگر $\theta^* < 1$، آنگاه DMU_o، ناکارا در ماهیت ورودی است و $(1 - \theta^*)$ مقدار ناکارایی تکنیکـی در ماهیت ورودی است.

حالت دوم به حل مدل زیر منجر می‌شود:

$$\begin{aligned} &\text{Max } \varphi \\ &\text{s.t.} \quad (x_o, \varphi y_o) \in T_{CCR}. \end{aligned} \tag{5-1}$$

که با توجه به قضیه (1-6-1) و اصل شـهودی تجریـد و از اینکـه $(x_o, \varphi y_o) \in T_{CCR}$ خـواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\text{Max } \varphi \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq x_o, \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq \varphi y_o, \\ &\qquad \lambda_j \geq 0, \qquad (j = 1, \dots, n). \end{aligned} \tag{6-1}$$

مدل (1-6) می‌کوشد خروجی‌های DMU_o را به‌طور متناسب ماکسیمم کند و به مدل CCR در فرم پوششی با ماهیت خروجی معروف است.

مدل (1-6) همواره شدنی است و جواب بهین در شرط $\varphi^* \geq 1$ صدق می‌کند. اگر $\varphi^* = 1$، آنگاه DMU_o کارای تکنیکی در ماهیت خروجی است. اگر $\varphi^* > 1$ آنگاه DMU_o، ناکارا در ماهیت خروجی است و $\frac{1}{\varphi^*}$ نشان دهنده میزان کارایی تکنیکی DMU_o در ماهیت خروجی و $\left(1 - \frac{1}{\varphi^*}\right)$ نشان دهنده میزان ناکارایی تکنیکی DMU_o در ماهیت خروجی است. مفهوم کارایی قوی در مدل با ماهیت خروجی، مشابه مدل با ماهیت ورودی است.

1-6-2 **نمادگذاری**. از نمادها و علائم زیر در کل این پایان نامه استفاده خواهد شد:

$$\lambda \coloneqq (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t \ , \qquad \mu \coloneqq (\mu_1, \dots, \mu_2)^t \ ,$$
$$X \coloneqq [x_1, \dots, x_n] \ , \qquad Y \coloneqq [y_1, \dots, y_n],$$
$$S^- \coloneqq (s_1^-, \dots, s_m^-)^t \ , \qquad S^+ \coloneqq (s_1^+, \dots, s_r^+)^t,$$
$$T^- \coloneqq (t_1^-, \dots, t_m^-)^t \ , \qquad T^+ \coloneqq (t_1^+, \dots, t_r^+)^t.$$

مدل (1-4) پس از افزودن متغیرهای کمکی، به‌صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } \theta \\
&\text{s.t.} \quad \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j + S^- = \theta x_o, \\
&\qquad \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j - S^+ = y_o, \\
&\qquad \lambda_j \geq \circ, S^- \geq \circ, S^+ \geq \circ \qquad\qquad (j = 1, \dots, n).
\end{aligned} \tag{7-1}$$

مدل (1-6) نیز پس از افزودن متغیرهای کمکی به‌صورت زیر در خواهد آمد:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } \varphi \\
&\text{s.t.} \quad \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j + T^- = x_o, \\
&\qquad \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j - T^+ = \varphi y_o, \\
&\qquad \lambda_j \geq \circ, T^- \geq \circ, T^+ \geq \circ \qquad\qquad (j = 1, \dots, n).
\end{aligned} \tag{8-1}$$

3-6-1 **قضیه**. اگر $(\theta^*, \lambda^*, S^{-^*}, S^{+^*})$ جواب بهین مدل (1-7) و $(\varphi^*, \mu^*, T^{-^*}, T^{+^*})$ جواب بهین مدل (1-8) باشد، آنگاه روابط زیر برقرار است:

$$\varphi^* = \frac{1}{\theta^*}\ , \mu^* = \frac{\lambda^*}{\theta^*}\ , T^{-^*} = \frac{S^{-^*}}{\theta^*}\ , T^{+^*} = \frac{S^{+^*}}{\theta^*}\,.$$

بنابر قضیه فوق در مدل CCR، مقدار کارایی (ناکارایی) در ماهیت ورودی با مقدار کارایی (ناکارایی) در ماهیت خروجی یکسان است و DMUهای کارا تحت هر دو مدل یکسان هستند.

4-6-1 **تعریف** (CCR - **کارای قوی در ماهیت ورودی**). DMU_o تحت مدل (1-7) کارای قوی است هرگاه $\theta^* = 1$ و در همه‌ی جواب‌های بهین، مقادیر متغیرهای کمکی یعنی S^{+^*} و S^{-^*}، صفر باشد.

5-6-1 **نکته**. دوآل مدل با فرم پوششی، مدل با فرم مضربی نامیده می‌شود.

با توجه به نکته فوق مدل مضربی CCR در ماهیت ورودی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
\text{Max}\quad & u^t y_o \\
\text{s.t.}\quad & v^t x_o = 1, \\
& u^t y_j - v^t x_j \leq 0, \quad (j = 1, \dots, n), \qquad (9\text{-}1) \\
& u \geq 0, v \geq 0.
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه مدل (1-4) همواره بهینه متناهی دارد، لذا بنا به قضیه قوی دوآلیتی [18]، مدل (1-9) همواره بهینه متناهی خواهد داشت و مقدار بهین هر دو مدل با هم برابر است.

فرم مضربی مدل CCR در ماهیت خروجی که همان دوآل مدل (1-6) است، به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\text{Min}\quad & v^t x_o \\
\text{s.t.}\quad & u^t y_o = 1, \\
& u^t y_j - v^t x_j \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n), \qquad (10\text{-}1) \\
& u \geq 0, v \geq 0.
\end{aligned}$$

6-6-1 **قضیه**. اگر $(v^* = p^*\ , u^* = q^*)$ جواب بهین مدل (1-9) باشد، آنگاه جواب بهین مدل (1- 10) به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$\left(v^* = \frac{p^*}{\theta^*}, u^* = \frac{q^*}{\theta^*}\right)$.

7-6-1 تعریف (CCR - کارای قوی تحت مدل مضربی CCR). DMU_o تحت مدل (9-1) کارای قوی نامیده می‌شود، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

1) حداقل یک جـواب بهـینماننـد (v^*, u^*)، از (9-1) موجـود باشـد بـه‌طوریکـه $v^* > \circ$ و $u^* > \circ$.
2) $u^{*t} y_o = 1$.

رهیافتی که در بالا برای ارائه مدل (9-1) ارائه شد، رهیـافتی مبتنـی بـر مجموعـه امکـان تولیـد و استفاده از دوآل فرم پوششی CCR بود. اکنون بـا اسـتفاده از تعریـف کـارایی نسـبی مـدل (9-1) را به‌دست خواهیم آورد.

اگر واحد تصمیم گیرنده دارای یک ورودی و یک خروجی باشد، آنگاه نسـبت خروجـی بـه ورودی، نشان دهنده میزان کارایی آن واحد تصمیم گیرنده است. اگر واحد تصمیم گیرنده دارای بـیش از یـک ورودی یا بیش از یک خروجی باشد و قیمت خروجی‌هـا و هزینـه ورودی‌هـا مشـخص باشـد، در ایـن صورت نسبت مجموع وزن‌دار شده خروجی‌ها به مجموع وزن‌دار شده ورودی‌هـا، نشـان دهنـده میـزان کارایی واحد تصمیم گیرنده است. برای محاسبه کارایی نسبی هـر واحـد بایـد کـارایی آن واحـد را بـر ماکسیمم کارایی از بین سایر واحدها تقسیم کنیم. مشکل زمانی پیش می‌آید که قیمت خروجـی‌هـا و هزینه ورودی‌ها مشخص نباشد، راهکاری که در این حالت DEA پیشنهاد مـی‌کنـد بـه ایـن صـورت است که با دیدگاهی خوش‌بینانه، به وزن‌هـا اجـازه مـی‌دهـد طـوری انتخـاب شـوند کـه DMU_o بـه ماکسیمم کارایی خود برسد و این مقدار را به عنوان میزان کارایی نسبی DMU_o در نظـر مـی‌گیـرد. فرض کنید بردار نامنفی $u \in R^s$ نشان دهنده قیمت خروجـی‌هـا و بـردار نـامنفی $v \in R^m$ نشـان دهنده هزینه ورودی‌ها باشد، آنگاه جواب بهینه مدل زیر نشان دهنده میـزان کـارایی نسـبی DMU_o است:

$$RE_o = \text{Max}_{(u,v)\geq\circ} \frac{\frac{u^t y_o}{v^t x_o}}{max_{1\leq j\leq n} \frac{u^t y_j}{v^t x_j}} \tag{11-1}$$

اگر $RE_o = 1$، آنگاه DMU_o، کارای تکنیکی در ماهیت ورودی نامیـده مـی‌شـود. در مـدل بـالا ممکن است که بعضی از وزن‌ها صفر در نظر گرفته شوند و این بدان معنی است که ورودی یا خروجـی

متناظر نادیده گرفته شده است. اگر $RE_o = 1$ و جواب بهینه‌ای موجود باشد که $(v^*, u^*) > 0$، در این صورت بنا به تعریف DMU_o، CCR - کارای قوی است.

اگر قرار دهیم:

$$\text{Max}_{1 \le j \le n} \left\{ \frac{u^t y_j}{v^t x_j} \right\} = \frac{1}{t},$$

مدل (11-1) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} RE_o = \text{Max}\ \ & t.\frac{u^t y_o}{v^t x_o} \\ \text{s.t} \quad & t.\frac{u^t y_j}{v^t x_j} \le 1, \quad (j = 1, \dots, n), \\ & u \ge 0, v \ge 0. \end{aligned} \tag{12-1}$$

اگر قرار دهیم: $tu := \bar{u}$ و $tv := \bar{v}$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} RE_o = \text{Max}\ \ & \frac{\bar{u}^t y_o}{\bar{v}^t x_o} \\ \text{s.t} \quad & \frac{\bar{u}^t y_j}{\bar{v}^t x_j} \le 1, \quad (j = 1, \dots, n), \\ & \bar{u} \ge 0, \bar{v} \ge 0. \end{aligned} \tag{13-1}$$

اگر مجدداً قرار دهیم: $\bar{u} := u$ و $\bar{v} := v$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} RE_o = \text{Max}\ \ & \frac{u^t y_o}{v^t x_o} \\ \text{s.t} \quad & \frac{u^t y_j}{v^t x_j} \le 1, \quad (j = 1, \dots, n), \\ & u \ge 0, v \ge 0. \end{aligned} \tag{14-1}$$

مدل (14-1) به مدل کسری CCR معروف است. با استفاده از تبدیلات چارنز و کوپر [2]، مدل (14-1) با فرض مثبت بودن مخرج‌ها و قرار دادن $v^t x_o = 1$، به‌صورت زیر تبدیل می‌شود که همان مدل (9-1) است:

$$
\begin{aligned}
\text{Max}\quad & u^t y_o \\
\text{s.t.}\quad & v^t x_o = 1, \\
& u^t y_j - v^t x_j \leq \circ, \quad (j = 1, \dots, n), \\
& u \geq \circ, v \geq \circ.
\end{aligned} \tag{14-1}
$$

1-6-8 **قضیه**. هر جواب بهین مدل (1-9)، یک جواب بهین برای مدل (1-11) است.

برهان: به مرجع [18] رجوع شود.

1-6-9 **قضیه**. در مدل (1-9) در هر جواب بهین حداقل یکی از قیود نامساوی یعنی $u^t y_j - v^t x_j \leq \circ$ $(j = 1, \dots, n)$ فعال است (به‌صورت تساوی برقرار است).

برهان: به مرجع [18] رجوع شود.

می‌دانیم برای تشخیص اینکه DMU_o، CCR - کارای قوی است، باید بررسی شود که آیا مدل (1-9) جواب بهینه‌ای با مقدار $u^* y_o = 1$ دارد که در آن تمام وزن‌ها مثبت باشند، یا خیر؟ در DEA برای بررسی این موضوع مدل زیر پیشنهاد می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\text{Max}\quad & u^t y_o \\
\text{s.t.}\quad & v^t x_o = 1, \\
& u^t y_j - v^t x_j \leq \circ, \quad (j = 1, \dots, n), \\
& u \geq \varepsilon 1,\ \ v \geq \varepsilon 1.
\end{aligned} \tag{16-1}
$$

که در آن نماد ε نشان دهنده یک عدد مثبت به اندازه کافی کوچک است که از هر عدد مثبت حقیقی کوچک تر است و اصطلاحا به آن عدد غیر ارشمیدسی گفته می‌شود. مشکل مدل بالا اینست که مشخص نیست ε باید چقدر کوچک باشد و در حالی‌که DMU_o، CCR - کارای قوی است، اگر ε به اندازه کافی کوچک نباشد ممکن است مدل (1-9) نتواند وزن‌های مثبتی که با آن وزن‌ها DMU_o کارا می‌شود را پیدا کند و جواب بهین مدل (1-9) کوچکتر از یک می‌شود.

بهترین راهکاری که برای این مشکل پیشنهاد می‌شود، استفاده از فرم دوآل مدل (1-16) و به کار بردن فاز دوگانه برای حل مدل دوآل است. دوآل مدل (1-16) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } \theta - \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right)\\
&\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{io}, \quad (i = 1, \dots, m),\\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{ij} - s_r^+ = y_{ro}, \quad (r = 1, \dots, s),\\
&\qquad s_i^-, s_r^+, \lambda_j \geq \circ, \quad (i = 1, \dots, m), (r = 1, \dots, s), (j = 1,2, \dots, n).
\end{aligned} \tag{17-1}$$

یا به شکل فشرده:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } \theta - \varepsilon(es^- + es^+)\\
&\text{s.t.}\quad X\lambda + s^- = \theta x_o,\\
&\qquad Y\lambda - s^+ = y_o,\\
&\qquad s^- \geq \circ, s^+ \geq \circ, \lambda \geq \circ.
\end{aligned} \tag{18-1}$$

حل مدل (18-1) معادل با اینست که ابتدا مدل (4-1) حل شود و θ^* بهینه را به‌دست آوریم و سپس مدل زیر حل شود:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } es^- + es^+\\
&\text{s.t.}\quad X\lambda + s^- = \theta^* x_o,\\
&\qquad Y\lambda - s^+ = y_o,\\
&\qquad s^- \geq \circ, s^+ \geq \circ, \lambda \geq \circ.
\end{aligned} \tag{19-1}$$

اگر در جواب بهین مدل (4-1)، $\theta^* = 1$ و جواب بهین مدل (19-1) برابر صفر باشد، در این صورت DMU_o، CCR - کارای قوی خواهد بود.

تا کنون دو تعریف از CCR - کارای قوی آورده‌ایم. حال تعریف پاراتو - کوپمن را از کارای قوی می‌آوریم. گوییم $DMU_k = (x_k, y_k)$ توسط $DMU_j = (x_j, y_j)$ مغلوب شده یا به طور معادل DMU_j غالب بر DMU_k است اگر و فقط اگر $\begin{pmatrix} -x_k \\ y_k \end{pmatrix} \gneqq \begin{pmatrix} -x_j \\ y_j \end{pmatrix}$. نماد $\gneqq$ به این معنی است که $\begin{pmatrix} -x_k \\ y_k \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -x_j \\ y_j \end{pmatrix}$ و نامساوی حداقل در یکی از مؤلفه‌ها به‌صورت اکید برقرار است.

1-6-10 **تعریف (CCR - کارای قوی پاراتو-کوپمن)**. DMU_o، CCR - کارای قوی است اگر و فقط اگر توسط هیچ DMUی عضو T_{CCR} مغلوب نگردد.

1-6-11 **قضیه**. تعاریف (1-6-4)، (1-6-7)، (1-6- 10) از CCR - کارای قوی معادلند.

برهان. به مرجع [18] رجوع شود.

1-6-12 **تعریف (مجموعه مرجع)**. برای هر DMU_o $(o \in \{1,\dots,n\})$ یک مجموعه مرجع به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$E_o =\{\, j :$ حداقل در یک جواب بهین مدل (1-9)، $\lambda_j^* > 0$ باشد $\}$

در حقیقت مجموعه مرجع DMU_o عبارتست از DMU_jهایی که حداقل در یک جواب بهین مدل (1-19) در ارزیابی DMU_o، λ_j^* مقدار مثبت اختیار می‌کند.

1-6-13 **قضیه**. برای هر DMU_j، $(j = 1,2,\dots,n)$ داریم $E_j \neq \emptyset$.

برهان. به مرجع [18] رجوع شود.

در ارزیابی DMU_o توسط فرآیند فاز دوگانه CCR، اگر DMU_o، CCR - کارای قوی نباشد، در این صورت در انتهای فاز دوم یک DMU بهبود یافته به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{بهبود یافته } DMU_o \coloneqq \left(\hat{x}_o \coloneqq \theta^* x_o - s^{-*}, \hat{y}_o \coloneqq y_o + s^{+*}\right).$$

ثابت می شود که DMU_o بهبود یافته، CCR- کارای قوی است. با حل مدل (1-4) کارای تکنیکی یا ناکارای تکنیکی بودن DMU_o مشخص می شود. اگر DMU_o کارای تکنیکی بود، در این صورت $\theta^* = 1$ جواب مدل (1-4) است. در فاز دوم یعنی با حل مدل (1-19) معلوم می‌شود که DMU_o چه مقداری از ورودی‌ها را هدر می‌داده (s^{-*}) و چه مقداری از خروجی‌ها را تولید نمی‌کرده (s^{+*}) است. DMU_o بهبود یافته هیچ ورودی را هدر نمی‌دهد و هیچ کمبود تولید در هیچ خروجی ندارد، لذا کارای قوی است.

1-6-14 **قضیه**. برای هر $(o \in \{1,\dots,n\})$ و هر $j \in E_o$، DMU_j، CCR - کارای قوی است. به عبارت دیگر هر عضو مجموعه مرجع DMU_o، در ارزیابی هر DMU_o، CCR - کارای قوی است.

برهان. به مرجع [18] رجوع شود..

15-6-1 **نتیجه**. حداقل یکی از DMU_jهای مشاهده شده $(j \in \{1, \dots, n\})$، CCR - کارای قوی است (این حکم به آسانی از (1-6-13) و (1-6-14) نتیجه می‌شود).

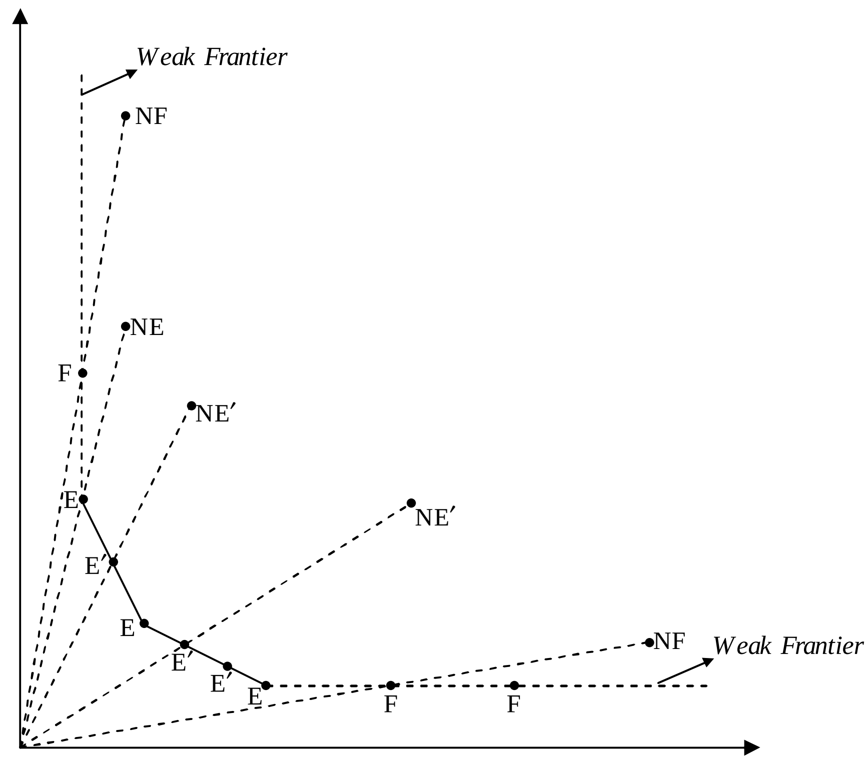
16-6-1 **تعریف و قضیه (پایداری در مقابل تغییر واحد)**. یک مدل نسبت به تغییر واحد پایدار نامیده می‌شود هرگاه تغییر واحد ورودی‌ها یا خروجی‌ها روی جواب بهین مدل تأثیری نداشته باشد، به عبارت دیگر اگر:

$$x_{ij} \to \alpha_i x_{ij}\,, \quad \alpha_i > \circ\,, \quad i = 1, \dots, m,$$
$$y_{rj} \to \beta_r y_{rj}\,, \quad \beta_r > \circ\,, \quad r = 1, \dots, s,$$

آنگاه جواب بهین مدل تغییر نکند. مدل (1-4) نسبت به تغییر واحد پایدار است.

شکل (1-1) را در نظر بگیرید:

- DMUهایی که با E مشخص شده‌اند، DMUهای کارای قوی رأسی هستند و مجموعه مرجع مربوط به آن‌ها فقط شامل خود آن‌هاست.
- DMUهایی که با E' مشخص شده‌اند، DMUهای کارای قوی غیر رأسی هستند و مجموعه مرجع مربوط به آن‌ها حداقل شامل یک DMU غیر خود آن‌هاست.
- DMUهایی که با F مشخص شده‌اند، DMUهای کارای ضعیف هستند.
- DMUهایی که با NE مشخص شده‌اند، DMUهای ناکارا هستند، ولی تصویر آن‌ها تحت مدل(1-3) کارای قوی رأسی است.
- DMUهایی که با NE' مشخص شده‌اند، DMUهای ناکارا هستند، ولی تصویر آن‌ها تحت مدل (1-3) کارای قوی غیر رأسی است.
- DMUهایی که با NF مشخص شده‌اند، DMU ناکارا هستند، ولی تصویر آن‌ها تحت مدل (1-3) کارای ضعیف است.



شکل (1-1)

1-7 مدل BCC [6]

مدل BCC توسط بنکر[7]، چارنز و کوپر در سال 1984 [1]، مطرح شد. مرز کارایی مدل BCC به‌وسیله پوسته محدب DMUهای مشاهده شده، گسترده می‌شود.

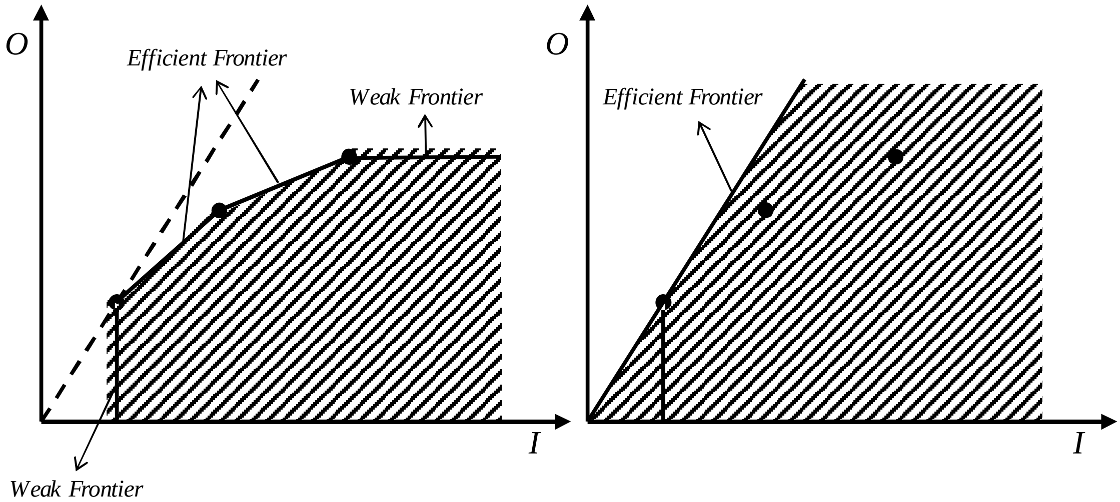
1-7-1 **قضیه**. یک مجموعه منحصر به فرد وجود دارد که در اصول 1، 2، 4 و 5 صدق می‌کند. این مجموعه به صورت زیر است:

$$T_{BCC} = \{(x,y): x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \,, y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \,, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq \circ \ \ (j = 1 \dots, n)\}.$$

برای مثال، برای حالت یک ورودی و یک خروجی T_{CCR} و T_{BCC} در شکل (1-2) برای تعدادی DMUی مشاهده شده خاص رسم شده‌اند.

6) Banker , Charnes , Cooper (BCC)

7) Banker



شکل (2-1)

همان طور که از مقایسه دو مجموعه T_{CCR} و T_{BCC} نتیجه می‌شود، T_{BCC} همه خـواص T_{CCR} را دارد، فقط با این تفاوت که اصل بی‌کرانی اشعه در آن حذف شده است. بـه همـین دلیـل مـرز کـارایی مدل BCC بوسیله پوسته محدب DMUهای مشاهده شده گسترده می‌شود.

فرم پوششی مدل BCC در ماهیت ورودی برای ارزیابی DMU_o به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\text{Min } \theta \\ &\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq \theta x_o, \\ &\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq y_o, \\ &\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\ &\quad \lambda_j \geq ०, \qquad (j = 1, \dots, n). \end{aligned} \tag{2० -1}$$

لذا مدل BCC در ماهیت ورودی همان مدل CCR در ماهیت ورودی (1-4) بوده که شامل قیـد تحدب یعنی $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ است. حال با توجه به اینکه با افزایش قیـود در مـدل‌هـای برنامـه‌ریـزی خطی، ناحیه شدنی بزرگتر نمی‌شود، لذا مقدار بهینه تابع هدف بهتر نمی‌شود. پـس اگـر θ^*_{CCR} مقـدار بهـین مـدل (1-4) و θ^*_{BCC} مقـدار بهـین مـدل (1- 2०) در ارزیـابی DMU_o باشـند، آنگـاه $\theta^*_{BCC} \leq \theta^*_{CCR} \leq 1$. مدل (1- 2०) همانند مدل (1-4) همواره شدنی است و بهینه متناهی دارد.

دوآل مدل (1- 2٥) که به مدل مضربی BCC در ماهیت ورودی معروف است، به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & u^t y_o + u_o \\ \text{s.t.} \quad & v^t x_o = 1, \\ & u^t y_j - v^t x_j - u_o \leq 0, \quad (j = 1, \dots, n), \\ & u \geq 0, v \geq 0. \end{aligned} \tag{21-1}$$

DMU_o در مجموعه امکان تولید BCC کارای تکنیکی است اگر و فقط اگر $\theta^*_{BCC} = 1$. در غیر این صورت DMU_o ناکارا خواهد بود و $(1 - \theta^*_{BCC})$ نشان دهنده میزان ناکارایی تکنیکی در ماهیت ورودی است.

مدل (1- 2٥) فقط قادر به تشخیص ناکارایی تکنیکی است. برای اینکه بتوان ناکارایی‌های ترکیبی موجود در DMU_o را در صورت وجود پیدا کرد می‌توان از مدل زیر استفاده کرد که در آن ε یک عدد غیر ارشمیدسی بوده و از هر عدد مثبت کوچکتر است:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \theta - \varepsilon(es^- + es^+) \\ & \text{s.t.} \quad X\lambda + s^- = \theta x_o, \\ & \qquad Y\lambda - s^+ = y_o, \\ & \qquad \vec{1}\lambda = 1, \\ & \qquad s^- \geq 0, s^+ \geq 0, \lambda \geq 0. \end{aligned} \tag{22-1}$$

حل مدل (1-22) معادل با اجرای فاز دوگانه BCC است. به این ترتیب که ابتدا مدل (1- 2٥) را حل کرده و θ^* بهین را به‌دست می‌آوریم که در این فاز اندازه کارایی و ناکارایی تکنیکی DMU_o مشخص می‌شود. برای اجرای فاز دوم مدل زیر را حل می‌کنیم که اندازه ناکارایی‌های ترکیبی DMU_o را به‌دست می‌دهد:

$$\begin{aligned} & \text{Max } es^- + es^+ \\ & \text{s.t.} \quad X\lambda + s^- = \theta^* x_o, \\ & \qquad Y\lambda - s^+ = y_o, \\ & \qquad \vec{1}\lambda = 1, \\ & \qquad s^- \geq 0, s^+ \geq 0, \lambda \geq 0. \end{aligned} \tag{23-1}$$

1-7-2 **تعریف (BCC - کارای قوی پاراتو-کوپمن)**. DMU_o، BCC - کارای قوی است اگر و فقط اگر توسط هیچ DMUی عضو T_{BCC} مغلوب نگردد.

1-7-3 **تعریف (BCC - کارای قوی فرم پوششی)**. DMU_o ، BCC - کارای قوی است اگر و فقط اگر در هر جواب بهین مدل (1-22) داشته باشیم $\theta^* = 1$ و $s^{-*} = s^{+*} = \circ$. یا به عبارت دیگر $\theta^* = 1$ و جواب بهین مدل (1-23) صفر باشد.

1-7-4 **تعریف (BCC - کارای قوی فرم مضربی)**. DMU_o، BCC - کارای قوی است اگر و فقط اگر مدل (1-21) جواب بهینی با شرایط زیر داشته باشد:

1) $u^{*t} y_o - u_o^* = 1$،　　2) $v^* > \circ,\ u^* > \circ$.

1-7-5 **قضیه**. سه تعریف فوق از BCC - کارای قوی معادلند.

برهان. به مرجع [18] رجوع شود.

1-7-6 **تعریف (مجموعه مرجع BCC)**. برای هر DMU_o $(o \in \{1, \dots, n\})$، یک مجموعه مرجع مشخص می‌کنیم و با E_o نشان می‌دهیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$E_o = \{\ j :$ حداقل در یک جواب بهین مدل (1-22)، $\lambda_j^* > \circ$ باشد $\}$

فرض کنید $(\theta^*, \lambda^*, S^{-*}, S^{+*})$ جواب بهین حاصل از مدل (1-22) باشد، در این صورت DMU_o به یک DMUی بهبود یافته تصویر می‌شود که به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

DMU_o بهبود یافته $:= \left(\hat{x}_o := \theta^* x_o - s^{-*}, \hat{y}_o := y_o + s^{+*}\right)$

به‌راحتی ثابت می‌شود که DMU_o بهبود یافته، BCC - کارای قوی است (برای اثبات به مرجع [18] رجوع شود).

مشابه احکام (1-6-13) ، (1-6-14) و (1-6-15)، برای مدل BCC نیز برقرار است. به این صورت که در ارزیابی هر DMU_o تحت مدل BCC همواره $E_o \neq \emptyset$ است و در حل مدل (1-23) برای هر DMU_o $(o \in \{1, \dots, n\})$، λ_j^*ای مقدار مثبت اختیار نمی‌کند، مگر اینکه DMU_j، BCC - کارای قوی باشد، لذا حداقل یکی از DMU_jهای مشاهده شده $(j \in \{1, \dots, n\})$، BCC - کارای قوی است.

1-7-7 **قضیه**. فرض کنید DMU_o در ورودی kام کمترین مقدار را در مقایسه با DMUهای دیگر دارد، به عبارت دیگر:

$x_{ko} < x_{kj}, \quad j = 1, \dots, n, j \neq o,$

در این صورت DMU_o، BCC - کارای قوی است. به‌علاوه مدل (1-22) جواب یکتای زیر را دارد:

$$\theta^* = 1, \lambda_o^* = 1, \lambda_j^* = 0, j = 1, \dots, n, j \neq o, s^{-^*} = 0, s^{+^*} = 0.$$

برهان. به مرجع [18] رجوع شود.

تذکر: فرض کنید DMU_o در خروجی hام بیشترین مقدار را در مقایسه با DMUهای دیگر داشته باشد، در این صورت DMU_o کارای BCC است و حکمی مشابه قضیه فوق برای آن برقرار است (برهان. به مرجع [18] رجوع شود).

1-7-9 **تعریف و قضیه (پایداری نسبت به انتقال)**. یک مدل نسبت به انتقال ورودی‌ها (خروجی‌ها) پایدار نامیده می‌شود هرگاه انتقال ورودی‌ها (خروجی‌ها) تأثیری روی جواب بهین نداشته باشد. به عبارت دیگر اگر یک ورودی (خروجی) در تمام واحدها با یک عدد ثابت جمع شود، جواب بهین تغییری نکند.

مدل پوششی BCC در ماهیت ورودی یعنی مدل (1- 20) در مقابل انتقال خروجی‌ها پایدار است. یعنی اگر:

$y_{rj} \to y_{rj} + \beta_r, \quad r = 1, \dots, s,$

آنگاه جواب بهین مدل تغییری نمی‌کند. یادآور می‌شویم که مدل CCR نسبت به انتقال هیچ کدام از ورودی‌ها و خروجی‌ها پایدار نیست.

برهان. به مرجع [18] رجوع شود.