نظریه بازی

مقدمه

- زندگی مملو از تضادها و رقابتهاست. نمونه‌های بسیاری را می‌توان نشان داد که طرفهای متخاصم، تضاد منافع دارند. جنگها و کشورگشایی‌ها، مبارزات سیاسی، مسابقه‌های تبلیغاتی، بازاریابی و شرط بندیها از این جمله‌اند. یک مشخصه اساسی بسیاری از این نمونه‌ها آن است که نتیجه نهایی بستگی به مجموعه سیاستهایی دارد که توسط طرفین متخاصم اتخاذ می‌گردد.
- نظریه بازی نظریه‌ای ریاضی است که به بررسی مشخصه‌های کلی رقابتها، به صورتی مجرد می‌پردازد.
- در این نظریه بر فرایند تصمیم‌گیری طرفهای متخاصم یا رقیب تاکید می‌شود.

مقدمه (ادامه)

- در این فصل بازیهای موسوم به دو نفری جمع صفر مورد بررسی قرار می‌گیرد.
- در این بازیها، همان‌طور که از نام آن برمی‌آیند، فقط دو طرف متخاصم یا بازیگر وجود دارند (که ممکن است ارتشها، گروهها، شرکتها و نظایر اینها باشند).
- علت جمع صفر خواندن بازیها آن است که مقدار برد یکی دقیقاً با میزان باخت دیگری مساویست، یعنی جمع جبری برد خالص آنها برابر با صفر است.

مقدمه (ادامه)

- برای تشریح مشخصه‌های اصلی یک مدل نظریه‌بازی از نمونه‌ای ساده کمک می‌گیریم. دو شرکت‌کنندهٔ این بازی همزمان با یکدیگر یک یا دو انگشت خود را نشان می‌دهند. اگر تعداد انگشتان آنها مساوی باشد، یکی از آنها، مثلاً بازیگر اول، مقدار مشخصی مثلاً یک دلار، به بازیگر دوم می‌پردازد، در غیر این صورت، دومی باید همین مقدر را به اولی بپردازد. به این ترتیب، هر بازیگر می‌تواند یکی از دو سیاست را اتخاذ کند: یک یا دو انگشت خود را نشان دهد. جدول زیر بازده بر (بر حسب دلار)بازیگر اول را در نتیجه انتخاب هر یک از این سیاستها نشان می‌دهد.

مشخصه‌های یک بازی دو نفره

- به طور کلی، مشخصه‌های یک بازی دو نفره عبارتند از:
  - سیاست بازیگر اول
  - سیاست بازیگر دوم
  - جدول بازده
- در نظریه بازی، سیاست قاعده‌ای از پیش تعیین شده است که مشخص می‌کند بازیگر در مقابل هر پیشامدی که در هر یک از مراحل می‌تواند رخ دهد چه واکنشی داشته باشد.
- قبل از شروع بازی، هر بازیگر سیاستهایی که خود و طرف مقابل می‌توانند اتخاذ کنند و همچنین جدول بازده را به درستی می‌شناسد. لیکن، بازیگران سیاست خود را به طور همزمان و بدون اطلاع از سیاست طرف مقابل انتخاب می‌کنند.

مشخصه‌های یک بازی دو نفره (ادامه)

- جدول بازده معمولاً تنها برای یک بازیگر تهیه می‌شود. با توجه به صفر بودن جمع جبری بردها، جدول بازده بازیگر دیگر نیز مساوی همان مقادیر، منتهی با علامت مخالف است. مقادیر جدول بازده می‌تواند بر حسب هر واحدی، مثلاً دلار، بیان شود، به شرطی که آن واحد بتواند مبین مطلوبیتی باشد که به بازیگر می‌رسد.

II			
۲	۱		
-۱	۱	۱	I
۱	-۱	۲	

مشخصه‌های نظریه بازی

هدف اصلی نظریه بازی، توسعه ضوابط معقول جهت انتخاب سیاست است. چنین توسعه‌ای بر اساس دو فرض بنا نهاده می‌شود.

- هر دو بازیگر عاقل و منطقی باشند
- دوم اینکه نهایت توان خود را در مصاف حریف به کار بندند تا به بهترین نتیجه دست یابند.

حل بازیهای ساده

مثال: دو سیاستمدار در یک مبارزه انتخاباتی در مقابل یکدیگر قرار دارند. برای دو روز آخر قبل از انتخابات که از اهمیت بسزائی برخوردار است باید برنامه مبارزاتی تهیه شود. هر دو سیاستمدار می‌خواهند دو روز باقیمانده را در دو شهر کلیدی الف و ب بگذرانند. آنها می‌توانند یا در هر شهر یک روز و یا در یک شهر دو روز به سر برند. هر سیاستمدار از برنامه حریف تا وقتی که اعلام نشود بی اطلاع است. هر دو آنها از مدیران برنامه‌های خود در این شهرها خواسته‌اند تا اثر تصمیم خود و رقیب را در مورد گذرانیدن یک یا دو روز در هریک از آن شهرها، بر حسب پیش‌بینی افزایش یا کاهش تعداد رای ارزیابی نمایند، از این اطلاعات به منظور تعیین بهترین سیاست برای دو روز آینده استفاده می‌شود.

حل بازیهای ساده (ادامه مثال)

برای آنکه این مسئله در قالب یک بازی دو نفری- مجموع صفر فرموله شود ابتدا باید دو طرف بازی (که در اینجا دو سیاستمدار هستند)، سیاستهای هر کدام، و جدول بازده مشخص شود.

همان‌طور که از صورت مسئله بر می‌آید، هر بازیگر سه سیاست پیش رو دارد:

– سیاست ۱: گذرانیدن یک روز در هر شهر.

– سیاست ۲: گذرانیدن هر دو روز در شهر الف.

– سیاست ۳: گذرانیدن هر دو روز در شهر ب.

حل بازیهای ساده (ادامه مثال)

لیکن چنانچه هر سیاستمدار قبل از تصمیم‌گیری در مورد روز دوم بتواند بفهمد که حریفش روز اول به کجا می‌رود، دیگر تنها این سه سیاست را در پیش نخواهد داشت. در این صورت، در مقابل او هشت سیاست وجود دارد (زیرا طرف مقابل می‌تواند روز اول را در هر یک از دو شهر بگذراند، این سیاستمدار هم در روز اول ۲ انتخاب و در روز دوم هم ۲ انتخاب دارد، پس مجموعاً ۸=۲×۲×۲ سیاست در پیش است).

هر یک از اعداد جدول بازده بازیگر اول نشان‌دهنده میزان مطلوبیت این بازیگر (یا میزان منفی مطلوبیت برای بازیگر دوم) است که نتیجهٔ ترکیبی از سیاستهاست که توسط دو بازیگر اتخاذ می‌گردد.

حل بازیهای ساده (ادامه مثال)

هدف هر دو نفر بدست آوردن رای بیشتر است، و مادامی که از نتیجه انتخابات مطلع نشده‌اند، طبعاً هر رای اضافی برای آنها ارزش یکسانی دارد. بنابراین، مقادیر جدول بازده بیانگر تعداد آرایی است که در طول این دو روز از چنگ طرف دیگر بدر می‌آورد. (یعنی جمع‌خالص تغییرات آراء در دو شهر). فرموله کردن مسئله از این دیدگاه در جدول ۶-۲ خلاصه شده است.

کل رای به دست آمده برای سیاستمدار I		سیاستمدار II		
		۱	۲	۳
سیاستمدار I	۱			
	۲			
	۳			

حل بازیهای ساده (ادامه مثال)

البته باید توجه داشت چنانچه این سیاستمداران اطلاعات بیشتری در مورد طرف مقابل داشته باشند دیگر این جدول بازده مناسب نیست. به طور مشخص، اگر اکنون که دو روز به انتخابات مانده رای فعلی جامعه مشخص بود، می‌توانست بیان کننده آن باشد که با هر یک از ترکیبهای جدول، کدام سیاستمدار برنده می‌شود.

چون برنده شدن هدف نهایی است، و تعداد آراء اضافی چندان اهمیتی ندارد، لذا در جدول بازده می‌توان مطلوبیت برنده شدن سیاسمتدار اول را با مقداری مثبت (مثلاً $\frac{1}{2}$) نشان داد، که در این صورت مطلوبیت او در اثر بازنده شدن مثلا $-\frac{1}{2}$ خواهد بود

حل بازیهای ساده (ادامه مثال)

اگر بتوان احتمال برنده شدن این سیاستمداران را در اثر هر ترکیب از سیاستهای اتخاذ شده توسط دو طرف بر آورد نمود، می‌توان مقدار این احتمال را از $\frac{1}{2}$ کسر کرده و در محل مربوطه در جدول بازده وارد نمود، که در واقع نشان‌دهنده امید ریاضی یا میانگین مطلوبیت خواهد بود. لیکن، معمولاً اطلاعات کافی و قابل قبولی در این موارد در دسترس نیست.

گونه‌های مختلف مسائل بازیهای

با توجه به اطلاعات جدول بازده مسائل بازیها را می‌توان به سه گونه تقسیم نمود:

– **گونه اول:** مسائلی که با توجه به اصل تسلط(غلبه) و با در نظر گرفتن مفهوم سیاست مغلوب حل می شوند.

– **گونه دوم:** مسائلی که با توجه به اصل حداقل کردن حداکثرها و با در نظر گرفتن مفهوم نقطه زین اسبی حل می شوند.

– **گونه سوم:** مسائلی که با استفاده از مفاهیم سیاستهای مختلط و امید ریاضی حل می شوند.

اصل تسلط

تعریف: سیاست S را بر سیاست T مسلط (سیاست Tرا نسبت به سیاست S مغلوب) گوییم هرگاه همه نتایج سیاست S حداقل به خوبی نتایج متناظر سیاست Tبوده و حداقل یک نتیجه آن بهتر از نتیجه متناظر در سیاست Tباشد.

اصل غلبه(تسلط): یک بازیگر عاقل هیچگاه سیاست مغلوب را انتخاب نمی‌کند.

مسائل گونه اول

در اینگونه از مسائل جواب صرفاً با استفاده از مفهوم سیاست مغلوب و حذف سیاستهای بدتر تا وقتی که تنها یک سیاست بماند بدست می‌آید. به طور مشخص، اگر سیاستی بدتر از سیاست دیگر باشد می‌توان آنرا کنار گذاشت.

به عنوان مثال در جدول ۶-۳ بازیگر دوم هیچ سیاستی ندارد که مشخصاً بدتر از سیاست دیگری باشد.

کل رای به دست آمده برای سیاستمدار I		سیاستمدار II		
		۱	۲	۳
سیاستمدار I	۱	۱	۲	۴
	۲	۱	۰	۵
	۳	۰	۱	۱-

مسائل گونه اول (ادامه)

لیکن برای بازیگر اول، سیاست ۱ بر سیاست ۳ غالب است، زیرا (صرفنظر از اینکه سیاست بازیگر دوم چه باشد)، نتیجه آن همواره بهتر است. پس از حذف سیاست ۳ برای بازیگر اول، جدول بازده به صورت زیر درمی‌آید.

کل رای به دست آمده برای سیاستمدار I		سیاستمدار II		
		۱	۲	۳
سیاستمدار I	۱	۱	۲	۴
	۲	۱	۰	۵

چون فرض بر این است که هر دو بازیگر منطقی هستند لذا بازیگر دوم نیز می‌داند که بازیگر اول فقط به این دو سیاست می‌پردازد.

مسائل گونه اول (ادامه)

اکنون، بازیگر دوم هم یک سیاست مغلوب در پیش رو دارد- سیاست ۳، زیرا طبق جدول جدید میزان باخت (پرداخت به بازیگر اول) هر دو سیاست ۱ و ۲ همواره از سیاست ۳ کمتر است. با حذف این سیاست به جدول زیر می‌رسیم.

کل رای به دست آمده برای سیاستمدار I		سیاستمدار II	
		۱	۲
سیاستمدار I	۱	۱	۲
	۲	۱	۰

در اینجا، برای بازیگر اول، سیاست ۱ بر سیاست ۲ غالب می‌گردد، زیرا این سیاست در ستون ۲ بهتر و در ستون اول مساوی سیاست ۲ است.

مسائل گونه اول (ادامه)

بنابراین جدول زیر بدست می‌آید.

کل رای به دست آمده برای سیاستمدار I		سیاستمدار II	
		۱	۲
سیاستمدار I	۱	۱	۲

و برای بازیگر دوم، سیاست ۲ نسبت به سیاست ۱ مغلوب است. لاجرم هر دو بازیگر سیاست ۱ را انتخاب می‌نمایند.

بدین ترتیب، بازیگر اول همواره یک واحد از بازیگر دوم می‌برد (یعنی هزار رای بیش از او می‌آورد) و در این حالت می‌گویند ارزش بازی مساوی یک است. بازی تنها در صورتی عادلانه نامیده می‌شود که ارزش آن مساوی صفر باشد.

مسائل گونه دوم

در اینگونه مسائل جواب با استفاده از اصل حداقل کردن حداکثرها بدست می آید.

به عنوان مثال فرض کنید که در مساله انتخابات جدول بازده به صورت جدول ۶-۴باشد.

در این صورت، دیگر سیاست مغلوبی وجود ندارد، و طبعاً دیگر واضح نیست که بازیگران

چه خواهندکرد.

کل رای به دست آمده برای سیاستمدار I		سیاستمدارII			حداقل
		۱	۲	۳	
سیاستمدارI	۱	-۳	-۲	۶	-۳
	۲	۲	۰	۲	۰
	۳	۵	-۲	-۴	-۴
حداکثر		۵	۰	۶	

مسائل گونه دوم (ادامه)

در این حالت، نظریه بازی چگونه بازیگران را راهنمایی می‌کند؟ سیاستهای بازیگر اول را مرور می‌کنیم: ممکن است با انتخاب سیاست اول، او از ۶ واحد برد تا ۳ واحد باخت داشته باشد. لیکن چون بازیگر دوم هم منطقی است، و از باختهای کلان می‌گریزد، لذا متحمل است که سیاست ۱ را انتخاب کند تا بازیگر اول ببازد. به همین ترتیب، بازیگر اول می تواند با اتخاذ سیاست سوم بردی برابر با ۵ داشته باشد، اما احتمال دارد که حریف عاقلش چنین مجالی را ندهد و تا ۴ واحد باخت را به او تحمیل نماید، از طرف دیگر بازیگر اول با انتخاب سیاست ۲ یقیناً باختی نخواهد داشت و چه بسا چیزی هم ببرد.

مسائل گونه دوم (ادامه)

بنابراین، چون این سیاست نسبت به سیاستهای دیگر تضمین بهتری دارد، لذا علی‌الظاهر سیاست ۲ انتخاب عاقلانه بازیگر اول در مقابل حریف عاقل اوست.

با تحلیلی مشابه از دیدگاه بازیگر دوم، او نیز نتیجه می‌گیرد که سیاستهای ۱ و ۲ و ۳ به ترتیب باختی معادل ۵ و ۰ و ۶ به بار آورند. پس سیاست ۲ به روشنی انتخاب عاقلانه اوست. به علاوه حتی اگر این دو از سیاست یکدیگر هم با خبر باشند، باز نمی‌توانند وضعیت خود را بهتر کنند، لذا می‌توان این سیاست را با اطمینان و کراراً به کار گرفت.

چکیدهٔ این استدلال در آن است که هر بازیگر باید طوری بازی کند که حداکثر باخت خود را حداقل نماید.

مسائل گونه دوم (ادامه)

ضابطه حداقل کردن حداکثر، معیار اساسی نظریه‌بازی در انتخاب سیاست است. از نظر جدول بازده، این ضابطه به معنی آن است که بازیگر اول باید سیاستی که حداقل بازده آن از همه بزرگتر، و با بازیگر دوم سیاستی که حداکثر بازده آن از همه کوچکتر باشد را انتخاب نماید. این موضوع در جدول ۶-۴نشان داده شده است. در این جدول، سیاست دوم بازیگر اول به عنوان حداکثر حداقل و سیاست دوم بازیگر دوم به عنوان حداقل حداکثر شناخته می‌شوند. **حداکثر حداقل را کمترین مقدار و حداقل حداکثر را بیشترین مقدار بازی می‌خوانند**. اگر **این دو مقدارمساوی** باشند، آنرا **ارزش بازی** می‌نامند. چون مقادیر حداکثر حداقل و حداقل حداکثر در مثال ما هر دو مساوی صفر بودند، لذا آنرا **بازی عادلانه** می‌خوانیم.

مسائل گونه دوم (ادامه)

تعریف: در یک جدول بازده اگر برای بازیگر اول استراتژیی وجود داشته باشد که تضمین نماید که حداقل به مقدار v خواهد برد و برای بازیگر دوم نیز استراتژی وجود داشته باشد که تضمین نماید که بازیگر اول بیش از مقدار v نخواهد برد، در این صورت v را **ارزش بازی** می‌نامند.

کل رای به دست آمده برای سیاستمدار I		سیاستمدار II			حداقل
		۱	۲	۳	
سیاستمدار I	۱	-۳	-۲	۶	-۳
	۲	۲	۰	۲	۰
	۳	۵	-۲	-۴	-۴
حداکثر		۵	۰	۶	

حداکثر کردن حداقل برای بازیکن I

حداقل کردن حداکثر برای بازیکن II

مسائل گونه دوم (ادامه)

به نکته ظریفی نیز باید توجه داشت که کمترین و بیشترین مقدار در جدول بازده در یک محل قرار دارند، زیرا این مقدار در سطر خود از همه کوچکتر و در ستون خود از همه بزرگتر است. هر عنصری در جدول بازده با چنین خصوصیتی را **نقطه زین‌اسبی** می‌نامند.

در این بازی، وجود نقطه زین‌اسبی نقش تعیین کننده دارد، زیرا باعث می‌شود که هیچ بازیگری نتواند از سیاست حریف به نفع خود استفاده کند.

اصل نقطه زین اسبی: اگر در ماتریس(جدول) بازده بازی نقطه زین اسبی وجود داشته باشد، هر دو بازیگر سیاستی را که شامل این نقطه است انتخاب خواهند کرد.

مسائل گونه دوم (ادامه)

به طور مشخص، هر گاه بازیگر دوم حدس بزند یا مطلع شود که قرار است بازیگر اول سیاست ۲ را انتخاب کند، او با تغییر سیاست خود و انتخاب سیاستی غیر از ۲ تنها می‌تواند زیان خود را افزایش دهد. به همین ترتیب، بازیگر اول نیز با تغییر سیاست، فقط وضع خود را بدتر می‌نماید. بنابراین هیچکدام انگیزه‌ای برای تغییر سیاست، خواه به دلیل بهره‌برداری از سیاست حریف و خواه به علت جلوگیری از سوء استفاده او، ندارد. از این رو، به واسطه وجود یک **جواب پایدار**، همواره از سیاست حداکثر حداقل و حداقل حداکثر پیروی خواهد شد.

مسائل گونه سوم

اینگونه مسائل مسائل نقطه زین‌اسبی ندارند، و یافتن جواب آنها مستلزم تحلیل پیچیده‌تری است.

به عنوان مثال فرض کنید در مساله انتخابات جدول بازده به صورت جدول ۶-۵ نشان داده شده است.

کل رای به دست آمده برای سیاستمدار I		سیاستمدار II			حداقل
		۱	۲	۳	
سیاستمدار I	۱	۰	-۲	۲	-۲
	۲	۵	۴	-۳	-۳
	۳	۲	۳	-۴	-۴
حداکثر		۵	۴	۲	

مسائل گونه سوم (ادامه)

فرض کنید که هر دو بازیگر عیناً از ضابطه حداقل حداکثر پیروی نمایند. بازیگر اول می‌داند که کمترین مقدار بازی مساوی ۲- است، و او با انتخاب سیاست ۱ بیش از ۲ واحد نخواهد باخت. به همین ترتیب، چون بیشترین مقدار بازی نیز مساوی ۲ است، پس بازیگر دوم هم می‌تواند مطمئن شود که با انتخاب سیاست ۳ بیش از ۲ واحد نمی‌بازد.

توجه داشته باشید که ارزش بازی به مقدار مشخص و در نتیجه نقطه زین‌اسبی در این مسئله وجود ندارد. اگر هر دو بازیگر همان سیاستهای بالا را انتخاب کنند چه خواهد شد؟

مسائل گونه سوم (ادامه)

همانطور که می‌بینیم، بازیگر اول ۲ واحد از بازیگر دوم خواهد برد، و طبعاً بازیگر دوم از این موضوع راضی نخواهد بود. چون بازیگر دوم منطقی است، و این نتیجه را پیش‌بینی می‌کند، لذا می‌تواند تصمیم بهتری بگیرد با انتخاب سیاست۲، به جای ۲ واحد باخت به همین مقدار ببرد. چون بازیگر اول داناست، با پیش‌بینی این موضوع با انتخاب سیاست ۲ می‌تواند بازده خود را از ۲- به ۴ برساند. با درک این واقعیت، بازیگر دوم ترجیح خواهد داد که به سیاست سوم باز گردد تا ۴ واحد باخت را به ۳ واحد برد مبدل سازد. این مسیر بازیگر اول را مجدداً به فکر انتخاب سیاست ۱ می‌اندازد، و بدین ترتیب، تمام این حرکتها از نو تکرار می‌گردد. در واقع، جواب (سیاست ۱ برای بازیگر اول سیاست ۳ برای بازیگر دوم) **جوابی ناپایدار** است، بنابراین لازم است که به جستجوی جواب قانع کننده‌تری پرداخت.

مسائل گونه سوم (ادامه)

نکته کلیدی آن است که هر گاه سیاست یک بازیگر قابل پیش‌بینی باشد، حریف او می‌تواند برای بهبود وضعیت خود بیشترین استفاده را از این اطلاعات ببرد.

بنابراین، ویژگی عمده یک برنامه عاقلانه در چنین بازیهایی آن است که هیچ کدام از دو بازیگر نتواند سیاست رقیب را پیش‌بینی کند.

در نتیجه، به جای یک سیاست منحصر به فرد که همواره مورد استفاده قرار گیرد، از میان سیاستهای قابل قبول باید یکی را به صورت تصادفی انتخاب کرد. به این ترتیب، هیچ بازیگری از پیش حتی سیاست انتخابی خودش را هم نمی‌داند تا چه رسد به سیاست حریف.

مسائل گونه سوم (ادامه)

بنابراین، یافتن روشی مناسب در مورد بازیهایی که نقطه زین‌اسبی ندارند ضرورت می‌یابد. در بخش بعدی روش یافتن جواب بهینه چنین بازیهایی را شرح می‌دهیم.

بازیهای با سیاستهای مختلط

اگر در یک بازی نقطه زین‌اسبی وجود نداشته باشد، نظریه بازی به هر بازیگر توصیه می‌نمایند که سیاستهای خود را بر اساس یک تابع توزیع احتمالی انتخاب نماید و برای بیان موضوع به زبان ریاضی، فرض کنید:

بازیهای با سیاستهای مختلط

- X_i = احتمال آنکه بازیگر اول سیاست i را بر گزینند. ($i = ۱،۲,...,m$)
- Y_j = احتمال آنکه بازیگر دوم سیاست j را برگزینند. ($j = ۱،۲,...,n$)

که m و n بیانگر تعداد سیاستهای مربوطه هستند.

بازیگر اول با تعیین مقادیر $(x_1, x_2,...,x_m)$ برنامه بازی خود را مشخص می‌سازد. چون این مقادیر معرف احتمال هستند، پس باید غیرمنفی و جمعاً مساوی یک باشند. همین‌طور، برنامه بازیگر دوم نیز از طریق تعیین مقادیر متغیرهای $(y_1,y_2,...,y_n)$ مشخص می‌گردد.

بازیهای با سیاستهای مختلط (ادامه)

این بدان معنی است که بازیگر اول با احتمالی برابر، هر یک از سیاستهای (ساده) ۱ و ۲ را انتخاب می‌کند، درحالی که سیاست ۳ را کلاً کنار می‌گذارد. به همین ترتیب، بازیگر دوم نیز به طور تصادفی یکی از سیاستهای ساده دوم یا سوم خود را برمی‌گزینند.

هر چند هیچ معیار کاملاً رضایت بخشی برای ارزیابی سیاستهای مختلط وجود ندارد، اما شاید امید ریاضی بازده از همه منطقی‌تر باشد. این معیار با استفاده از تعریف امید ریاضی به ترتیب زیر بیان می‌گردد.

$$\text{امید ریاضی بازده} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij} y_{ij}$$

که p_{ij} بازده بازیگر اول است در صورتی که او سیاست ساده i و بازیگر دوم سیاست ساده j را انتخاب کند.

بازیهای با سیاستهای مختلط (ادامه)

مقصود از حداقل امید ریاضی بازده، مقدار کمترین بازده مورد انتظاری است که از هر کدام از سیاستهای مختلط حاصل می‌شود. بنابراین، سیاست بهینه بازیگر اول طبق این ضابطه عبارت از آن سیاستی است که صرفنظر از این که بازیگر دوم چه سیاستی را انتخاب کند بیشترین امید ریاضی بازده او را ضمانت نماید. مقدار این «حداکثر حداقل» امید بازده به کمترین مقدار بازی مرسوم است و با $\underline{V}$ مشخص می‌گردد.

بازیهای با سیاستهای مختلط (ادامه)

به همین ترتیب، سیاست بهینه بازیگر دوم آن است که تضمین نماید امید ریاضی زیان او، صرفنظر ازاین که بازیگر اول چه سیاستی داشته باشد، حداقل گردد. مقدار مربوط به امید ریاضی بازده بازیگر اول حد بالایی بازی خوانده می‌شود و با $\bar{v}$ مشخص می‌گردد.

یادآوری می‌گردد که اگر فقط از سیاستهای خالص استفاده شود، بازیهایی که فاقد نقطه زین‌اسبی باشند به حالت پایدار نمی‌رسند، زیرا بازیگران ترغیب می‌شوند که سیاست خود را برای رسیدن به وضعیت بهتری تغییر دهند.

بازیهای با سیاستهای مختلط (ادامه)

در بازیهای با سیاست مختلط نیز شرط رسیدن به جواب بهینه پایدار آن است که برابری کمترین مقدار بازی با حد بالایی است. خوشبختانه، بر اساس قضیه حداقل حداکثر، این شرط در مورد چنین بازیهایی صدق می‌کند.

قضیه حداقل حداکثر: چنانچه از سیاستهای مختلط استفاده شود، همواره مقدار ارزش بازی ثابت خواهد بود بنابراین اگر هر دو بازیگر از سیاست مختلطی استفاده کنند که بر طبق ضابطه حداقل حداکثر بهینه باشد، آنگاه امید ریاضی بازده آنها مساوی v خواهد بود، و هیچکدام نمی‌توانند با تغییر یک جانبه سیاست خود به وضعیت بهتری برسند.

بازیهای با سیاستهای مختلط (ادامه)

قضیه حداقل حداکثر (صورت دیگر):

هر ماتریس بازده mXn دارای یک جواب است.مقدار منحصر به فرد **V** که ارزش بازی نامیده می‌شود و نیز استراتژی‌های بهینه‌ای برای بازیگران وجود دارد به نحوی که:

- بازیگر اول صرف نظر از سیاست بازیگر دوم بردی حداقل به اندازه **V** کسب نماید.
- بازیگر دوم صرف نظر از سیاست بازیگر اول باختی حداکثر به اندازه **V** داشته باشد

بازیهای با سیاستهای مختلط (ادامه)

هر چند که مفهوم سیاستهای مختلط در شرایطی که بازی مرتب تکرار شود بدیهی به نظر می‌رسد، اما چنانچه بازی فقط یک بار انجام شود تا حدودی نیاز به تفسیر دارد. در چنین حالتی پیروی از یک سیاست مختلط به انتخاب و استفاده از یک سیاست ساده (که به طور تصادفی از یک توزیع احتمالی انتخاب می‌گردد) منجر می‌شود، بنابراین شاید منطقی‌تر به نظر برسد که از تصادفی بودن صرفنظر گردد و بهترین سیاست ساده انتخاب شود.

لیکن، همانطور که در بخش قبلی نشان داده شد، یک بازیگر نباید اجازه دهد که حریفش بداند سیاست او چه خواهد بود (یعنی فرایند حل نظریه بازی نباید مشخص سازد که در حالات ناپایدار بودن بازی، کدام سیاست ساده به کار رفته خواهد شد).

بازیهای با سیاستهای مختلط (ادامه)

تنها راه برای تضمین حفظ امید ریاضی بازده بهینه v این است که سیاست ساده به طور تصادفی از توزیع احتمالی سیاست مرکب بهینه انتخاب گردد.

تنها نکته‌ای که باقی می‌ماند این است که چگونه می‌توان سیاست مختلط بهینه هر بازیگر را مشخص ساخت. برای این کار چند راه وجود دارد. این روش وقتی به کار گرفته می‌شود که بازیگر فقط دو سیاست ساده (غیر مغلوب) را اتخاذ می‌کند. در این مورد بازیهای بزرگتر، روش متداول تبدیل مسئله به برنامه‌ریزی خطی و حل آن با روش سیمپلکس و با استفاده از کامپیوتر است.

مثال

با در نظر گرفتن ماتریس دریافت زیر استراتژی بهینه بازیکن اول را به دست آورید:

$$\sum_{i=۱}^{۳} x_i = ۱, x_i \geq ۰, i = ۱,۲,۳$$
$$۲x_۱ + ۳x_۲ + ۰x_۳ \geq v$$
$$۵x_۱ + x_۲ + ۳x_۳ \geq v$$

	بازیکن II	
بازیکن I	۵	۲
	۱	۳
	۳	۰

v صرف نظر از سیاست بازیگر دوم حداقل برد بازیگر اول است که با توجه به اینکه تمام عناصر ماتریس دریافت مثبت هستند، مقداری مثبت است

نکته: درصورتی که تمامی عناصر ماتریس دریافت مثبت نباشد، قدرمطلق کوچکترین عنصر ماتریس(k) را به تمامی عناصر ماتریس اضافه نمایید

مثال(ادامه)

تمامی معادله ها رابر v تقسم می کنیم

$$\frac{x_1}{v} \geq 0, \frac{x_2}{v} \geq 0, \frac{x_3}{v} \geq 0,$$

$$\frac{x_1}{v} + \frac{x_2}{v} + \frac{x_3}{v} = \frac{1}{v}$$

$$2\frac{x_1}{v} + 3\frac{x_2}{v} + 0\frac{x_3}{v} \geq 1$$

$$5\frac{x_1}{v} + \frac{x_2}{v} + 3\frac{x_3}{v} \geq 1$$

$$X_1 = \frac{x_1}{v}, X_2 = \frac{x_2}{v}, X_3 = \frac{x_3}{v}$$

$$\min \quad X_0 = X_1 + X_2 + X_3$$

$$s.to \quad :$$

$$2X_1 + 3X_2 + 0X_3 \geq 1$$

$$5X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 1$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0$$

بول به صورت حل مدل، استراتژی بهینه بازیکن اول به صورت (۰، ۳/۵، ۲/۵) خواهد بود

استراتژی بهینه بازیکن دوم با حل مزدوج مدل فوق ربه دست خواهد امد

فرم کلی برنامه ریزی خطی

$$\max\ v = \min \frac{1}{v} = \min \{X_1 + X_2 + \ldots + X_m\}$$

$$s.to:$$

$$a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \ldots + a_{m1}X_m \geq 1$$

$$a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{m2}X_m \geq 1$$

$$\ldots$$

$$a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + \ldots + a_{mn}X_m \geq 1$$

$$X_1, X_2, \ldots, X_m \geq 0$$

$$X_i = \frac{x_i}{v}, i = 1, 2, \ldots, m$$

	بازیکن II				
	y_1	y_2	y_3	y_n	
بازیکن I	x_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
	x_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
	⋮	⋮	⋮		⋮
	x_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

فرض برآن است که تمامی اعداد داخل جدول مثبت هستند و در صورت وجود اعداد منفی قدر مطلق کوچکترین عدد منفی به تمام اعداد جدول اضافه می شود

x_1، x_2، ...، x_n و y_1، y_2، ...، y_n به ترتیب درصورت توزیع احتمال دو بازیکن اول و دوم در استراتژی های به کار گرفته هستند و v حداقل عایدی بازیکن اول از جدول بالا می باشد.

حل بهینه مساله برنامه ریزی فوق استراتژی بهینه بازیکن اول را مشخص می سازد

فرم کلی برنامه ریزی خطی

حل بهینه مساله مزدوج بازیکن اول، استراتژی بهینه بازیکن دوم را مشخص می سازد

$$\max \quad Y_0 = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

$$s.to:$$

$$a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + \ldots + a_{1n}Y_n \leq 1$$

$$a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + \ldots + a_{2n}Y_n \leq 1$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}Y_1 + a_{m2}Y_2 + \ldots + a_{mn}Y_n \leq 1$$

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \geq 0$$

$$Y_0 = \frac{1}{v}, Y_i = \frac{y_i}{v}, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

	بازیکن II				
	y_n	y_3	y_2	y_1	
بازیکن I	a_{1n}	…	a_{12}	a_{11}	x_1
	a_{2n}	…	a_{22}	a_{21}	x_2
	⋮		⋮	⋮	⋮
	a_{mn}	…	a_{m2}	a_{m1}	x_m