

## برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

فصل دوم:

### تقاضای مستقل (Independent Demand) – مدل احتمالی (Probabilistic Model)

مدرس: دکتر مسعود ماهوتچی

نیمسال دوم سال تحصیلی ۱۳۸۹-۱۳۹۰

#### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

• در این فصل، فرض بر آنست که تقاضاها از یکدیگر مستقل هستند اما احتمالی می باشند یا زمان تحویل کالا احتمالی است. ( Probabilistic Demand/ Lead time)

• همچنین فرض بر آنست که متوسط تقاضا در یک بازه زمانی، ثابت است. از طرفی بعلت آنکه زمان تحویل کالا بسیار مهم است (از آن جهت که مطمئن شویم به شرایط کمبود یا Stock out برخورد نمی کنیم) پیدا کردن توزیع زمان تحویل کالا بسیار حائز اهمیت خواهد بود.

• در مدل‌های EOQ هیچ گونه عدم قطعیت و یا ریسک لحاظ نمی شود.

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

• میزان موجودی در حالت تقاضای مستقل به دو قسمت زیر تقسیم می شود:

۱- موجودی کاری (Working stock) که قرار است استفاده شود

۲- موجودی ایمنی (Safety stock or fluctuation/ buffer stock) که در صورت کمبود مصرف می شود

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

**نکته:** موجودی ایمنی از میزان سفارش مستقل است و تنها به این دلیل در نظر گرفته می شود که در مواقع لزوم استفاده گردد؛ یعنی برای زمانی لحاظ می شود که میزان تقاضا در زمان تحویل بیش از حد انتظار باشد.

پس موجودی ایمنی برای کنترل تقاضا، عدم دقت در پیش بینی زمان تحویل تصادفی، تاخیرات عرضه کننده و برای جلوگیری از کمبود در زمان تحویل کالا می باشد.

**نکته:** در مجموع، موجودی ایمنی دو اثر دارد:

۱- کاهش هزینه کمبود

۲- افزایش هزینه نگهداری

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

۱- رفتار تقاضا در زمان تحویل برای همه دوره ها (Periods) در یک سال (Cycle) یکسان است.

۲- میزان سفارش برای همه دوره ها، یکسان در نظر گرفته می شود؛ یعنی سیستم سفارش ساده مدنظر است. (FOS= Fixed Order System)

۳- مقدار موجودی که در محاسبه هزینه نگهداری لحاظ می شود از رابطه زیر بدست می آید

$$\text{موجودی کاری} = \frac{Q}{2} + S$$

ذخیره اطمینان

دکتر مسعود ماهوتچی

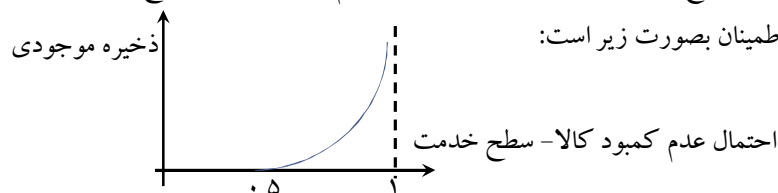
برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

5

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

۴- هر چقدر میزان ذخیره اطمینان افزایش یابد، به همان نسبت، میزان کمبود یا درصد کمبود کاهش پیدا می کند. هدف یافتن نقطه ای است که متوسط هزینه های حاصل از کمبود کالا و هزینه های حاصل از نگهداری موجودی اطمینان در مجموع حداقل گردد. رابطه بین احتمال عدم کمبود کالا و سطح خدمت و ذخیره اطمینان بصورت زیر است:



بعبارتی هر چقدر ذخیره موجودی بالاتر رود به نسبت کمتری در سطح خدمت تاثیر می گذارد

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

6

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

۵- میزان موجودی و کمبود در حالتی که تقاضا در زمان تحویل تصادفی است در زیر نشان داده شده است.



دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

7

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

۶- در مورد موجودی کالای نیمه ساخته، ذخیره ایمنی بعثت عدم تعادل بار کاری بین بخشهای مختلف تولید، نگهداری می گردد.

۷- زمانی که کمبود در لایه های خرده فروشی (Retailers) اتفاق افتد، معمولاً کمبود به از دست رفتن فروش (Lost sale) منجر می شود؛ چرا که مشتری در این سطح، نیاز خود را از جایی دیگر تامین می کند.

چنانچه نیاز در سطح تولید یا سطح مراکز توزیع (Distribution centers) باشد ممکن است این کمبود به سفارش عقب افتاده (Back order) تبدیل گردد.

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

8

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

۸- متوسط موجودی اطمینان در هر مرکز ذخیره (خرده یا عمده) برابر با متوسط موجودی در دسترس درست قبل از تحویل سفارش جدید می باشد.

مثلاً اگر قرار است تا دقایقی دیگر موجودی تحویل شود، میزان موجودی انبار بعنوان یک داده برای موجودی اطمینان در نظر گرفته می شود و سپس متوسط همه این مقادیر، طی دوره های مختلف محاسبه می شود.

9 برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

دکتر مسعود ماهوتچی

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

۹- موارد زیر باعث افزایش سطح موجودی اطمینان می شوند:

\* افزایش هزینه کمبود و یا افزایش سطح خدمت

\* هزینه نگهداری پایین

\* بالا بودن میزان تغییرات تقاضا و زمان تحویل

۱۰- میزان ذخیره ایمنی تاثیری در میزان ذخیره کاری ندارد؛ ذخیره کاری بر اساس متوسط تقاضا معین می شود.

10 برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

دکتر مسعود ماهوتچی

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

۱۱- محاسبه ذخیره ایمنی و نقطه سفارش مجدد در دو حالت انجام می شود:

۱- هزینه کمبود مشخص است.

۲- هزینه کمبود مشخص نیست و مدیریت، یک سطح خدمت را با احتمالات مشخص بیان می کند.

۱۲- از آنجا که تقاضا در این حالت تصادفی است، هدف عمدتاً کمینه سازی متوسط هزینه هاست.

ارزش انتظاری هزینه  $\min fc$  هدف:

تابع توزیع یا زمان تحویل کالا می تواند یک توزیع پیوسته یا گسسته باشد

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

11

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

۱۳- میانگین و انحراف معیار تقاضا در دوره تحویل برای توزیع گسسته و پیوسته از روابط زیر بدست می آید:

\* میانگین تقاضا در زمان تحویل کالا: معیاری برای میانه توزیع

$$\bar{M} = \int_0^{\infty} M f(M) dM, \quad \bar{M} = \sum_{M=0}^{Max} MP(M)$$

\* واریانس تقاضا: معیاری برای پراکندگی توزیع

$$\sigma_M^2 = \int_0^{\infty} (M - \bar{M})^2 f_M dM, \quad \sigma_M^2 = \sum_{M=0}^{Max} (M - \bar{M})^2 P(M)$$

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

12

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

و احتمال کمبود بعد از نقطه سفارش کالا بصورت زیر محاسبه می شود:

$$P(M > B) = \int_B^{\infty} f(M) dM \quad \text{پیوسته} \quad , \quad P(M > B) = \sum_{M=B+1}^{Max} P(M) \quad \text{گسسته}$$

✓ چنانچه متغیر کمبود را بصورت یک متغیر تصادفی در نظر بگیریم، می توان متوسط

$$L = \begin{cases} 0 & M \leq B \\ M - B & M > B \end{cases} \quad \text{آن را بصورت زیر تخمین زد:}$$

$$\text{✓ متوسط کمبود در دوره تحویل} \quad E(L) = \int_0^B 0 \times f(M) dM + \int_B^{\infty} (M - B) f(M) dM \quad \text{پیوسته}$$

$$\text{گسسته} \quad E(L) = \sum_0^B 0 \times P(M) + \sum_{M=B+1}^{Max} (M - B) P(M)$$

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

13

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

۱۴- توزیع تقاضا می تواند نرمال، پواسان و یا نمایی منفی باشد که برای استفاده هر یک از آنها باید آزمونهای آماری مناسب انجام شود. از این توزیعها به صورت زیر استفاده می شود:

۱- برای کارخانجات و مراکز توزیع معمولاً از توزیع نرمال استفاده می گردد.

۲- برای خرده فروشها از توزیع پواسان استفاده می شود.

۳- توزیع نمایی منفی برای خرده و عمده فروشها کاربرد دارد.

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

14

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

توزیع نرمال:

این توزیع، متقارن و زنگوله ای شکل است و دارای دو مشخصه میانگین و انحراف معیار می باشد. در خصوص این توزیع می توان واقعیات زیر را مدنظر داشت:

• ۶۸.۲۷ درصد تقاضا در بازه  $\pm 1$  انحراف معیار اتفاق می افتد.

• ۹۵.۴۵ درصد تقاضا در بازه  $\pm 2$  انحراف معیار اتفاق می افتد.

• ۹۹.۷۳ درصد تقاضا در بازه  $\pm 3$  انحراف معیار اتفاق می افتد.

• این توزیع بیشتر برای حالت پیوسته کاربرد دارد.

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

15

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

توزیع نرمال:

**نکته:** زمانیکه میانگین تقاضا بالا باشد این توزیع می تواند مناسب باشد. در حالیکه برای تقاضاهای با میانگین پایین، از توزیع نرمال استفاده نمی شود.

هنگامی که توزیع تقاضا در زمان تحویل، نرمال است می خواهیم بگونه ای ذخیره اطمینان را طراحی کنیم که درصد مشخصی کمبود کالا داشته باشیم. اگر توزیع نرمال باشد و این درصد هم مشخص باشد می توان براحتی و با استفاده از توزیع نرمال استاندارد، سطح ذخیره اطمینان و سفارش مجدد را بدست آورد:

$$B = \bar{M} + Z_{\alpha} \sigma$$

انحراف معیار تقاضا در دوره تحویل      میانگین تقاضا در دوره تحویل      ذخیره اطمینان (S)      نقطه سفارش مجدد

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

16



## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

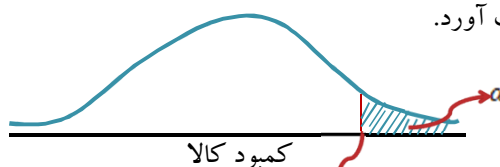
## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

توزیع نرمال:

$$E(S) = \int_0^{\infty} (B - M) f_M dM = B - \bar{M}$$

محاسبه ارزش انتظاری ذخیره اطمینان

**نکته:** چنانچه میزان تقاضا بطور قطعی برابر  $\bar{M}$  در نظر گرفته شود، مساله را می توان بدون ذخیره اطمینان و یا یکی از روشهای قطعی مانند EOQ حل کرد. با استفاده از شبیه سازی می توان توزیع کمبود را محاسبه کرد و سپس، موجودی اطمینان را بر اساس این تابع توزیع بدست آورد.



موجودی ای که می تواند بعنوان ذخیره اطمینان در نظر گرفته شود

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

17

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

توزیع نرمال:

**نکته:** توزیع نرمال، **متقارن** است در حالیکه طبیعت تقاضای بسیاری از کالاها **متقارن** نمی باشد. از طرفی، توزیع نرمال می تواند دربرگیرنده **اعداد منفی** باشد که با واقعیت منطبق نیست.

طبیعت (تقاضای) بسیاری از کالاها گسسته در حالیکه تابع توزیع نرمال برای متغیرهای **پیوسته** بسیار مناسب می باشد.

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

18

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

توزیع پواسان:

- ۱- این توزیع برای فضای گسسته مناسب می باشد.
- ۲- دارای چولگی به سمت راست است. (داده های بیشتری در سمت راست توزیع قرار می گیرند) و یک تابع توزیع متقارن نمی باشد.
- ۳- دارای یک پارامتر می باشد  $\bar{M}$  و انحراف معیار آن برابر  $\sqrt{\bar{M}}$  خواهد بود.
- ۴- چنانچه میانگین توزیع بیشتر از ۱۲ باشد، شکل آن تقریباً شبیه توزیع نرمال است.
- ۵- این توزیع برای میانگین بالاتر از ۲۰ معمولاً استفاده نمی شود.

19 برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

دکتر مسعود ماهوتچی

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

توزیع پواسان:

- ۶- برای تقاضاهای گسسته، پراکنده / غیرمتقارن و کوچک که دارای نرخ ثابت هستند تقریب بسیار خوبی است.
- ۷- تابع توزیع پواسان به شکل زیر است:

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad \bar{x} = \lambda, \quad \sigma^2 = \lambda$$

20 برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

دکتر مسعود ماهوتچی

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

توزیع نمایی منفی:

۱- این توزیع برای متغیرهای پیوسته است.

۲- شکل آن بصورت زیر است:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad E(x) = \frac{1}{\lambda}, \quad \sigma = \frac{1}{\lambda}$$

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

برای محاسبه نقطه سفارش مجدد، حالات زیر در نظر گرفته می شود:

۱- هزینه کمبود مشخص باشد (مثلاً اگر سفارش عقب افتاده مجاز باشد)

۱-۱- هزینه کمبود برای هر واحد (per unit)

۲-۱- هزینه کمبود برای هر بار کمبود (per outage)

**نکته:** می دانیم هر چقدر موجودی اطمینان بیشتری داشته باشیم، احتمال کمبود و هزینه آن کمتر خواهد بود. از طرفی هزینه نگهداری بالاتر می رود. بنابراین برای پیدا کردن بهترین نقطه سفارش می بایست شرایطی را در نظر گرفت که کل هزینه کمینه شود.

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

**نکته:** هنگامی که شرایط، احتمالی است (تقاضا یا زمان تحویل تصادفی است) میزان تقاضا در زمان تحویل احتمالی خواهد بود و هزینه کل سیستم در زمان تحویل کالا، احتمالی خواهد شد. هدف، کمینه کردن ارزش انتظاری هزینه می باشد؛ هر چند که معیارهای دیگر مثل ریسک هم می تواند لحاظ گردد.

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

23

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

محاسبه نقطه سفارش مجدد و ذخیره اطمینان در یکی از شرایط زیر محاسبه می شود:

- ۱- تقاضا و زمان تحویل ثابت است.
- ۲- تقاضا متغیر ولی زمان تحویل ثابت است.
- ۳- تقاضا ثابت ولی زمان تحویل متغیر است.
- ۴- تقاضا و زمان تحویل هر دو متغیر هستند.

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

24

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

**نکته:** تقاضا معمولاً در بازه های سالانه و یا دوره ای مطرح می شود اما در این بخش، از آنجا که هدف، محاسبه ذخیره اطمینان و نقطه سفارش بهینه می باشد، نیاز به میزان تقاضا در دوره تحویل است چنانچه:

۱- نرخ تقاضا در طول دوره ثابت باشد.

۲- تقاضاها در دوره های مختلف، از هم مستقل باشند. یا هیچ گونه همبستگی پیاپی (Serial correlation) بین داده ها وجود نداشته باشد.

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

می توان از روش Convolution برای محاسبه توزیع تقاضا در دوره تحویل استفاده کرد.

روش Convolution:

چنانچه  $f$  و  $g$  دو تابع توزیع متفاوت باشند، Convolution آنها بصورت زیر تعریف می شود:

$$(f \otimes g)(x) = \int_0^{\infty} f(z) \times g(x - z) dz$$

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

مثلاً اگر زمان تحویل کالا دو ماه باشد، تقاضا برای ماه اول  $x$  و برای ماه دوم  $y$  داده شده است عبارتی ما بدنبال تابع توزیع تقاضای  $x+y=z$  می باشیم. پس بدنبال یافتن  $f(z)$  هستیم. تابع چگالی  $Z$  را می توان بصورت زیر بدست آورد:

$$f(z) = \int_0^{\infty} f(x) \times g(x-z) dx$$

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

27

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

**مثال:** فرض کنید توزیع تقاضا برای کالا در هفته بصورت زیر داده شده است:

تقاضا	۰	۱	۲	۳
احتمال	۰.۱	۰.۴	۰.۳	۰.۲

حال چنانچه بخواهیم تقاضا را برای دو هفته بدست بیاوریم، می توانیم از بسط دو جمله ای آن را محاسبه کنیم. بسط دو جمله ای به شکل زیر نوشته می شود:

$$0.1 + 0.4x + 0.3x^2 + 0.2x^3 \xrightarrow{\text{تقاضا}}$$

↙ احتمال

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

28

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

حال اگر بخواهیم این تابع توزیع را برای دو هفته پیدا کنیم کافی است آن را بتوان ۲ برسانیم.

$$= (0.1 + 0.4x + 0.3x^2 + 0.2x^3)^2$$

$$= 0.01 + 0.08x + 0.22x^2 + 0.28x^3 + 0.25x^4 + 0.12x^5 + 0.04x^6$$

بنابراین تابع به شکل زیر خواهد شد:

تقاضا برای دو هفته	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
احتمال	۰.۰۱	۰.۰۸	۰.۲۲	۰.۲۸	۰.۲۵	۰.۱۲	۰.۰۴

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

29

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا و زمان تحویل ثابت:

در این حالت نیازی به ذخیره اطمینان نمی باشد زیرا تصمیم در شرایط قطعیت گرفته می شود و مدیر، با دانش کامل نسبت به رفتار تقاضا، میزان سفارشدهی را مدیریت می کند.

در این حالت، بهنگام تحویل کالا در ابتدای دوره، میزان موجودی صفر است. هر چند این فرض بسیار غیرواقعی است، اما چنانچه میزان تقاضای یک کالا در حد قابل قبولی قابل پیش بینی باشد می توان از روشهایی که این فرض را لحاظ کرده اند (مثل EOQ) استفاده نمود.

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

30

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل ثابت:

هنگامی که میزان تغییرات زمان تحویل کالا نسبت به میانگین آن کوچک باشد، فرض قطعی بودن زمان تحویل کاملاً منطقی است. همچنین اگر میزان سفارش از واحد دیگری در داخل سازمان تامین شود، باز هم می توان زمان تحویل کالا را مدیریت کرد و آن را قطعی در نظر گرفت. (یعنی زمان تحویل کالا قابل کنترل است)

31 برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

دکتر مسعود ماهوتچی

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل ثابت:

همان طور که گفته شد هدف، تعیین نقطه سفارش مجدد و میزان موجودی اطمینان است بگونه ای که متوسط کل هزینه کمینه گردد. این هزینه در طول دوره تحویل بصورت زیر تعریف می شود:

(TC)

هزینه کمبود + هزینه نگهداری = متوسط هزینه کل در طول دوره تحویل

هزینه نگهداری واحد کالا

$$= H \times S + \frac{R}{Q} \times A \int_B^{\infty} (M - B) f_M dM$$

متوسط موجودی اطمینان

هزینه واحد کمبود کالا

32 برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

دکتر مسعود ماهوتچی



## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل ثابت:  $TC = H(B - \bar{M}) + \frac{R}{Q} \times A \times E(M > B)$

$$\frac{\partial(TC)}{\partial(B)} = 0 \Rightarrow H + A \times \frac{R}{Q} \times (-\Pr(M > B))$$

$$\Pr(M > B) = \frac{HQ}{RA}$$

بنابراین چنانچه تابع توزیع تقاضا را داشته باشیم باید نقطه ای را روی تابع توزیع تقاضا

پیدا کنیم که احتمال بیشتر بودن تقاضا از آن برابر  $\frac{HQ}{RA}$  باشد.

$$B = \bar{M} + S$$

$$0 = \bar{M} + \bar{S}$$

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

33

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل ثابت:

**مثال:** مقدار بهینه سفارش مجدد را در مساله زیر بدست آورید:

تقاضا  $\bar{R} = 1800 \text{ units/year}$

هزینه سفارشی  $C = 300 \text{ $/order}$

درصد هزینه نگهداری  $F = 0.15$

هزینه خرید  $P = 2\$ \text{ per unit}$

هزینه سفارش عقب افتاده  $A = 10\$ \text{ per unit back ordered}$

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

34

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل ثابت:

**حل:** ابتدا باید بر مبنای متوسط تقاضا در طول سال که همان ۱۸۰۰ می باشد، سفارش

بهینه را پیدا کرد:

$$Q = \sqrt{\frac{2CR}{PF}} = \sqrt{\frac{2 \times 30 \times 1800}{2 \times 0.15}} = 600$$

$$P(S) = \frac{HQ}{AR} = \frac{P \times F \times Q}{AR} = \frac{0.3 \times 600}{1 \times 1800} = 0.1$$

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

35

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل ثابت:

**حل:** حال فرض کنید تقاضا و احتمالهای آن برای زمان تحویل کالا به شکل زیر داده

شده است:

تقاضا	Pr(M)	Pr(M>B)
۴۸	۰.۰۲	۰.۹۸
۴۹	۰.۰۳	۰.۹۵
۵۰	۰.۰۶	۰.۸۹
۵۱	۰.۰۷	۰.۸۲
۵۲	۰.۰۶	۰.۷۶
۵۳	۰.۰۵	۰.۷۱
۵۴	۰.۰۴	۰.۶۶
۵۵	۰.۰۳	۰.۶۱
۵۶	۰.۰۲	۰.۵۸

نقطه سفارش مجدد

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

36

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل ثابت - هزینه کمبود برای هر بار کمبود:

هزینه کمبود در این حالت تابعی از میزان کمبود نیست بلکه هر دفعه که کمبود اتفاق می افتد هزینه ای به سیستم تحمیل می گردد. تعداد دفعاتی که ممکن است کمبود رخ دهد، حداکثر، برابر تعداد دفعاتی است که سفارش داده می شود. بنابراین متوسط هزینه را می توان بصورت زیر بدست آورد:

$$TC = HS + G \times \frac{R}{Q} \int_B^{\infty} f(M) dM \quad \left| \begin{array}{l} \text{هزینه هربار کمبود} \\ \text{احتمال کمبود} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial(TC)}{\partial(B)} = H(B - \bar{M}) - \frac{GR}{Q} f(B) = 0 \quad \Rightarrow f(B) = \frac{HQ}{GR}$$

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

37

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل ثابت - هزینه کمبود برای هر بار کمبود:

**نکته ۱:** هزینه هربار کمبود (G) می تواند شامل هزینه فعالیتهایی باشد که برای جلوگیری از وقوع کمبود انجام می گیرد.

**نکته ۲:** این فرمول فقط برای توزیعهای پیوسته کاربرد دارد.

**نکته ۳:** چنانچه مقدار سفارش مجدد بین دو عدد صحیح قرار گیرد، عددی انتخاب می شود که دارای  $f(B)$  بزرگتر است.

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

38

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل ثابت - هزینه کمبود برای هر بار کمبود:

**نکته ۴:** در حالتی که توزیع نرمال است، بایستی از جدول توزیع نرمال استفاده شود پس بجای استفاده از  $f(B)$  باید از  $\sigma f(B)$  استفاده کرد.

**نکته ۵:** برای یافتن میزان موجودی اطمینان می توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$Z = \frac{B - \bar{M}}{\sigma} = \frac{B - \overline{DL}}{\sigma_D \sqrt{L}} = \frac{S}{\sigma_D \sqrt{L}} \Rightarrow S = Z \sigma_D \sqrt{L}$$

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل ثابت - هزینه کمبود برای هر بار کمبود:

**مثال ۱:** توزیع هفتگی بصورت نرمال با میانگین ۲۰ و انحراف معیار ۴ در نظر گرفته شده است. مقدار بهینه سفارش مجدد را پیدا کنید. هزینه نگهداری ۵ واحد در سال برای هر واحد کالا می باشد. هزینه سفارش عقب افتاده ۱۰ واحد برای هر بار کمبود در نظر گرفته می شود. مقدار سفارش بهینه برابر ۲۶ و زمان تحویل یک هفته می باشد.

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل ثابت - هزینه کمبود برای هر بار کمبود:

$$\sigma f_B = \frac{\sigma H Q}{GR} = \frac{4 \times 5 \times 26}{10 \times 52 \times 20} = 0.05 \quad \text{حل:}$$

Z معادل این مقدار در جدول نرمال برابر ۲.۰۳ می باشد پس:

$$Z = \frac{B - \bar{M}}{\sigma} \Rightarrow B = \sigma Z + \bar{M} = 2.03 \times 4 + 20 = 28.12 \approx 28$$

$$S = 28 - 20 = 8$$

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل ثابت - هزینه کمبود برای هر بار کمبود:

**مثال ۲:** تقاضا برای یک کالا دارای میانگین ۵ واحد کالا می باشد که دارای توزیع پواسن است. نقطه سفارش مجدد را در صورتی که هزینه نگهداری ۵ درصد در سال و برای هر واحد کالا باشد و هزینه سفارش عقب افتاده ۵ واحد برای هر بار کمبود بدست آورید. زمان تحویل یک هفته در نظر گرفته شده است. سفارش بهینه برابر ۱۳ می باشد.

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل ثابت - هزینه کمبود برای هر بار کمبود:

$$f_B = \frac{HQ}{GR} = \frac{5 \times 13}{5 \times 52 \times 5} = 0.05 \quad \text{حل:}$$

برای توزیع پواسن با میانگین ۵ و  $f_B = 0.05$  پاسخ بین ۰.۰۳۶ برای ۷ و ۰.۰۶۵ برای ۸ می باشد. در این حالت  $f_B$  بزرگتر مدنظر قرار می گیرد. بنابراین ۸ نقطه سفارش مجدد در نظر گرفته می شود.

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل ثابت - فروش از دست رفته برای هر واحد کالا:

در حالی که فروش از دست می رود، دیگر تعداد دوره های سفارشی برای  $R/Q$  نمی باشد؛ بلکه تعداد دوره ها از رابطه زیر بدست می آید:

$$\text{تعداد دوره} = \frac{R}{[Q + E(M > B)]}$$

متوسط تعداد کمبود در هر دوره

**نکته:** در بسیاری موارد میزان کمبود، نسبت کوچکی از میزان سفارش بهینه بوده و می توان از آن صرف نظر کرد و تعداد دوره، همان مقدار  $R/Q$  در نظر گرفت.

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل ثابت - فروش از دست رفته برای هر واحد کالا:

تنها تفاوتی که حالت فروش از دست رفته با حالت سفارش عقب افتاده دارد آنست که میانگین موجودی اطمینان تغییر خواهد کرد.

$$S = \int_0^{\infty} (B - M)f_M dM = B - \bar{M} \quad \text{در حالت سفارش عقب افتاده}$$

$$S = \int_0^B (B - M)f_M dM \quad \text{در حالت فروش از دست رفته}$$

در حقیقت در فروش از دست رفته ( $M > B$ ) مقدار موجودی **صفر** خواهد شد و در این حالت، قاعدتاً میزان متوسط موجودی اطمینان **افزایش** پیدا می کند.

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل ثابت - فروش از دست رفته برای هر واحد کالا:

در حالت فروش از دست رفته

$$\begin{aligned} S &= \int_0^B (B - M)f_M dM = \int_0^B (B - M)f_M dM - \int_B^{\infty} (B - M)f_M dM \\ &= B - \bar{M} + \int_B^{\infty} (M - B)f_M dM \end{aligned}$$

متوسط کمبود

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل ثابت - فروش از دست رفته برای هر واحد کالا:

$$\begin{aligned}
 TC &= HS + \frac{AR}{Q} \int_B^{\infty} (M - B) f_M dM \\
 TC &= H(B - \bar{M}) + \int_B^{\infty} (M - B) f_M dM + \frac{AR}{Q} \int_B^{\infty} (M - B) f_M dM \\
 TC &= H(B - \bar{M}) + \left(\frac{AR}{Q} + H\right) E(M > B) \\
 \frac{\partial(TC)}{\partial(B)} &= H - \Pr(M > B) \times \left(\frac{AR}{Q} + H\right) \Rightarrow \Pr(M > B) = \frac{HQ}{AR + HQ}
 \end{aligned}$$

**نکته:** همانطور که مشاهده می شود مقدار احتمال، کوچکتر از حالت سفارش عقب افتاده می شود؛ یعنی نقطه سفارش مجدد بیشتر از حد سفارش مجدد در حالت سفارش عقب افتاده است.

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲ 47

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل ثابت - فروش از دست رفته برای هر واحد کالا:

**مثال:** سفارش بهینه یک کالا ۱۰۰۰ عدد می باشد درحالی که نیاز سالیانه آن ۵۰۰۰ عدد است. هزینه نگهداری در واحد کالا برای هر سال ۱۰ واحد است. میزان هزینه فروش از دست رفته ۵۰ واحد می باشد. نقطه سفارش بهینه را بیابید.

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲ 48



## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل ثابت - فروش از دست رفته برای هر واحد کالا:

$$\Rightarrow P(S) = \frac{HQ}{AR + HQ} = \frac{10 \times 100}{50 \times 5000 + 10 \times 1000} = 0.0038$$

تقاضا	احتمال	احتمال کمبود
۱۵۰	۰.۰۱	۰.۹۹
۲۰۰	۰.۰۴	۰.۹۵
۲۵۰	۰.۲۱	۰.۷۴
۳۰۰	۰.۵۵	۰.۱۹
۳۵۰	۰.۰۹	۰.۱
۴۰۰	۰.۰۷	۰.۰۳
۴۵۰	۰.۰۳	۰.۰۰



دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

49

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل ثابت - فروش از دست رفته برای هر بار:

هزینه کمبود مشابه روش ذکر شده در بالا می باشد با این تفاوت که تعداد کمبود برای

محاسبه هزینه کمبود مهم نخواهد بود.

$$TC = HS + \frac{GR}{Q} \int_B^{\infty} f_M dM$$

$$TC = H(B - \bar{M}) + H \times E(M > B) + \frac{GRP(M > B)}{Q}$$

$$\frac{\partial(TC)}{\partial(B)} = H - H \times \Pr(M > B) - \frac{GRf(B)}{Q}$$

$$= \frac{f(B)}{1 - P(M > B)} = \frac{HQ}{GR}$$

$F(B)$

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

50

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل ثابت - فروش از دست رفته برای هر بار:

**نکته:** استفاده از فرمول بالا بسیار سخت است مگر آنکه توزیع مربوطه بصورت جدول، موجود باشد.

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا ثابت و زمان تحویل متغیر:

در این حالت دو گزینه برای پیدا کردن نقطه سفارش مجدد وجود دارد:

۱- استفاده از حداقل، حداکثر و متوسط زمان تحویل. برای هر حالت نقطه سفارش مجدد محاسبه می شود که معمولاً برای حالت متوسط، نقطه سفارش مجدد بدست می آید.

۲- چنانچه توزیع زمان تحویل کالا بصورتی مشخص باشد می توان برای محاسبه تقاضا در زمان تحویل کالا از رابطه استفاده کرد.

$$\bar{M} = D \times \bar{L} \rightarrow B = \bar{M} + Z\sigma, \quad \sigma_M = D\sigma_L \Rightarrow B = D\bar{L} + ZD\sigma_L$$

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

**مثال:** فرض کنید تقاضای یک محصول ۲۶۰ باشد. سفارشها بصورت ۲۵ عددی داده می شود. تقاضای هفتگی به میزان ثابت برابر ۵ در هفته است. هزینه نگهداری در سال برابر با ۱۰ و هزینه سفارش عقب افتاده برابر با ۱۰ برای هر واحد کالا می باشد. نقطه سفارش مجدد کالا چه میزان است اگر زمان تحویل کالا بصورت هفتگی و مطابق جدول زیر تعریف شده باشد.

زمان تحویل	احتمال	تقاضا	$P(M>B)$
۳	۰.۲۵	۱۵	۰.۷۵
۴	۰.۳۵	۲۰	۰.۴
۵	۰.۲۵	۲۵	۰.۱۵
۶	۰.۱	۳۰	۰.۰۵
۷	۰.۰۵	۳۵	۰

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

53

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

$$P(M > B) = \frac{HQ}{AR} = \frac{10 \times 25}{10 \times 260} = 0.096$$

**حل:**

مقدار ۰.۰۹۶ بین ۰.۱۵ و ۰.۰۵ می باشد بنابراین نقطه سفارش مجدد برابر ۳۰ در نظر گرفته می شود.

$$S = B - \bar{M} = 30 - 21.75 = 8.25 \cong 8$$

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

54

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل متغیر:

در واقعیت ممکن است حالتی بوجود آید که تقاضا و زمان تحویل کالا هر دو با هم تصادفی باشند که در این حالت برای مدلسازی رفتار تقاضا در زمان تحویل کالا باید از تابع توام تقاضا در زمان تحویل استفاده نمود:  $f(m, l)$

در صورتی که این متغیرها از هم مستقل باشند میانگین و انحراف معیار آنها از رابطه زیر بدست می آید:

$$\bar{M} = \bar{D} \times \bar{L}, \quad \sigma^2_M = \bar{L}^2 \sigma^2_D + \bar{D}^2 \sigma^2_L + \sigma^2_D \sigma^2_L$$

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### نقطه سفارش مجدد و میزان ذخیره اطمینان در حالت احتمالی

تقاضا متغیر و زمان تحویل متغیر:

نکته: در صورتی که دو متغیر مستقل نباشند پیدا کردن واریانس  $M$  پیچیده تر خواهد شد و جملات بیشتری به رابطه بالا اضافه خواهد شد.

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

### سطح خدمت

زمانی که یک سازمان نسبت به هزینه های کمبود یا فروش از دست رفته اش آگاهی لازم را ندارد برآورده سازی یک سطح خدمت مناسب را به عنوان هدف خود قرار می دهد.

در این حالت، هدف، برآورده سازی نیاز مشتری با یک احتمال مشخص و ثابت است.

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

### سطح خدمت

روشهای متعددی برای اندازه گیری سطح خدمت وجود دارد. این معیار می تواند بر اساس موارد زیر اندازه گیری شود:

۱- واحد کالا

۲- واحد پول

۳- میزان تراکنها

۴- میزان سفارنها

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

### سطح خدمت

**تعریف سطح خدمت:** درصدی از تقاضا می باشد که بموقع، توسط موجودی انبار تامین شده است. بنابراین اگر همه مشتریان تقاضای خود را در وقت نیاز دریافت کنند، سطح خدمت ۱۰۰ درصد می باشد.

**نکته:** معیار اندازه گیری سطح خدمت می تواند برای کالاهای مختلف در انبار بصورت متفاوتی اندازه گیری شود و این بدان علت است که کنترلهای مختلفی برای کالاهای موجود در انبار ممکن است انجام شود.

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

### سطح خدمت

**نکته:** مجموع سطح خدمت و سطح کمبود ۱۰۰٪ است. بنظر می رسد که رسیدن به سطح خدمت ۱۰۰٪ بسیار هزینه بر باشد. برای رسیدن به سطح خدمت ۱۰۰٪ سرمایه گذاری روی موجودی اطمینان بشدت افزایش می یابد.

**نکته:** در بسیاری موارد داشتن یک سطح خدمت نزدیک به ۱۰۰ ضروری می باشد مثل زمانی که خط تولید نیاز به یک قطعه خاص دراد که در صورت عدم برآورده سازی بموقع نیاز ممکن است منجر به توقف خط تولید شود. در این حالت از روش MRP برای حل مشکل مربوطه استفاده می شود.

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

### سطح خدمت

بطور کلی چهار معیار برای اندازه گیری سطح خدمت بشرح زیر مورد استفاده قرار می گیرد:

- ۱- تعداد سرویس در هر دوره سفارشدهی
- ۲- تعداد سرویس در سال
- ۳- درصد واحدهای تامین شده در زمان درخواست
- ۴- درصدی از روزهای فعالیت (Operating days)

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

61

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

### سرویسدهی در هر دوره سفارش

در این حالت میزان سرویسدهی برابر با تعداد دفعاتی است که در طول سفارشدهی و در زمان تحویل کالا، تقاضا از موجودی انبار تامین شده است. در این حالت میزان کمبود و اندازه آن اهمیتی ندارد.

تعداد دوره هایی که با کمبود مواجه شده ایم  $= 1 - \frac{\text{درصد سطح خدمت در هر دوره سفارشدهی}}{\text{کل تعداد دوره های سفارش}}$

احتمال کمبود در هر دوره  $= 1 - P(M > B)$

احتمال کمبود در هر دوره می تواند درصدی از زمان تحویل کالا در نظر گرفته شود که بیشتر از نقطه سفارش مجدد می باشد.

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

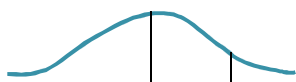
62

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### سرویسدهی در هر دوره سفارش

**نکته:** به عنوان مثال اگر توزیع تقاضا در زمان تحویل کالا نرمال باشد و سطح خدمت مربوطه ۹۹٪ در نظر گرفته شود  $Z$  مربوطه را در جدول نرمال استاندارد پیدا می کنیم و سپس با استفاده از رابطه زیر نقطه سفارش مجدد را می یابیم:

$$B = \bar{M} + Z\sigma_M$$



همان طور که گفته شد میزان موجودی اطمینان را می توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$S = Z\sigma_M = B - \bar{M}$$

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

63

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### سرویسدهی در هر دوره سفارش

**مثال:** میزان سفارش بهینه و نقطه سفارش مجدد را با توجه به داده های زیر پیدا کنید.

$\bar{R}$ : 18000 units per year

C: 5200 per order

H: \$5 per unit per year

L=1 day

سطح کمبود = ۰.۱۲۵

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

64



## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## سرویسدهی در هر دوره سفارش

$$Q = \sqrt{\frac{2 \times 200 \times 1800}{5}} = 1200 \text{ units}$$

حل:

تقاضا در زمان تحویل کالا بصورت زیر داده شده است

تقاضا	احتمال	Pr(M>B)
۳۰	۰.۰۲۵	۰.۹۷۵
۴۰	۰.۱	۰.۸۷۵
۵۰	۰.۲	۰.۶۷۵
۶۰	۰.۳۵	۰.۳۲۵
۷۰	۰.۲	۰.۱۲۵ ←
۸۰	۰.۱	۰.۰۲۵
۹۰	۰.۰۲۵	۰

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

65

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## سرویسدهی در هر دوره سفارش

حل: با توجه به سطح کمبود داده شده، نقطه سفارش مجدد باید برابر ۷۰ واحد کالا

باشد. پس میزان موجودی اطمینان از رابطه زیر بدست می آید:

$$S = 70 - 60 = 10$$

$$\bar{M} = \sum MP(M)$$

چنانچه بخواهیم متوسط کمبود را بیابیم می توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم

$$E(M > B) = \sum_{70}^{90} (M - B)P(M) = (70 - 70) * 0.2 + (80 - 70) * 0.1 + (90 - 70) * 0.25$$

$$E(M > B) = 1.5$$

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

66

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## سرویسدهی در هر دوره سفارش

**حل:** بنابراین متوسط کمبود در سال برابر است با:

$$E(M > B) \frac{R}{Q} = 1.5 * \frac{18000}{1200} = 22.5$$

در این مثال چنانچه بخواهیم ۱۰۰٪ سطح خدمت را داشته باشیم باید  $B=90$  در نظر گرفته شود

**نکته:** چنانچه تقاضا دارای توزیعی مانند توزیع نرمال، پواسن و یا نمایی منفی باشد نقطه سفارش مجدد برای ۱۰۰٪ سطح خدمت امکان پذیر نمی باشد

$$Z = \frac{M - \mu}{\sigma_M}$$

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

67

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## سرویسدهی در هر دوره سفارش

**مثال:** چنانچه مثال بالا توزیع نرمال در نظر گرفته شود که در آن انحراف معیار برابر ۲۰ باشد، نقطه سفارش مجدد با سطح اطمینان ۹۵٪ را پیدا کنید.

$$B = \bar{D}L + 1.64\sigma_D\sqrt{L} = 60 \times 1 + 1.64 \times 20 \times 1 = 92.8$$

$$S = B - \bar{D}L = 92.8 - 60 = 32.8 \cong 33$$

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

68

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### سطح خدمت در سال

در مسایل واقعی و هنگامی که چند محصول وجود دارد که هر کدام دارای زمانهای تحویل متفاوت می باشند، تحلیل فراوانی کمبود محصولات مختلف با یکدیگر قابل مقایسه نمی باشد.

در این مواقع از معیار **سطح خدمت در سال** استفاده می شود. عبارتی می خواهیم یک سطح خدمت برای کلیه محصولات بدست بیاوریم که ممکن است دارای زمانهای تحویل مختلف باشند.

69 برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

دکتر مسعود ماهوتچی

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### سطح خدمت در سال

مثلاً محصول ۱ و ۲ که هر کدام دارای زمان تحویل ۲ و ۳ ماه می باشند میزان سفارش برای هر کدام از آنها ۲۰ و ۳۰ می باشند. چنانچه تقاضای کلی برای این محصولات ۱۰۰۰ واحد در سال باشد، تعداد سفارش برابر ۱۰۰۰/۵۰ خواهد شد. در این صورت سطح خدمت بصورت زیر بدست می آید:

$$\frac{R}{Q} \text{ (سطح خدمت در هر دوره) = سطح خدمت در سال (۱)}$$

$$\frac{Q}{R} \text{ (سطح خدمت در سال) = سطح خدمت در هر دوره (۲)}$$

$$\frac{Q}{R} \text{ (سطح خدمت در سال) = } 1 - P(M > B)$$

70 برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

دکتر مسعود ماهوتچی

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### سطح خدمت در سال

**نکته:** هدف در اینجا پیدا کردن نقطه سفارش مجدد با هدف رعایت یک سطح خدمت مشخص در سال می باشد.

مثال: چنانچه در مساله قبل بجای میزان کمبود ۰.۱۲۵ در دوره میزان ۰.۱۵ در سال موردنظر باشد نقطه سفارش مجدد را بدست آورید

$$P(M > B) = 1 - (0.85)^{1200/1800} = 0.01$$

در این حالت  $B=90$  در نظر گرفته شود.

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### سطح خدمت در سال

**نکته:** چنانچه سفارشی در وضعیت فروش از دست رفته باشد تعداد دوره سفارشی از رابطه زیر بدست می آید:

$$b = \frac{R}{Q + E(M > B)}$$

$b$  (سطح خدمت در هر دوره) = سطح خدمت در سال

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## سطح خدمت بر اساس کالای مورد تقاضا (Fraction of units demand)

در این حالت، کسری از تقاضا که تامین شده است به عنوان پارامتری برای محاسبه سطح خدمت در یک بازه زمانی مشخص استفاده می شود

$$\text{سطح خدمت} = \frac{\text{کل تعداد واحدهای عرضه شده}}{\text{تعداد کل واحد درخواستی}}$$

$$\text{سطح کمبود} = \frac{\text{تعداد کمبود}}{\text{تعداد کل واحد درخواستی}}$$

**نکته:** سطح خدمت در این حالت می تواند بر اساس واحد پول هم محاسبه شود و در این حالت براحتی می توان برای حالت چندمحصولی هم از آن استفاده نمود.

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

73

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## سطح خدمت بر اساس کالای مورد تقاضا (Fraction of units demand)

حال چنانچه بازه زمانی موردنظر همان دوره ( ) باشد، سطح کمبود می تواند از رابطه زیر بدست آید:

$$\text{سطح کمبود} = \frac{E(M > B)}{Q}$$

نکته ۱: در توزیع نرمال می توان نشان داد که متوسط  $Z$  نرمال استاندارد در بازه  $Z$  تا بینهایت

$$E(M > B) = \sigma E(Z)$$

در حالیکه  $E(Z)$  (یا همان Partial expectation) از رابطه زیر بدست می آید:

$$E(Z) = \int_z^{\infty} (t - Z) f_t dt \quad t = \frac{M - \bar{M}}{\sigma} \quad Z = \frac{B - \bar{M}}{\sigma}$$

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

74

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

سطح خدمت بر اساس کالای مورد تقاضا (Fraction of units demand)

اثبات:

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_B^{\infty} (M - B) f_M dM \\ &= \int_B^{\infty} \left( \frac{M - \bar{M}}{\sigma} - \frac{B - \bar{M}}{\sigma} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(M - \bar{M})^2}{2\sigma^2}} dM \\ &= \sigma \int_z^{\infty} (t - Z) f_t dt \end{aligned}$$

$$E(M > B) = \sigma E(Z)$$

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

75

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

سطح خدمت بر اساس کالای مورد تقاضا (Fraction of units demand)

**مثال:** میزان سفارش بهینه و نقطه سفارش مجدد را برای مساله زیر تعیین نمایید.

نیاز سالانه = ۱۸۰۰ واحد

هزینه سفارش = ۳ واحد پولی

هزینه نگهداری هر واحد در سال = ۳ واحد پولی

تقاضا	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸
احتمال	۰.۰۲	۰.۰۳	۰.۰۶	۰.۰۷	۰.۲	۰.۲۴	۰.۲	۰.۰۷	۰.۰۶	۰.۰۳	۰.۰۲
P(M>B)	۰.۹۸	۰.۹۵	۰.۸۹	۰.۸۲	۰.۶۲	۰.۳۸	۰.۱۸	۰.۱۱	۰.۰۵	۰.۰۲	۰

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

76

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

سطح خدمت بر اساس کالای مورد تقاضا (Fraction of units demand)

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times R \times C}{H}} = \sqrt{\frac{2 \times 1800 \times 3}{3}} = 60$$

حل:

$$\text{سطح کمبود} = \frac{E(M>B)}{Q} \Rightarrow 0.01 = \frac{E(M>B)}{60} \Rightarrow E(M>B) = 0.6$$

با توجه به توزیع تقاضا، اگر نقطه سفارش مجدد را ۴۸ بگیریم (B=48)

تقاضا	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸
احتمال	۰.۰۲	۰.۰۳	۰.۰۶	۰.۰۷	۰.۲	۰.۲۴	۰.۲	۰.۰۷	۰.۰۶	۰.۰۳	۰.۰۲
P(M>B)	۰.۹۸	۰.۹۵	۰.۸۹	۰.۸۲	۰.۶۲	۰.۳۸	۰.۱۸	۰.۱۱	۰.۰۵	۰.۰۲	۰

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

77

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

سطح خدمت بر اساس کالای مورد تقاضا (Fraction of units demand)

حل:

$$\begin{aligned}
 E(M>48) &= (58-48)*0.02 + (57-48)*0.03 + (56-48)*0.06 \\
 &\quad + (55-48)*0.07 + (54-48)*0.2 + (53-48)*0.24 \\
 &\quad + (52-48)*0.2 + (51-48)*0.07 + (50-48)*0.06 \\
 &\quad + (49-48)*0.03 \\
 &= 4.28
 \end{aligned}$$

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

78

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### سطح خدمت بر اساس کالای مورد تقاضا (Fraction of units demand)

**حل:** می توان برای بقیه نقاط به همین صورت تعیین کرد اما نقطه ای باید به عنوان سفارش مجدد در نظر گرفته شود که در آن  $E(M>B)=0.6$  باشد پس این نقطه باید بیشتر از ۴۸ باشد:

$$E(M>54) = (58-54)*0.02 + (57-54)*0.03 + (56-54)*0.06 \\ + (55-54)*0.07 = 0.36$$

$$E(M>53) = (58-53)*0.02 + (57-53)*0.03 + (56-53)*0.06 \\ + (55-53)*0.07 + (54-53)*0.07 = 0.74$$

بنابراین نقطه سفارش مجدد برابر با ۵۴ ( $B=54$ ) در نظر گرفته خواهد شد.

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### سطح خدمت بر اساس زمان فعالیت (Fraction of operating days)

زمانی که در آن کمبود واقع شده است در مقایسه با کل زمان فعالیت می تواند معیار دیگری برای تعریف سطح خدمت باشد که بشرح زیر تعریف می شود

$$\text{سطح خدمت} = \frac{\text{تعداد روزهای بدون کمبود}}{\text{تعداد کل روزها}}$$

$$\text{سطح خدمت} = 1 - \frac{\text{تعداد روزهای کمبود}}{\text{تعداد کل روزها}}$$



## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## سطح خدمت بر اساس زمان فعالیت (Fraction of operating days)

**نکته ۱:** این روش معمولاً به همان نتایج روش سطح خدمت بر اساس تقاضا منتهی می شود.

**نکته ۲:** همانطور که گفته شد سطح خدمت برای زمانی مناسب است که هزینه کمبود مشخص نباشد اما چنانچه سطح خدمت مشخص باشد می توان هزینه واحد کمبود کالا را برای هر یک از حالت های سفارش عقب افتاده و فروش از دست رفته بدست آورد.

$$\text{سفارش عقب افتاده} \quad P(M > B) = \frac{HQ}{AR} \rightarrow A = \frac{HQ}{P(M > B) \times R}$$

Per unit

$$\text{فروش از دست رفته} \quad P(M > B) = \frac{HQ}{AR + HQ} \rightarrow A = \frac{HQ - HQ \times P(M > B)}{P(M > B) \times R}$$

Per unit

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲ 81

## تقاضای مستقل، مدل احتمالی

## سیستم های سفارش بر اساس یک زمان ثابت (FOI=Fixed Order Interval)

تمام مدل های ارائه شده تا کنون بر اساس میزان سفارش یکسان بوده اند؛ بدین صورت که در یک سطح موجودی (نقطه سفارش مجدد) میزان مشخصی سفارش (مقدار بهینه سفارش) داده می شود لذا سطح موجودی باید مرتباً بررسی شود تا هنگامی که به سطح نقطه سفارش مجدد رسید، سفارش تکرار شود اما در این روش، سفارشدهی بر مبنای یک بازه زمانی مشخص انجام می شود.

روش اول را Q-system و دومی را T-system می نامند.

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲ 82

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### سیستمهای سفارش بر اساس یک زمان ثابت (FOI=Fixed Order Interval)

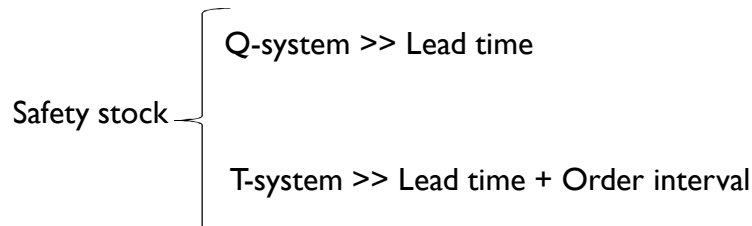
سیستم سفارشی T به این صورت عمل می کند که بعد از یک زمان معین، موجودی کنترل می شود. میزان سفارش ما به تفاوت آنچه که در انبار موجود است و سطح حداکثر موجودی تعیین شده می باشد. بنابراین میزان سفارش در هر دوره می تواند متفاوت باشد.

**نکته ۱:** چنانچه زمان بهینه سفارشی کمتر از زمان تحویل کالا (Lead time) باشد میزان موجودی در نظر گرفته شده شامل موجودی سفارش داده شده ای که هنوز دریافت نشده هم می شود.

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### سیستمهای سفارش بر اساس یک زمان ثابت (FOI=Fixed Order Interval)

**نکته ۲:** در Q-system ذخیره اطمینان برای دوره زمان تحویل کالا لحاظ می گردید اما در این روش، سطح موجودی اطمینان برای زمان تحویل کالا و دوره سفارشی در نظر گرفته می شود.



### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### سیستمهای سفارش بر اساس یک زمان ثابت (FOI=Fixed Order Interval)

محاسبه دوره سفارش و سطح خدمت

در این حالت، دوره سفارش بهینه براحتی از رابطه زیر بدست می آید:

$$T = \frac{Q^*}{R} = \frac{\sqrt{\frac{2RC}{H}}}{R} = \sqrt{\frac{2C}{HR}}$$

هم برای سفارش عقب افتاده و هم برای فروش از دست رفته صحیح است

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### سیستمهای سفارش بر اساس یک زمان ثابت (FOI=Fixed Order Interval)

محاسبه دوره سفارش و سطح خدمت سفارش عقب افتاده  $P(M > E) = \frac{HT}{A}$

فروش از دست رفته  $P(M > E) = \frac{HT}{A + HT}$

سطح خدمت بصورت زیر بدست می آید:

$$(1 - P(M > E)) = \text{سطح خدمت در هر دوره}$$

$$(1 - P(M > E))^{1/T} = \text{سطح خدمت در سال}$$

$$\text{برای تقاضای ارائه شده} \quad 1 - \frac{E(M > E)}{TR} = \text{سطح خدمت}$$

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### سیستمهای سفارش بر اساس یک زمان ثابت (FOI=Fixed Order Interval)

محاسبه دوره سفارش و سطح خدمت

نکته: در این حالت موجودی اطمینان برای جبران تقاضا در طول دوره سفارش در نظر گرفته می شود در حالی که در حالت FOQ (Fixed Order Quantity) برای جبران تقاضا در زمان تحویل در نظر گرفته شده است.

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

87

### تقاضای مستقل، مدل احتمالی

#### بعضی نمادهای بکار رفته

نماد بکار رفته در اکثر مراجع	نماد بکار رفته در کتاب ترساین	شرح
D	R	نرخ تقاضا
r	B	نقطه سفارش مجدد
C	P	هزینه خرید واحد
A	C	هزینه سفارشی
b	A	هزینه هر واحد سفارش عقب افتاده
B	G	هزینه هر بار سفارش عقب افتاده

دکتر مسعود ماهوتچی

برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی ۲

88