جزوهٔ آمار و احتمالات

استاد عرب زاده

دانشگاه صنعتی امیر کبیر

جزوهٔ آمار و احتمالات

دکتر عرب زاده

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

Year: Month: Day:

احتمال پیشامد

می‌دانیم هر آزمایش تصادفی دارای یک فضای نمونه S است. بر طبق تعریف احتمال به هر عضو از فضای نمونه هر یک آزمایش تصادفی عددی را نسبت می‌دهیم که آن را وزن آن عضو می‌نامیم و با W نمایش می‌دهیم.

خصوصیات W عبارتند از:

۱) $0 \le W \le 1$

۲) $W = 1$ اگر احتمال وقوع این پیشامد صد در صد باشد.

۳) $W = 0$ اگر احتمال وقوع این پیشامد صفر باشد.

۴) $\sum W = 1$ (مجموع تمام وزن‌ها در تمام عضوهای فضای نمونه یک است)

فضای نمونه $S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ عضو $n(S) = m$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \dots \quad \downarrow$

وزن $w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_m$

مثلاً $\downarrow \quad \downarrow \quad \dots \quad \downarrow$

$\frac{1}{m} \quad \frac{1}{m} \quad \dots \quad \frac{1}{m}$

$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m} = m\left(\frac{1}{m}\right) = 1$

مثال: پرتاب یک سکه ، روشن کردن کلید برق .

متغیر برنولی ؟

متغیر تصادفی X که نشاندهنده تعداد موفقیت ها در آزمایش برنولی باشد را متغیر برنولی گویند.

$X: x = 0, 1$ (0: شکست ، 1: موفقیت)

$P(S) = P(X=1) = p \quad (0<p<1)$

$P(F) = P(X=0) = 1-p = q$

توزیع برنولی

توزیع متغیر برنولی را توزیع برنولی نامیده و با علامت خاص $b(x;p)$ نشان میدهند.

x	0	1
$f_X(x) = b(x;p)$	q	p

$f_X(x) = b(x;p) = p^x q^{1-x} \quad x=0,1$

قضیه: میانگین و واریانس توزیع برنولی $b(x;p)$ برابر است با:

$\mu = p \qquad \sigma^2 = pq$

اثبات:

الف: با کمک تعریف:

$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{1} x f(x) = 0\times q + 1\times p = p$

$E(X^2) = \sum_{x=0}^{1} x^2 f(x) = 0^2\times q + 1^2\times p = p$

$\sigma^2 = E(X^2) - (\mu)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$

ب: با کمک تابع مولد گشتاور:

$M(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{1} e^{tx} f_X(x) = f(0) + e^t f(1)$

$= q + pe^t$

$M'(t) =$

Subject:
Year: Month: Day:

توزیع دو جمله‌ای (binomial distribution)

آزمایش دو جمله‌ای:

اگر یک آزمایش برنولی را n مرتبه و مستقل تکرار کنیم، این آزمایش را دو جمله‌ای می‌گویند.

مثال: پرتاب یک سکه (سالم یا ناسالم) n مرتبه، روشن کردن n لامپ، خارج کردن n مهره با جایگذاری از ظرفی حاوی a مهره سفید و b مهره سیاه.

متغیر دو جمله‌ای:

متغیر تصادفی X که نشان‌دهنده تعداد موفقیت در آزمایش دو جمله‌ای می‌باشد را متغیر دو جمله‌ای می‌گویند

$X: x=0,1,2,\dots,n$

تابع یا توزیع دو جمله‌ای:

توزیع متغیر دو جمله‌ای را توزیع دو جمله‌ای گویند و با علامت $f_X(x)=b(x;n,p)$ نشان می‌دهند

$$f_X(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

$$n=1 \Rightarrow f_X(x)=b(x;1,p)=b(x;p)$$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

تمرین: تحقیق کنید این تابع یک تابع احتمال است.

$$f_X(x)=b(x;n,p)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

$$\sum_{x=0}^{n} f_X(x)\overset{?}{=}1 \iff \sum_{x=0}^{n} b(x;n,p)=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}\overset{?}{=}1$$

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^r b^{n-r} \qquad \binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\begin{cases} r=x \\ a=p \\ b=q \end{cases} \Rightarrow \boxed{(p+q)^n=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}}$$

توضیح: میانگین و واریانس توزیع دو جمله‌ای $b(x;n,p)$ برابر است با:

$$\mu=np \qquad \sigma^2=npq$$

اثبات: به کمک تابع مولد گشتاور:

$$M(t)=E(e^{tx})=\sum_{x=0}^{n} e^{tx}f_X(x)=\sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

$$=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^x q^{n-x}$$ متناسب با بسط دو جمله‌ای

SAMAND

Subject:

Year: Month: Day:

$$F = \frac{(۶٫۱)^۲}{(۵٫۳)^۲} \times ۱ = ۱٫۱۵$$

نتیجه‌گیری: فرض H_0 رد نمی‌شود. یعنی واریانس یا انحراف معیار این دو جامعه یکی است

SAMAND

Subject:

Year: Month: Day:

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

احتمال پیشامد A

احتمال پیشامد A برابر است با مجموع وزن‌های نقاط موجود در A. احتمال A را با P(A) نشان می‌دهند.

$S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ $\quad n(S) = m$

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$

$A = \{a_1, a_2, a_m\}$ زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه

$P(A) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_m$

نتیجه:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$

2) $P(\phi) = 0$ ضعیف‌ترین پیشامد

3) $P(S) = 1$ محتمل‌ترین پیشامد

احتمال تابعی است از زیرمجموعه‌ی فضای نمونه‌ای S به $[0,1]$.

$P : P(S) \longrightarrow [0,1] \Rightarrow P(A) = W \quad W \in [0,1]$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / تاس سالمی را یک مرتبه پرتاب می‌کنیم. اولاً پیشامدهای ساده را بدست آورید. ثانیاً احتمال پیشامد $A = \{1,2,5\}$ را محاسبه کنید.

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad \omega_1 \dots \omega_6$

پیشامد ساده: $\{1\}, \{2\}, \dots, \{6\}$

سالم یعنی هر کدام با هم شانس برابر. یعنی به معنای هم وزن بودن نقاط فضای نمونه‌ای است.

$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_6$

$\sum_{i=1}^{6} \omega_i = 1 \Rightarrow 6\omega = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{6}$ وزن هر پیشامد ساده

$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

مثال / تاس طوری اریب (ساخته) شده که وزن هر پیشامد ساده زوج، سه برابر پیشامد ساده فرد است. این تاس را یک مرتبه پرتاب می‌کنیم. اولاً احتمال پیشامدهای ساده را تعیین کنید. ثانیاً $P(A)$ را بیابید که در آن $A = \{1,2,5\}$ است.

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad w, 3w, w, 3w, w, 3w$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

$$\sum_{i=1}^{6} w_i = 1 \Rightarrow w + 3w + w + 3w + w + 3w = 1$$

$w = \frac{1}{12}$ وزن پیشامدهای ساده فرد

$3w = \frac{3}{12}$ وزن پیشامدهای ساده زوج

$$P(A) = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12} \Rightarrow P(A) \neq \frac{n(A)}{n(S)}$$

قضیه: اگر نتیجه یک آزمایش تصادفی به صورت N پیشامد هم‌شانس ممکن باشد، $n(S) = N$، آن‌گاه احتمال پیشامد A که در آن $n(A) = n$ باشد، $A \subseteq S$، برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال/ می‌خواهیم یک عدد چهار رقمی را به تصادف از ارقام ۱، ۲، ...، ۶ بسازیم. مطلوبست احتمال اینکه این عدد چهار رقمی رقم تکراری نداشته باشد.

$n(S) = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = (6)^4$ تمام اعداد ۴ رقمی ممکن

A پیشامد اینکه عدد ساخته شده رقم تکراری نداشته باشد.

$$n(A) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \qquad P(A) = \frac{5 \times 4 \times 3}{6^3} = \frac{10}{36}$$

Subject:
Year: Month: Day:

مثال/ می‌خواهیم یک گروه ۳ نفره را از بین ۵ دانشجو و ۶ دانش‌آموز انتخاب کنیم. مطلوبست احتمال آنکه این گروه شامل ۲ دانشجو و ۱ دانش‌آموز باشد.

$n(S) = \binom{11}{3}$ $\qquad S = \{\{a,b,c\}, \{\ \}, \ldots\}$

$$n(A) = \binom{5}{2}\binom{6}{1} = 10 \times 6 = 60$$

$$P(A) = \frac{6 \times \cancel{10}}{11 \times \cancel{10} \times 9} = \frac{2}{33}$$

یادآوری قضایای احتمال

تعریف: پیشامدهای ناسازگار

پیشامدهای A و B را ناسازگار گوییم اگر امکان وقوع اندو پیشامد بطور همزمان وجود نداشته باشد.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

قضیه: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند آنگاه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

اما اگر A, B ناسازگار باشند:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Subject:
Year: Month: Day:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

نتیجه: اگر $A_1, \dots, A_n$ ، n پیشامد ناسازگار باشند

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

قضیه: اگر A' متمم A باشد، آنگاه:

$$P(A')=1-P(A)$$

مثال / احتمال اینکه از یک گروه ۴ نفره حداقل دو نفر ماه تولد یکسان داشته باشند چیست؟

$$n(S)=12\times12\times12\times12=(12)^4$$

$\square\ \square\ \square\ \square$ → ۱۲ ۱۲ ۱۲ ۱۲ حالت

A: پیشامد اینکه هیچ دو نفری ماه تولد یکسانی نداشته باشند.

$$n(A)=12\times11\times10\times9$$

$$P(A')=1-\frac{n(A)}{n(S)}=1-\frac{12\times11\times10\times9}{(12)^4}$$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

احتمال شرطی

احتمال وقوع پیشامد B به شرط آنکه پیشامد A اتفاق افتاده باشد را احتمال شرطی گوییم و با علامت $P(B|A)$ نشان داده و داریم:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\quad \left(P(A)>0\right)$$

قضیه: اگر A و B سازگار باشند آنگاه:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$$

مثال / از ظرفی که چهار مهره سفید و سه مهره سیاه دارد، ۲ مهره را به تصادف و به طور متوالی و بدون جایگذاری بر می‌داریم. مطلوب است محاسبه پیشامد اینکه هر دو مهره سفید باشد.

A: پیشامد اینکه مهره اول سفید باشد. B: پیشامد اینکه مهره دوم سفید باشد.

C: پیشامد اینکه دو مهره همزمان برداشته شوند

$$P(A\cap B)=?$$

$$P(A\cap B)=P(A)P(A|B)\Rightarrow P(A)=\frac{4}{7}$$

$$P(B|A)=\frac{3}{6}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}$$

SAMAND $P(C)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}}$

Subject:
Year: Month: Day:

الف/ $P(A)=?$ ب/ $P(B_1|A)$

الف/ $A=\bigcup_{i=1}^{3}(A\cap B_i) \Rightarrow P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A\cap B_i)$

$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)$

$P(A|B_1)=0.15 \qquad P(A|B_2)=0.10 \qquad P(A|B_3)=0.02$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} P(A)=(0.2\times 0.15)+(0.1\times 0.3)+(0.5\times 0.02)=0.07$

ب/ $P(B_1|A)=\dfrac{P(A\cap B_1)}{P(A)}=\dfrac{0.2\times 0.15}{0.07}$

مثال: سه ظرف کاملاً یکسان با محتویات زیر وجود دارد.

رنگ مهره	۱	۲	۳
سفید	۱	۲	۳
سیاه	۲	۱	۲
قرمز	۳	۱	۱

یک ظرف را به تصادف انتخاب می‌کنیم و یک مهره به تصادف از آن خارج می‌کنیم. می‌بینیم که مهره سفید است. مطلوبست احتمال اینکه این مهره از ظرف اول باشد.

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+\dots+P(A\cap B_n)$

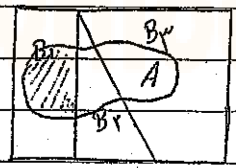
$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\cap B_i)$

وقتی B_i ها تشکیل یک افراز بدهند

مثال/ محصولات کارخانه‌ای توسط سه ماشین ۱، ۲، ۳ تولید می‌شوند. ماشین اول ۲۰٪ تولید را انجام میدهد. ماشین دوم ۳۰٪ و ماشین سوم ۵۰٪. از طرفی درصد کالای تولیدی معیوب توسط این سه ماشین به ترتیب عبارتند از ۱۵٪، ۱۰٪ و ۲٪. مطلوبست احتمال اینکه:

الف/ کالایی که به تصادف اختیار می‌شود ناسالم باشد.

ب/ اگر یک کالا که به تصادف انتخاب می‌شود، ناسالم باشد، مطلوبست احتمال اینکه این کالا توسط ماشین اول تولید شده باشد.



B_i پیشامد اینکه کالا توسط ماشین i ام تولید شود. $i=1,2,3$

A پیشامد اینکه کالای تولید شده ناسالم باشد.

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

B_i: پیشامد اینکه ظرف iام انتخاب شود.

A: پیشامد اینکه مهرهٔ خارج شده از ظرف سفید باشد

$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}$

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)\,P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\,P(A|B_i)}$$

$P(A|B_1)=\frac{1}{6}$ $\qquad P(A|B_2)=\frac{2}{4}$ $\qquad P(A|B_3)=\frac{3}{7}$

$$P(B_1|A)=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}}$$

مثال/ سه ظرف یکسان با محتویات زیر وجود دارد.

نوع سکه	۱/	۲/	۳/
طلا	۱	۲	۰
نقره	۱	۰	۲

یکی از این سه ظرف را به تصادف انتخاب کرده و یک سکه خارج می‌کنیم. مشاهده می‌شود سکه طلاست. مطلوبست احتمال اینکه این ظرف، ظرف اول باشد. (یا سکهٔ دیگر این ظرف نقره باشد)

B_i: پیشامد اینکه ظرف iام اختیار شود A: پیشامد طلا بودن سکه

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)\,P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\,P(A|B_i)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{3}\times0}=\frac{1}{3}$$

$P(B_i)=\frac{1}{3}\quad(i=1,2,3)$

$P(A|B_1)=\frac{1}{2}$ $\qquad P(A|B_2)=1$ $\qquad P(A|B_3)=0$

مثال/ از ظرفی که a مهرهٔ سفید و b مهرهٔ سیاه دارد، یک مهره را به تصادف خارج کرده و بدون مشاهدهٔ رنگ این مهره را کنار می‌گذاریم. سپس از ظرف حاصل یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوبست احتمال اینکه

الف/ مهره سفید باشد. A: پیشامد اینکه مهرهٔ اول سفید باشد.

ب/ مهره سیاه باشد. B: پیشامد اینکه مهرهٔ اول سیاه باشد. $=A'$

C: پیشامد اینکه مهرهٔ دوم سفید باشد.

$$P(C|\underbrace{(A\cup B)}_{B\text{ یا }A})=?=\frac{P(C\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=P((C\cap A)\cup(C\cap B))$$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}$

SAMAND

$(C\cap B)$ و $(C\cap A)$ ناسازگارند چون A و B متمم یکدیگرند.

$$P(C|(A\cup B)) = P((C\cap A)\cup(C\cap B))$$

$$= P(A\cap C) + P(B\cap C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B)$$

$$= \left(\frac{a}{a+b}\times\frac{a-1}{a+b-1}\right) + \left(\frac{b}{a+b}\times\frac{a}{a+b-1}\right) = \frac{a}{a+b}$$

تمرین / از ظرفی که A مهرهٔ سفید و B مهرهٔ سیاه دارد، ۱ مهره را به تصادف اختیار کرده پس از مشاهدهٔ رنگ آن، این مهره را با C مهرهٔ همرنگش به ظرف اضافه کرده و سپس از این ظرف یک مهره اختیار می‌کنیم، احتمال سیاه بودن مهره چیست؟

تابع متغیر تصادفی

می‌دانیم هر آزمایش تصادفی دارای فضای نمونه‌ای S است.

تعریف: تابعی که از فضای نمونهٔ یک آزمایش تصادفی (مجموعهٔ S) به مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف شود (مجموعهٔ $\mathbb{R}$) را تابع متغیر تصادفی گوییم و با علامت X، Y و ... نشان می‌دهیم.

در واقع داریم: $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$

تعریف: تابع متغیر تصادفی نوعی کدگذاری است. با این کدگذاری پیشامدها به عدد تبدیل می‌شوند.

تابع متغیر تصادفی به گونه‌ای تعریف می‌شود که مشخص کنندهٔ هدف آزمایش نیز باشد.

مثال / سکه‌ای را ۲ مرتبه پرتاب می‌کنیم. در صورتی که هدف از این آزمایش شمارش تعداد روی سکه باشد. تابع متغیر تصادفی تعیین کنید که مشخص کنندهٔ این هدف باشد.

$S = \{TT, TH, HT, HH\}$

X: نشان دهندهٔ تعداد رو آمدن سکه در این آزمایش.

فضای نمونه‌ای

۱- فضای نمونه‌ای گسسته   ۲- فضای نمونه‌ای پیوسته

اگر تعداد عضوهای مجموعهٔ S متناهی یا نامتناهی قابل شمارش باشد، فضای نمونه‌ای را گسسته می‌گوییم.

اگر S نامتناهی غیرقابل شمارش باشد، فضای نمونه‌ای پیوسته است.

هر فضای نمونه‌ای که قابل شمارش باشد گسسته و هر فضای نمونه‌ای غیرقابل شمارش پیوسته است.

مثلاً طول، عرض، قد، وزن و ... غیرقابل شمارش و پیوسته‌اند.

متغیر تصادفی خود دو دسته‌اند. گسسته و پیوسته.

فضای نمونه‌ای آن گسسته است   فضای نمونه‌ای آن پیوسته است.

$X : S \longrightarrow \mathbb{R}$

$X(TT) = 0$

$X(TH) = 1$

$X(HT) = 1$

$X(HH) = 2$

پس برد تابع متغیر تصادفی، مشاهدات می‌گیرند و با علامت X آن را نشان می‌دهند.

$x = 0, 1, 2$ برد

هر کدام از این اعداد یا مشاهدات نمایندهٔ یک پیشامد می‌باشند.

$0 \longrightarrow \{TT\} \qquad 1 \longrightarrow \{TH, HT\} \qquad 2 \longrightarrow \{HH\}$

تمرین ۱/ سکه‌ای را ۳ مرتبه پرتاب می‌کنیم. در صورتی که هدف از این آزمایش شمارش تعداد «رو»های سکه باشد، تابع متغیر تصادفی X را طوری تعریف کنید که مشخص کنندهٔ این هدف باشد.

$X : x = 0, 1, 2, 3$

Subject:
Year: Month: Day:

متغیرهای تصادفی گسسته و تابع توزیع احتمال

یک متغیر تصادفی گسسته عاملی x است که هر کدام از مقادیر (ش مقادیر ممکن) خود را با احتمالی اختیار می‌کند (هر مشاهده به اندازهٔ یک پیشامد است و هر پیشامد دارای یک مقدار احتمال است.)

تابع احتمال: جدول یا فرمولی که مقادیر یک متغیر را با احتمالهای مربوط به آن نشان دهد تابع احتمال گویند و با علامت تابعی $f_X(x)$ یا $f_X(x)$ نشان میدهند.

مثال ۱: سکه‌ای را سه مرتبه پرتاب می‌کنیم. در صورتیکه هدف از این آزمایش شمارش تعداد «رو»ی سکه باشد؛

اولاً تابع متغیر تصادفی X را بگونه‌ای تعریف کنید که این هدف را نشان دهد.

ثانیاً برای این متغیر تصادفی، یک تابع احتمال به صورت جدول و فرمول بنویسید.

X: نشان دهندهٔ تعداد رو $\quad x = 0, 1, 2, 3$

$0 \rightarrow \{TTT\} \qquad 1 \rightarrow \{TTH, THT, HTT\}$

Subject:
Year: Month: Day:

$2 \rightarrow \{HHT, HTH, THH\} \qquad 3 \rightarrow \{HHH\}$

$P(X=0) = P(\{TTT\}) = \frac{1}{8}$

$P(X=1) = P(\{TTH, \dots\}) = \frac{3}{8}$

$P(X=2) = P(\{HHT, \dots\}) = \frac{3}{8}$

$P(X=3) = P(\{HHH\}) = \frac{1}{8}$

x	0	1	2	3
$P(X=x) = f_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$f_X(x) = \frac{\binom{3}{x}}{2^3} \qquad x = 0, 1, 2, 3$$

نکته: برای پرتاب n سکه خواهیم داشت:

$$f_X(x) = \frac{\binom{n}{x}}{2^n}$$ «تعداد x موفقیت در n پرتاب»

Subject:
Year: Month: Day:

همه توابعی که این دو ویژگی را داشته باشند، می‌توانند توزیع کننده احتمال باشند به عبارت دیگر

$f_X(x) = P(X=x)$

مثال / متغیر تصادفی گسسته x دارای تابع احتمال به صورت مقابل $f_X(x) = k\left(\frac{1}{4}\right)^x$ است که $x=0,1,2,\dots$. مقدار ثابت k را محاسبه کنید.

$$\sum_{x=0}^{\infty} k\left(\frac{1}{4}\right)^x = 1$$

$$k\left[1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\dots\right]=1 \Rightarrow k\left(\frac{1}{\frac{3}{4}}\right)=1 \Rightarrow \boxed{k=\frac{3}{4}}$$

تابع احتمال را در حالت گسسته علاوه بر جدول و فرمول به دو صورت نمودار میله‌ای و نمودار مستطیلی نیز می‌توان نشان داد.

نمایش هندسی تابع احتمال: ۱- نمودار میله‌ای ۲- نمودار مستطیلی (هیستوگرام احتمال)

طرز رسم نمودار میله‌ای:

مختصات زوج مرتب $(x, f(x))$ را در صفحه مختصات مشخص کرده و از این نقاط بر محور

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / از ظرفی که ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه دارد، ۳ مهره را بطور متوالی و بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. در صورتی که متغیر تصادفی x نشان دهنده تعداد مهره‌های سفید در این آزمایش باشد، تابع احتمال X یا $f_X(x)$ را به دو صورت جدول و فرمول بنویسید.

X: تعداد مهره سفید $\quad X: x=0,1,2,3$

x	0	1	2	3
$f_X(x)=P(X=x)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$

$$f_X(1)=P(X=1)=\frac{\binom{5}{1}\binom{6}{2}}{\binom{11}{3}}$$

۳ مهره: x سفید، $3-x$ سیاه

$$\Rightarrow f_X(x)=P(X=x)=\frac{\binom{5}{x}\binom{6}{3-x}}{\binom{11}{3}} \quad (x=0,1,2,3)$$

خصوصیات تابع احتمال ($f_X(x)$)

تابع احتمال دارای دو خصوصیت زیر است

۱- $f_X(x)\geq 0 \quad \forall x$ ۲- $\sum_x f_X(x)=1$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

x های محور را رسم کنیم.

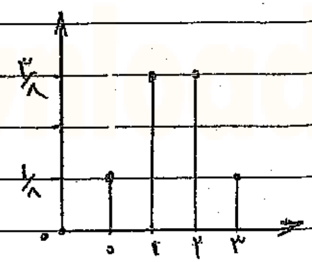
طرز رسم نمودار مستطیلی:

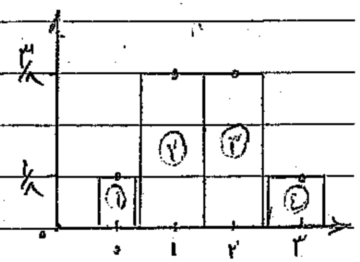
موقعیت زوج مرتب‌های $(x, f(x))$ را در صفحه مختصات مشخص کرده و روی این نقاط مستطیل‌هایی به عرض یک و طول $f(x)$ بسازیم.

مثال/ سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. در صورتی که متغیر تصادفی X نشان دهندهٔ تعداد "رو" در این آزمایش باشد، نمودار میله‌ای و مستطیلی $f_X(x)$ را رسم نمائید.

$$f_X(x)=\frac{\binom{3}{x}}{2^3} \qquad x=0,1,2,3$$

x	0	1	2	3
$f(x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$





Samand

Subject:
Year: Month: Day:

مساحت مستطیل ۱ : $1\times\frac{1}{8}=\int_{-0.5}^{0.5}\frac{1}{8}dx=\frac{1}{8}(0.5+0.5)=\frac{1}{8}$

مساحت مستطیل ۲ : $1\times\frac{3}{8}=\int_{0.5}^{1.5}\frac{3}{8}dx=\frac{3}{8}(1.5-0.5)=\frac{3}{8}$

تابع توزیع تجمعی (برای متغیرهای گسسته)

تعریف: اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه تابع توزیع تجمعی این متغیر را با علامت $F_X(x)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F_X(x)=P(X\leq x)$$

مثال/ متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $f_X(x)=\frac{\binom{3}{x}}{8}$ است. تابع توزیع تجمعی را برای این متغیر رسم کنید. $(x=0,1,2,3)$

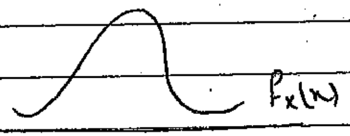
x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

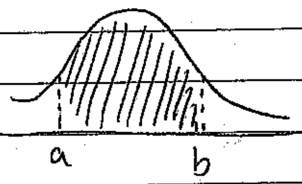
$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0 \rightarrow 0\\ f(0) & 0\leq x<1 \rightarrow \frac{1}{8}\\ f(0)+f(1) & 1\leq x<2 \rightarrow \frac{4}{8}\\ f(0)+f(1)+f(2) & 2\leq x<3 \rightarrow \frac{7}{8}\\ f(0)+f(1)+f(2)+f(3) & 3\leq x \rightarrow 1\end{cases}$$

Samand

Subject:
Year: Month: Day:

در چنین حالتی تابع احتمال یک تابع پیوسته یا پیوسته قطعه‌ای است که آن را چگالی احتمال گویند.





$$P(a<x<b)=\int_a^b f_X(x)\,dx$$

خصوصیات $f_X(x)$ در حالت پیوسته:

1) $\forall x,\ f_X(x)\geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx=1$

3) $P(a<x<b)=\int_a^b f_X(x)\,dx$

سؤال: آیا تابع $f(x)=\begin{cases}10 & 0\leq x\leq \frac{1}{10}\\ 0 & \text{در بقیه}\end{cases}$ تابع احتمال است؟

1) $f_X(x)\geq 0$ ☑ 2) $\int_0^{\frac{1}{10}} 10\,dx=1$ ☑

پس تابع توزیع احتمال است.

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

خصوصیات تابع توزیع تجمعی:

تابع $F_X(x)$ دارای خصوصیات زیر است:

1) $\forall x,\ 0\leq F_X(x)\leq 1$

2) $\lim_{x\to -\infty} F_X(x)=0\ ,\quad \lim_{x\to +\infty} F_X(x)=1$

3) تابعی غیر نزولی و پیوسته راست است.

متغیر تصادفی پیوسته و تابع چگالی احتمال:

احتمال اینکه یک متغیر تصادفی پیوسته دقیقاً یکی از مقادیرش مانند $x=a$ را اختیار کند صفر است. به عبارت دیگر داریم:

$$P(x=a)=0$$

در نتیجه احتمال در یک بازه مطرح می‌شود.

$$P(a<x<b)=P(a\leq x<b)=P(a<x\leq b)=P(a\leq x\leq b)$$

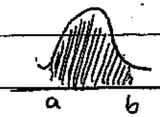
$$P(a\leq x\leq b)=P(x=a)+P(x=b)+P(a<x<b)$$

SAMAND

Subject:

Year: Month: Day:

در حالت پیوسته میتوان نوشت: $P(a<x<b) = F_X(b) - F_X(a)$



$$P(a<x<b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

نکته: تابع توزیع تجمعی، تابع اولیهٔ تابع احتمال است.

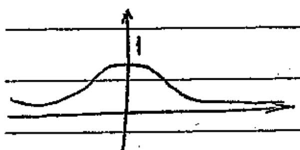
مثال/ متغیر تصادفی X دارای تابع احتمالی به صورت $f_X(x)=\begin{cases}kx^3 & 0<x<1\\ 0 & \text{در سایر نقاط}\end{cases}$ است. مقدار ثابت k را تعیین کنید.

$$\int_0^1 kx^3\,dx=1 \Rightarrow \frac14 kx^4\Big|_0^1=1 \Rightarrow k=4$$

مثال/ متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال به صورت $f_X(x)=\frac{k}{1+x^2}$ است. مقدار ثابت k را تعیین کنید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{1+x^2}\,dx=1 \Rightarrow k\,tg^{-1}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1 \Rightarrow k=\frac{1}{\pi}$$

تابع احتمال کوشی $f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ $x\in R$



SAMAND

Subject:

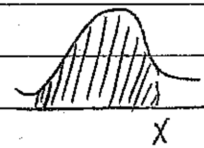
Year: Month: Day:

به طور کلی هر تابعی که دو شرط $f_X(x)\ge 0$ و $\sum_x f(x)=1$ $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)=1\right)$ را داشته باشد، تابع احتمال است.

تابع توزیع تجمعی (برای متغیرهای پیوسته)

اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، تابع توزیع تجمعی X را به صورت $F_X(x)$ نشان داده و به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$$



به طور کلی هر تابع توزیع تجمعی عبارت است از:

$$F_X(x)=P(X\le x)=\begin{cases}\sum_{t\le x} f(t)\\ \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx\end{cases}$$

خصوصیت $F_X(x)$:

1) $0\le F_X(x)\le 1$ 2) $\lim_{x\to-\infty}F_X(x)=0$ ، $\lim_{x\to+\infty}F_X(x)=1$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

فضاهای نمونه‌ای دو بعدی (یا بیشتر) و تابع احتمال توأم:

بعضی از آزمایش‌های تصادفی به گونه‌ای طراحی شده‌اند که آزمایش‌کننده هم‌زمان می‌تواند دو هدف (یا بیشتر) را پیگیری کند.

مثال / از ظرفی که شامل ۵ مهره سفید، ۸ مهره سیاه و ۶ مهره آبی است، ۳ مهره را به طور تصادفی برمی‌گزینیم

آزمایش‌کننده می‌تواند یک هدف را دنبال کند. مثلاً تعداد مهره‌های سفید. می‌تواند هم‌زمان دو هدف را پیگیری کند. مثلاً تعداد مهره‌های سفید و سیاه و همچنین می‌تواند سه هدف را نیز دنبال کند. تعداد مهره‌های سفید، سیاه و آبی.

اگر هدف را با یک متغیر نشان دهیم، آن گاه می‌توانیم از چند متغیر به طور هم‌زمان صحبت کنیم.

طبیعتاً اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند طبیعتاً احتمال وقوع این دو متغیر به طور هم‌زمان وجود داشته باشد، آنگاه تابع احتمال وقوع هم‌زمانی این دو متغیر را تابع احتمال توأم نامیده و با علامت تابعی $f_{X,Y}(x,y)$ نشان میدهیم.

Subject:
Year: Month: Day:

تابع احتمال توأم:

جدول یا فرمولی که مقادیر دو متغیر تصادفی X و Y را به طور هم‌زمان همراه با احتمال‌های آنها نشان دهد را تابع احتمال توأم گوییم و با علامت تابعی $f_{X,Y}(x,y)$ نشان می‌دهیم. در حالت گسسته:

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$$

خصوصیات تابع احتمال توأم:

1) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y$

2) $\sum_x \sum_y f_{X,Y}(x,y) = 1$ یا $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

Subject:

Year: Month: Day:

نمودار تابع دو متغیره را رویه می‌گویند. انتگرال دوگانهٔ تابع دو متغیره حجم زیر منحنی را بدست می‌دهد.

مثال ۱) از ظرفی که ۵ مهرهٔ سفید، ۴ مهرهٔ ___ و ۳ مهرهٔ آبی دارد، سه مهره را به تصادف و به طور همزمان اختیار می‌کنیم. در صورتیکه متغیر تصادفی X تعداد مهره‌های سفید را نشان دهد، تابع احتمال X یا $f_X(x)$ را تعیین کنید.

$$f_X(x)=\frac{\binom{5}{x}\binom{7}{3-x}}{\binom{12}{3}} \qquad x=0,1,2,3$$

مثال ۲/ اگر در مثال ۱ متغیر Y را شمارشگر تعداد مهره‌های سیاه تعریف کنیم، تابع احتمال Y را بیابید.

$$f_Y(y)=\frac{\binom{4}{y}\binom{8}{3-y}}{\binom{12}{3}} \qquad y=0,1,2,3$$

مثال ۳/ اگر در مثال ۱ متغیر تصادفی X تعداد مهرهٔ سفید، Y را شمارشگر تعداد مهرهٔ سیاه تعریف کنیم، تابع احتمال توأم X و Y را تعیین کنید.

$$f_{X,Y}(x,y)=P(X=x,Y=y)$$

SAMAND

Subject:

Year: Month: Day:

۳ مهره:
- x تا سفید
- y تا سیاه
- $3-x-y$ بقیه آبی

$$f_{X,Y}=P(X=x,Y=y)=\frac{\binom{5}{x}\binom{4}{y}\binom{3}{3-x-y}}{\binom{12}{3}}$$

$$D_f=\{(x,y)\mid 0\le x+y\le 3,\ x,y\in\{0,1,2,3\}\}$$

$y \backslash x$	0	1	2	3
0	$f(0,0)$	$f(1,0)$	$f(2,0)$	$f(3,0)$
1	$f(0,1)$	$f(1,1)$	$f(2,1)$	0
2	$f(0,2)$	$f(1,2)$	0	0
3	$f(0,3)$	0	0	0

مثال ۴/ اگر در مثال ۱ متغیر X را تعداد مهرهٔ سفید، متغیر Y را تعداد مهرهٔ سیاه و متغیر Z را تعداد مهرهٔ آبی تعریف کنیم، $f_{X,Y,Z}(x,y,z)$ را تعیین کنید.

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z)=\frac{\binom{5}{x}\binom{4}{y}\binom{3}{z}}{\binom{12}{3}}$$

$$D_f=\{(x,y,z)\mid x+y+z=3,\ x,y,z\in\{0,1,2,3\}\}$$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

می‌دانیم متغیر X به تنهایی دارای تابع احتمال $f_X(x)$ است و به همین ترتیب Y. از طرفی اگر X و Y به طور همزمان امکان وقوع داشته باشند، آنگاه دارای تابع احتمال توأم $f(x,y)$ می‌باشند.

اگر تابع $f_{X,Y}(x,y)$ در اختیار باشد، آیا می‌توان $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را تعیین کرد؟

اگر $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ در اختیار باشد، آیا می‌توان $f_{X,Y}(x,y)$ را تعیین نمود؟

توزیع کناره‌ای (حاشیه‌ای)

اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم $f(x,y)$ باشند، آنگاه توزیع X و Y را به تنهایی توزیع کناره‌ای گویند و به صورت زیر محاسبه می‌کنند:

$$f_X(x)=\begin{cases}\sum_y f_{X,Y}(x,y) & \text{(گسسته)}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy & \text{(پیوسته)}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\sum_x f_{X,Y}(x,y) & \text{(گسسته)}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx & \text{(پیوسته)}\end{cases}$$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}k(x+y) & 0<x,y<1\\ 0 & \text{در سایر نقاط}\end{cases}$$

باشد:

الف) مقدار ثابت k را تعیین کنید.

ب) اگر $A=\{(x,y)\mid 0<x<\frac{1}{2},\ 0<y<\frac{1}{4}\}$ باشد، $P(A)$ را محاسبه کنید.

$$\int_0^1\int_0^1 k(x+y)\,dx\,dy=1 \Rightarrow k=1$$

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}x+y & 0<x,y<1\\ 0 & \text{در سایر نقاط}\end{cases}$$

$$P(A)=\iint f(x,y)\,dA=\int_0^{1/2}\int_0^{1/4}(x+y)\,dx\,dy$$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

مثال/ اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم به صورت جدول زیر باشند، توزیع های کناره‌ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را تعیین کنید.

$y \backslash x$	0	1	2
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
2	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{3}{10}$

$$f_X(x) = \sum_{y=1}^{2} f_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(x,1) + f_{X,Y}(x,2)$$

$$f_X(x) = f(x,1) + f(x,2)$$

$x=0 \longrightarrow f_X(0) = f(0,1) + f(0,2) =$ مجموع ستون اول جدول $= \frac{3}{10}$

$x=1 \longrightarrow f_X(1) = f(1,1) + f(1,2) =$ مجموع ستون دوم $= \frac{1}{10}$

$x=2 \longrightarrow f_X(2) = f(2,1) + f(2,2) =$ مجموع ستون سوم $= \frac{6}{10}$

با اضافه کردن یک سطر و یک ستون به جدول اصلی $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را میتوان بدست آورد.

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

$y \backslash x$	0	1	2	$f_Y(y)$
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$
2	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$
$f_X(x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	

مثال/ اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال توأم زیر باشند، توزیع های کناره‌ای $f_X(x)$، $f_Y(y)$ را تعیین کنید.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{در بقیه نقاط} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = xy + \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^1 = \begin{cases} x+\frac{1}{2} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{در بقیه جاها} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 (x+y)\,dx = xy + \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = \begin{cases} y+\frac{1}{2} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{در بقیه جاها} \end{cases}$$

SAMAND

$P(A\cap B) = P(X=x , Y=y) = f_{X,Y}(x,y)$

اگر A,B مستقل اند $\longrightarrow P(A\cap B) = P(A)P(B)$

پس X و Y مستقل اند اگر $\longrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad \forall (x,y)$

یعنی اینکه X و Y هیچ تاثیری بر هم ندارند.

مثال / اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توام جدول زیر باشند، بررسی کنید X و Y مستقل اند یا وابسته.

y\x	1	2	3	$f_X(x)$
0	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$
$f_Y(y)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{10}$	

ابتدا توزیع های کناره ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را تعیین می کنیم.

$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad \forall (x$

$f(1,0) \overset{?}{=} f_X(1)\, f_Y(0) \rightarrow \frac{1}{10} \neq \frac{4}{10} \times \frac{3}{10}$

تمرین / اگر X و Y با تابع احتمال زیر تعریف شده، اولاً مقدار k را تعیین کنید. ثانیاً توزیع های کناره ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را تعریف کنید.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & 0<x<1 ,\ 0<y<2 \\ 0 & \text{در بقیه جاها} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \int_0^2 k(x+y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

استقلال دو متغیر تصادفی

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توام $f_{X,Y}(x,y)$ و توزیع های کناره ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ باشند.

دو متغیر X و Y را مستقل آماری گویند اگر و تنها اگر:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad \forall (x,y)$$

$X : x \longrightarrow A \quad P(A) = P(X=x) = f_X(x)$

$Y : y \longrightarrow B \quad P(B) = P(Y=y) = f_Y(y)$

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال توأم زیر باشند، بررسی کنید X و Y مستقل اند یا وابسته.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} x+y & 0\le x\le 1 ,\ 0\le y\le 1\\ 0 & \text{در سایر جاها}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_0^1 (x+y)\,dy = xy+\frac{1}{2}y^2\Big|_0^1 = x+\frac{1}{2} \qquad 0\le x\le 1$$

$$f_X(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2} & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{در سایر جاها}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} y+\frac{1}{2} & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{در سایر جاها}\end{cases}$$

$$f_X(x)\,f_Y(y)=\begin{cases} (x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2}) & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ 0 & \text{در سایر جاها}\end{cases} = \begin{cases} xy+\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{4}\\ 0\end{cases}$$

X و Y مستقل نبوده و وابسته اند.

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال زیر باشند، بررسی کنید که X و Y مستقل اند یا وابسته.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{4}x(1+3y^2) & 0\le x\le 2 ,\ 0\le y\le 1\\ 0 & \text{در سایر جاها}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_0^1 \frac{1}{4}x(1+3y^2)\,dy = \frac{1}{4}x\times 2 = \frac{1}{2}x \qquad 0\le x\le 2$$

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x & 0\le x\le 2\\ 0 & \text{در سایر جاها}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_0^2 \frac{1}{4}x(1+3y^2)\,dx = \frac{1}{2}(1+3y^2) \qquad 0\le y\le 1$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{2}(1+3y^2) & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{در سایر جاها}\end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) \overset{?}{=} f_X(x)\,f_Y(y)$$

$$\xrightarrow{?} \quad = \frac{1}{2}x\times\frac{1}{2}(1+3y^2)$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{4}x(1+3y^2) & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\\ 0 & \text{در سایر جاها}\end{cases}$$

X و Y مستقل اند.

Subject:
Year: Month: Day:

تابع احتمال شرطی:

$$P(Y=y|X=x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = f_{Y|X}(y|x)$$

اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y)$ و توزیع های حاشیه ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ باشند، آنگاه تابع احتمال شرطی $Y=y$ در صورتی که $X=x$ اتفاق افتاده باشد را با علامت $f_{Y|X}(y|x)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \qquad f_X(x)>0$$

تابع احتمال شرطی تابعی از y است.

نکته: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_{Y|X}(y|x)$

حال اگر X و Y مستقل باشند داریم: $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$

Subject:
Year: Month: Day:

مثال: اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال زیر باشند:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & x=0,1 \quad y=0,1,2 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

الف) مقدار ثابت k را تعیین کنید.

ب) تابع احتمال شرطی $f_{Y|X=0}(y|0)$ و $f_{Y|X=1}(y|1)$ را تعیین کنید.

ج) بررسی کنید که X و Y مستقل اند یا وابسته.

$y \backslash x$	0	1
0	$0 \to 0$	$k \to 1/9$
1	$k \to 1/9$	$2k \to 2/9$
2	$2k \to 2/9$	$3k \to 3/9$

$9k=1 \to k=\frac{1}{9}$

ط

$$\sum_{y=0}^{2}\sum_{x=0}^{1} k\, f_{X,Y}(x,y)=1 \to k=\frac{1}{9}$$

$y \backslash x$	0	1	$f_Y(y)$
0	0	1/9	1/9
1	1/9	2/9	3/9
2	2/9	3/9	5/9
$f_X(x)$	3/9	6/9	

تعیین تابع احتمال توابعی از یک متغیر تصادفی (انتقال متغیر تصادفی)

مسئله: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $f_X(x)$ معلوم است. می‌خواهیم تابع احتمال متغیر تصادفی Y را تعیین کنیم ($f_Y(y)=?$) که در آن Y تابعی از X است. به عبارت دیگر:

$$Y=g(X)$$

مثلاً $Y=5X+1$ ، $Y=X^2$ ، $Y=e^X$ و ...

مثالهای زیر نمونه‌ای از این گونه مسائل را در حالت های ساده گسسته نشان می‌دهد.

مثال ۱/ متغیر تصادفی X که نشان دهندهٔ عدد روی یک تاس می‌باشد، دارای تابع احتمال زیر است:

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

تابع احتمال متغیر تصادفی Y که $Y=X^2$ است را تعریف کنید. ($f_Y(y)=?$)

y	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶
$f_Y(y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$x=1 \rightarrow y=1$

$x=2 \rightarrow y=4$

⋮

$x=6 \rightarrow y=36$

در حالت گسسته: $f_Y(y)=P(Y=y)$

$f_Y(1)=P(Y=1)=P(X=1)=\frac{1}{6}$

$f_Y(4)=P(Y=4)=P(X=2)=\frac{1}{6}$

⋮

$f_Y(36)=P(Y=36)=P(X=6)=\frac{1}{6}$

در واقع این مثال نشان می‌دهد که یک تاس مربوط با اعداد ۱ تا ۶، نشان دهندهٔ تمام تاس های ۶ وجهی با هر بار اعدادی که روی وجوه آن نوشته شده باشد، است.

مثال: متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر است.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

تابع احتمال متغیر $Y=X^2$ را تعیین کنید.

Y تابعی غیر یک به یک از X است.

Subject:

Year: Month: Day:

مثال/ اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال توأم زیر باشند تابع احتمال شرطی $f_{Y|X=\frac{1}{4}}(y|\frac{1}{4})$ را محاسبه کنید.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} x+y & \text{اگر } 0\leq y\leq 1 \text{ و } 0\leq x\leq 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2} & 0\leq x\leq 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases} \qquad f_{Y|X}(y|x)=\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}$$

$$f_{Y|X=\frac{1}{4}}(y|\tfrac{1}{4})=\frac{f_{X,Y}(\frac{1}{4},y)}{f_X(\frac{1}{4})}=\frac{\frac{1}{4}+y}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} \qquad 0\leq y\leq 1$$

SAMAND

Subject:

Year: Month: Day:

1) $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \Rightarrow f_{Y|X=0}(y|0)=\dfrac{f_{X,Y}(0,y)}{f_X(0)}=3f_{X,Y}(0,y)$

2) $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

$f_{Y|0}(y|0)=3f_{X,Y}(0,y) \qquad y=0,1,2$

y	0	1	2
$f_{Y\|X=0}(y\|0)$	0	$\frac{3}{9}$	$\frac{6}{9}$

$f_{Y|X=1}(y|1)=\dfrac{f_{X,Y}(1,y)}{f_X(1)}=\dfrac{9}{6}f_{X,Y}(1,y)$

$f_{Y|1}(y|1)=\dfrac{3}{2}f_{X,Y}(1,y) \qquad y=0,1,2$

y	0	1	2
$f_{Y\|1}(y\|1)$			

SAMAND

تغییر متغیر در حالت خطی را نشان می‌دهیم که $Y=aX+b$ یا Y یک تابع خطی از X باشد (تابع Y یک تابع یک به یک است.)

قضیه: اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد (X گسسته یا پیوسته)، آنگاه تابع احتمال متغیر تصادفی $Y=aX+b$ که در آن a و b دو مقدار ثابت اند (یا Y یک تابع خطی) برابر است با:

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{در حالت گسسته} \\ \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{در حالت پیوسته} \end{cases}$$

<u>اثبات</u>: حالت اول: فرض کنید X گسسته است.

$$f_Y(y)=P(Y=y)=P(aX+b=y)=P\left(\frac{y-b}{a}=X\right)$$

$$=f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad \boxtimes$$

حالت دوم: فرض کنید X پیوسته باشد.

تابع توزیع تجمعی

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(aX+b\leq y)=P(aX\leq y-b)$$

$Y=X^2$

$$\begin{cases} x=-2 \longrightarrow y=4 \\ x=2 \longrightarrow y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-1 \longrightarrow y=1 \\ x=1 \longrightarrow y=1 \end{cases}$$

$x=0 \longrightarrow y=0$

$x=3 \longrightarrow y=9$

y	0	1	4	9
$f(y)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$f_Y(0)=f(Y=0)=P(X=0)=\frac{2}{8}$$

$$f_Y(1)=P(Y=1)=P(X=-1)+P(X=1)=f_X(-1)+f_X(1)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$$

$$f_Y(4)=P(Y=4)=P(X=2)+P(X=-2)=f_X(2)+f_X(-2)=\frac{3}{8}$$

$$f_Y(9)=P(Y=9)=P(X=3)=f_X(3)=\frac{1}{8}$$

Subject:
Year: Month: Day:

$y=g(x) \iff x=w(y)$ به طوری که:

آن گاه $f_Y(y)$ برابر است با:

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(w(y)) & \text{در حالت گسسته} \\ f_X(w(y))\,|J| & \text{در حالت پیوسته} \end{cases}$$

که در آن $J=w'(y)=\frac{dx}{dy}$ و J را "ژاکوبین انتقال" می‌گویند.

در مثال قبل / $y=ax+b \iff x=\frac{y-b}{a}=w(y)$

$$\left(w'(y)=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{a}\right)$$

اثبات: در حالت گسسته:

$$f_Y(y)=P(Y=y)=P(g(X)=y)=P(X=w(y))=f_X(w(y))$$

در حالت پیوسته:

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)$$

یک به یک: صعودی: جهت نامساوی حفظ می‌شود
نزولی: جهت نامساوی عوض می‌شود

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

$$F_Y(y)\begin{cases} a>0: & P\left(X\le \frac{y-b}{a}\right)=F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \\ a<0: & P\left(X\ge \frac{y-b}{a}\right)=1-P\left(X\le \frac{y-b}{a}\right)=1-F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \end{cases}$$

نکته: $P(X>\alpha)+P(X\le\alpha)=1$

$$f_Y(y)=F'_Y(y)\begin{cases} a>0: & \frac{1}{a}F'_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \\ a<0: & \frac{-1}{a}F'_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$f_Y(y)\begin{cases} \frac{1}{a}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \\ \frac{-1}{a}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

قضیه زیر حالتی را نشان می‌دهد که $Y=g(X)$ و $g(X)$ یک تابع یک به یک از X است.

قضیه: اگر X یک متغیر تصادفی (گسسته یا پیوسته) با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آن گاه تابع احتمال متغیر تصادفی $Y=g(X)$ که در آن $g(X)$ یک تابع یک به یک است

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

مثال/ متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر است:

$$f_X(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \qquad x=1,2,3,\ldots$$

تابع احتمال متغیر تصادفی $Y=3X+1$ را تعیین کنید. $(f_Y(y)=?)$

$$Y=3X+1 \Rightarrow X=\frac{Y-1}{3}=w(Y)=$$

$$f_Y(y)=f_X\left(\frac{y-1}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{y-1}{3}-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{y-4}{3}}$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{y-4}{3}} \qquad y=4,7,10,\ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \rightarrow y=4 \\ x=2 \rightarrow y=7 \\ x=3 \rightarrow y=10 \\ \vdots \end{array}\right\}$$

مثال/ در مثال قبل تابع احتمال $Y=X^2$ را تعیین کنید.

$y=x^2$ در دامنه $x=1,2,\ldots$ یک به یک است.

$$y=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{y}=w(y)$$

$$f_Y(y)=f_X(w(y))=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{y}-1} \qquad y=1,4,9,\ldots$$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

مثال/ سه ظرف حاوی مهره‌های رنگی

یکی از این سه ظرف را به تصادف انتخاب می‌کنیم

سه مهره از آن خارج می‌کنیم احتمال اینکه

این ظرف، ظرف دوم باشد

رنگ	ظ۱	ظ۲	ظ۳
سفید	۱	۳	۲
سیاه	۲	۱	۳
قرمز	۳	۲	۴

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / متغیر تصادفی X تابع احتمال زیر را داراست:

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

تابع احتمال متغیر تصادفی $Y=X^2$ را تعیین کنید.

با توجه به دامنه X تابع $Y=X^2$ یک به یک است.

$$y=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{y}=w(y)$$

$$J=w'(y)=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$f_Y(y)=f_X(w(y))|J|=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}} & y>0\\ 0 & \text{در سایر جاها}\end{cases}$$

اگر به جواب بدست آورده شک کردیم، باید ببینیم حاصل انتگرال آن یک میشود یا خیر.

مثال / متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال به صورت

$$f_X(x)=\begin{cases}2xe^{-x^2} & x\geq 0\\ 0 & \text{در سایر جاها}\end{cases}$$

است. تابع احتمال متغیر تصادفی $Y=X^2$ را تعیین کنید. ($f_Y(y)=?$)

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

با توجه به دامنه X تابع $Y=X^2$ یک به یک است.

$$y=x^2 \iff x=\sqrt{y}=w(y)$$

$$\frac{dx}{dy}=w'(y)=J=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(2\sqrt{y}\times e^{-y}\right)$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y\geq 0\\ 0 & \text{در سایر نقاط}\end{cases}$$

قضیه زیر حالت خاصی را نشان میدهد که تابع $Y=g(X)$ یک به یک نیست.

قضیه: اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه تابع احتمال متغیر تصادفی $Y=X^2$ (Y یک به یک نیست چون مقادیر X مشخص نیست) برابر است با:

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(-\sqrt{y})+f_X(\sqrt{y})\right)$$

اثبات:

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(X^2\leq y)$$

$$=P(|x|\leq\sqrt{y})=P(-\sqrt{y}\leq x\leq\sqrt{y})$$

SAMAND

قضیه: اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته و با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه تابع احتمال متغیر تصادفی $Y=g(X)$ که در آن $g(X)$ یک تابع غیر یک به یک است. بطوری که بتوان آن را به k افراز یک به یک نسبت به متغیر X تقسیم نمود خواهیم داشت:

$$y = u_1(x_1) \iff x_1 = w_1(y)$$

$$y = u_2(x_2) \iff x_2 = w_2(y)$$

$$\vdots$$

$$y = u_k(x_k) \iff x_k = w_k(y)$$

آنگاه تابع احتمال $Y=g(X)$ برابر است با:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} f_X(w_i(y))\,|J_i| \qquad J_i = \frac{dx_i}{dy} = w_i'(y)$$

تذکر: دو قضیه قبلی حالت خاصی از این قضیه اند. هنگامی که $k=2$ باشد.

$$= F_X(+\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$ مشتق

$$F_Y'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} F_X'(+\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} F_X'(-\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}) \right)$$

قضیه ۳: اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد آنگاه تابع احتمال متغیر تصادفی $Y=|X|$ (Y یک به یک نیست) برابر است با:

$$f_Y(y) = f_X(-y) + f_X(y)$$

اثبات:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(|X| \le y)$$

$$F_Y(y) = P(-y \le x \le y) = F_X(y) - F_X(-y)$$

$$F_Y'(y) = F_X'(y) + F_X'(-y) \Rightarrow f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y)$$

قضیه زیر حالت کلی را نشان می‌دهد که $Y=g(x)$ غیر یک به یک است ولی می‌توان آن را به k افراز یک به یک تقسیم نمود.

مثال / متغیر تصادفی X دارای تابع احتمالی بصورت زیر است.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

تابع احتمال متغیر تصادفی $Y = X^2$ را تعیین کنید.

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Y با توجه به مقادیر X غیر یک به یک است.

$$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$$

$$\begin{cases} x = -\sqrt{y} & -1 < x < 0 \\ x = +\sqrt{y} & 0 < x < 1 \\ x = +\sqrt{y} & 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$-1 < x < 1 \Rightarrow 0 < y < 1$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(-\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y})\right) & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(0 + f_X(\sqrt{y})\right) & 1 < y < 4 \\ 0 & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

مثال / متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال به صورت جدول زیر است.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$f(-3)$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$

$\sum_x f_X(x) = 1$. تابع احتمال متغیر تصادفی $Y = X^2$ را تعیین کنید. $(f_Y(y) = ?)$

واضح است که تابع $Y = X^2$ غیر یک به یک است (با توجه به دامنه x. $(x = -3, \dots, 4)$)

$y = x^2$

$x = 3$ یا $-3 \longrightarrow y = 9$

$x = 2$ یا $-2 \longrightarrow y = 4$

$x = 1$ یا $-1 \longrightarrow y = 1$

$x = 0 \longrightarrow y = 0$

$x = 4 \longrightarrow y = 16$

y	0	1	4	9	16
$f_Y(y)$	$f_X(0)$	$f_X(-1) + f_X(1)$	$f_X(2) + f_X(-2)$	$f_X(3) + f_X(-3)$	$f_X(4)$

$$f_Y(0) = P(Y=0) = P(X=0) = f_X(0)$$

$$f_Y(1) = P(Y=1) = P(X=-1) \overset{\text{یا}}{+} P(X=1) = f_X(-1) + f_X(1)$$

$\vdots$

Subject:

Year: Month: Day:

تمرین / متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال بصورت زیر است.

$$f_X(x)=\begin{cases} k & -1<x<2 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

اولاً مقدار ثابت k را تعیین کنید. ثانیاً تابع احتمال متغیر $Y=X^2$ را تعیین کنید.

Samand

Subject:

Year: Month: Day:

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) & 0<y<1 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{1}{3}\right) & 1<y<4 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{y}} & 0<y<1 \\ \frac{1}{6\sqrt{y}} & 1<y<4 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

Samand

Subject:
Year: Month: Day:

امید ریاضی expected value

برای هر متغیر تصادفی مانند X با تابع احتمال $f_X(x)$ عددی را تعریف می‌کنیم که به آن امید ریاضی می‌گویند و طبق تعریف زیر است:

امید ریاضی:

اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال معلوم $f_X(x)$ باشد، آنگاه امید ریاضی متغیر تصادفی که با علامت $E(X)$ نشان داده می‌شود، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E(X)=\begin{cases}\sum_{x} x\, f_X(x) & \text{گسسته} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx & \text{پیوسته}\end{cases}$$

فرمول ۱

تذکر: امید ریاضی هر متغیر تصادفی، عددی ثابت و منحصر به فرد است.

تذکر ۲: امید ریاضی دارای واحد است و همان واحد متغیر تصادفی را دارا می‌باشد.

Subject:
Year: Month: Day:

تمرین / متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال به صورت زیر است.

$$f_X(x)=\begin{cases} kx(1-x) & 0<x<1 \\ 0 & \text{در سایر جاها}\end{cases}$$

اولاً مقدار k را تعیین کنید. ثانیاً تابع احتمال $Y=X^2$ و $Y=3X+1$ را بیابید.

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / تاسی را یک مرتبه پرتاب می‌کنیم. در صورتیکه متغیر تصادفی X نشان دهندهٔ عدد روی تاس باشد، امید ریاضی این متغیر را تعیین کنید.

X	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X)=\sum_{x=1}^{6} x f_X(x) = 1\left(\tfrac{1}{6}\right)+2\left(\tfrac{1}{6}\right)+\dots+6\left(\tfrac{1}{6}\right)=3.5$$

انتظار می‌رود که اگر یک تاس سالم را یک مرتبه پرتاب شود، عدد ۳٫۵ مشاهده کنیم. یعنی در عمل اگر تاسی سالم باشد و به دفعات مکرر پرتاب شود، انتظار می‌رود معدل عددهای مشاهده شده به ۳٫۵ نزدیک گردد.

مثال / متغیر تصادفی X که نشان دهندهٔ طول عمر یک نوع لامپ برحسب ساعت می‌باشد، دارای تابع احتمالی بصورت زیر است. اولاً مقدار ثابت k را محاسبه کنید، ثانیاً $E(X)$ را حساب کنید.

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{k}{x^3} & x\geq 1000 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$\int_{1000}^{+\infty}\frac{k}{x^3}\,dx=1 \Rightarrow k=2000000$$

$$E(X)=\int_{1000}^{+\infty} x\cdot\frac{\overset{2000000}{k}}{x^3}\,dx=2000 \text{ ساعت}$$

Subject:
Year: Month: Day:

انتظار می‌رود که یک لامپ از این نوع ۲۰۰۰ ساعت دوام داشته باشد. در عمل، اگر تعدادی از این لامپ‌ها انتخاب و معدل طول عمر آنها محاسبه شود، انتظار می‌رود این عدد به ۲۰۰۰ نزدیک باشد.

مثال / متغیر X دارای تابع احتمال زیر است. امید ریاضی X را پیدا کنید.

$$f_X(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad x=1,2,3,\dots$$

$$E(X)=\sum_{x=1}^{\infty} x f(x)=1\left(\tfrac{1}{2}\right)+2\left(\tfrac{1}{4}\right)+3\left(\tfrac{1}{8}\right)+\dots$$

$$E(X)=1\left(\tfrac{1}{2}\right)+2\left(\tfrac{1}{4}\right)+\dots$$

$$\frac{1}{2}E(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{8}+\dots$$

$$\frac{1}{2}E(X)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots=\frac{1/2}{1-1/2}=1 \Rightarrow E(X)=2$$

تذکر: اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه امید ریاضی هر تابعی از X مانند $g(X)$ برابر است با:

$$E(g(X))=\begin{cases} \sum_x g(x) f_X(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx \end{cases}$$

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ است. مطلوبست محاسبه $E(X)$, $E(X^2)$.

$$E(X^2)=E(g(X)) \rightarrow g(x)=x^2$$

$$E(X)=\int_0^{+\infty} x f_X(x)\,dx=\int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx \overset{?}{=} 1$$

یکبار جزء به جزء

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx=\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx \overset{?}{=} 2$$

دو بار جزء به جزء

تعریف: اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y)$ باشند، آن گاه:

امید ریاضی هر تابع از X و Y مانند $g(X,Y)$ برابر است با:

$$E(g(X,Y))=\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \\ \sum_x \sum_y g(x,y) f_{X,Y}(x,y) \end{cases}$$

[illegible]

مثال / اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} x+y & 0<x,y<1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$ باشند، مطلوبست محاسبه $E(X)$ ، $E(Y)$ ، $E(X.Y)$.

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

$$\underbrace{E(X)}_{g(X,Y)=X}=\int_0^1\int_0^1 x(x+y)\,dx\,dy=\frac{7}{12}$$

$$\underbrace{E(Y)}_{g(X,Y)=Y}=\int_0^1\int_0^1 y(x+y)\,dx\,dy=\frac{7}{12}$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy=\frac{1}{3}$$

قوانین امید ریاضی:

۱- اگر $g(X)$ و $h(X)$ توابعی از متغیر تصادفی X باشند، آن گاه:

$$E(g(X)\pm h(X))=E(g(X))\pm E(h(X))$$

۲- اگر a و b دو عدد ثابت باشند، آن گاه:

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

نکته: اگر $a=0$ باشد $\leftarrow E(b)=b$

نکته: اگر $b=0$ باشد $\leftarrow E(aX)=aE(X)$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

۳- اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند آنگاه:

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

اثبات: با توجه به تعریف امید ریاضی داریم:

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

چون X و Y مستقل اند پس $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ است. در نتیجه:

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_X(x)\, f_Y(y)\,dx\,dy=E(X)E(Y) \quad \boxtimes$$

۴- اگر $g(X,Y)$ و $h(X,Y)$ توابعی از متغیرهای تصادفی X، Y باشند، آنگاه:

$$E(g(X,Y)\pm h(X,Y))=E(g(X,Y))\pm E(h(X,Y))$$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

معرفی چند امید ریاضی خاص:

در این قسمت به معرفی چند امید ریاضی خاص خواهیم پرداخت که در کاربرد مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

۱- میانگین ۲- واریانس ۳- انحراف معیار ۴- کوواریانس ۵- ضریب همبستگی

میانگین:

اگر در فرمول ۱ تابع $g(x)$ را بصورت $g(x)=X$ تعریف کنیم به مقدار امید ریاضی این تابع، میانگین می‌گوئیم و با علامت μ یا μ_X نشان داده و می‌نویسیم:

میانگین $=\mu=\mu_X=E(X)$

مثال/ برای متغیر X که نشان‌دهنده عدد روی تاس می‌باشد، می‌دانیم $E(X)=3.5$ است. به عبارت دیگر

میانگین $=\mu=3.5$

تذکر: میانگین مشخص کننده محل تمرکز مشاهدات یک متغیر تصادفی است. (یک جامعه آماری)

تذکر: میانگین میتواند همه مقادیر را اختیار کند $\mu=0$ ، $\mu<0$ ، $\mu>0$ ...

SAMAND

واریانس

اگر در فرمول ۱ تابع $g(x)$ را بصورت $g(x)=(x-\mu)^2$ اختیار کنیم، آنگاه امید ریاضی

این تابع را با علامت σ^2 یا σ_x^2 یا $Var(X)$ نشان داده و آن را واریانس متغیر X می‌نامیم

به عبارت دیگر واریانس عبارت است از

واریانس ، $\sigma^2 = Var(X) = E(X-\mu_x)^2$

تذکر: واریانس مشخص کنندهٔ میزان پراکندگی حول حد وسط یک متغیر نسبت به میانگین است.

قضیه ـ فرمول محاسباتی واریانس :

واریانس متغیر تصادفی X برابر است با : $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

$$\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

اثبات :

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - \underbrace{2\mu E(X)}_{-2\mu^2} + \mu^2$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 \quad \boxed{}$$

نکته : $E(X^2) \geq (E(X))^2$

انحراف معیار :

جذر مثبت واریانس را انحراف معیار می‌گوئیم و با علامت σ یا σ_x نشان میدهیم

نکته : هر متغیر تصادفی مانند X همواره سه عدد مهم دارد. μ ، σ ، σ^2 .

مثال / متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال بصورت $P_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ است. مطلوبست

محاسبهٔ μ ، σ ، σ^2 برای این متغیر.

$E(X)=1$ و $E(X^2)=2$

$\mu=1 \qquad \sigma^2=E(X^2)-\mu^2 = 2-1=1 \Rightarrow \sigma^2=1 \Rightarrow \sigma=1$

کوواریانس

اگر در فرمول شمارهٔ ۲ تابع $g(X,Y)$ را بصورت زیر تعریف کنیم

Subject:
Year: Month: Day:

$g(X,Y) = (X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$

آن گاه امید ریاضی این تابع را کوواریانس گوییم و با علامت σ_{XY} یا $Cov(X,Y)$ نشان می‌دهیم.

$$\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = E\big((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big)$$

<u>قضیه</u>: فرمول محاسبۀ کوواریانس:

کوواریانس دو متغیر X، Y برابر است با

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y)$$

<u>نتیجه ۱</u>: اگر X و Y مستقل باشند، $\sigma_{XY}=0$ است. عکس این مطلب درست نیست چون ممکن است به رغم صفر بودن σ_{XY}، X و Y وابسته باشند.

<u>نتیجه ۲</u>: اگر $\sigma_{XY}\neq 0$ باشد، X و Y وابسته اند.

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

ضریب همبستگی

اگر X، Y دو متغیر تصادفی باشند، ضریب همبستگی این دو متغیر با علامت ρ یا $\rho(XY)$ نشان می‌دهند و برابر است با:

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\text{کوواریانس}}{(\text{انحراف معیار } X)(\text{انحراف معیار } Y)}$$

σ_{XY}: >0، <0، $=0$ — ρ: >0، <0، $=0$

<u>قضیه</u>: اگر ρ ضریب همبستگی دو متغیر X، Y باشد، آن گاه:

$\rho^2 \le 1$ یا $-1 \le \rho \le +1$

<u>تذکر</u>: اگر $\rho=1$ یا $\rho=-1$، اولاً X و Y وابسته اند، ثانیاً X و Y وابستگی شدید خطی دارند. به عبارت دیگر:

$Y = aX+b$ یا $X = cY+d$

<u>نتیجه</u>: اگر $\rho=0$: ۱) X و Y مستقل اند (X، Y مستقل $\Rightarrow \sigma_{XY}=0$)

یا

۲) X و Y وابسته اند اما قطعاً وابستگی خطی ندارند.

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

برای $(-1,1)$: $f(-1,1) \overset{?}{=} f_X(-1)\, f_Y(1)$

$0 \neq \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \longrightarrow$ X و Y وابسته اند

مثال / اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & 0<x,y<1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$ باشد:

اولاً ρ را تعیین کنید. ثانیاً مشخص کنید X و Y مستقل اند یا وابسته.

$$\mu_X = E(X) = \int_0^1 \int_0^1 x(x+y)\,dx\,dy = \frac{7}{12} = \mu_Y$$

$$E(XY) = \frac{1}{3}$$

$$\sigma_{XY} = \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{-1}{144}$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \frac{5}{144}$$

$$\rho = \frac{\frac{-1}{144}}{\sqrt{\frac{5}{144}} \times \sqrt{\frac{5}{144}}}$$

$\rho \neq 0 \longrightarrow$ X و Y وابسته

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم زیر باشند:

y \ x	-1	0	1	$f_Y(y)$
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
$f_X(x)$	1/4	1/2	1/4	

الف / ρ این متغیر را تعیین کنید.

ب / بررسی کنید X و Y مستقل اند یا وابسته.

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \qquad \sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

$$\mu_X = \mu_Y = -1(1/4) + 0(1/2) + 1(1/4) = 0$$

$$E(XY) = \sum_{y=-1}^{1} \sum_{x=-1}^{1} xy\, f_{X,Y}(x,y) = 0$$

$$\sigma_{XY} = 0 - 0 = 0 \longrightarrow \rho = \frac{0}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = 0$$

برای تعیین وابستگی یا استقلال دو متغیر از تعریف استفاده می‌کنیم.

$$\forall x,y:\ f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

چند خواص از واریانس و کوواریانس

چند قضیه زیر خواص واریانس را نشان میدهد. این خواص به کمک فرمول کلی از ۲ بسادگی اثبات میشوند

قضیه ۱:

اگر a و b دو مقدار ثابت باشند، آن گاه نتایج زیر برقرار است:

1) $\sigma^2_{x+b} = \sigma^2_x = \sigma^2$

2) $\sigma^2_{ax} = a^2\sigma^2_x$

3) $\sigma^2_{ax\pm by} = a^2\sigma^2_x + b^2\sigma^2_y \pm 2ab\,\sigma_{xy}$

4) $Cov(ax+b, cy+d) = ac\,Cov(x,y)$

اثبات ۱:

$\sigma^2_{x+b} = E(x+b-\mu_{x+b})^2$

در فرمول ۲ به جای $g(x)$ قرار میدهیم: $x+b$

$\mu_{x+b} = E(x+b) = \mu_x + b$

$\sigma^2_{x+b} = E(x+b-\mu_x-b)^2 = E(X-\mu_x)^2 = \sigma^2_x$

نتیجه: اگر به همه مقادیر یک متغیر عددی را اضافه کنیم، آن عدد به میانگین اضافه میشود و واریانس تغییر نمیکند.

اثبات ۲: یعنی اگر همه مقادیر یک متغیر را در عددی (مثلاً a) ضرب کنیم، میانگین a برابر و واریانس a^2 برابر خواهد شد. (اثبات به عهده شما)

$\mu_{ax\pm by} = E(ax\pm by) = a\mu_x \pm b\mu_y$

$\sigma^2_{ax\pm by} = E(ax\pm by) = a^2\sigma^2_x + b^2\sigma^2_y \pm ab\,\sigma_{xy}$

اگر x و y مستقل باشند:

$\sigma^2_{ax\pm by} = a^2\sigma^2_x + b^2\sigma^2_y$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

امید ریاضی شرطی (مشروط)

امید ریاضی متغیر Y به شرط آنکه $X=x$ اتفاق افتاده باشد را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu^* = E(Y|X) = \begin{cases} \sum_y y\, f_{Y|X}(y|x) \\ \int y\, f_{Y|X}(y|x)\,dy \end{cases}$$

به همین ترتیب واریانس مشروط بصورت زیر تعریف می‌شود:

واریانس مشروط متغیر تصادفی Y به شرط آنکه $X=x$ اتفاق افتاده باشد برابر است با:

$$V(Y|X) = E\left((Y-\mu^*)^2 \mid X=x\right) = \begin{cases} \sum_y (y-\mu^*)^2 f_{Y|X}(y|x) \\ \int (y-\mu^*)^2 f_{Y|X}(y|x)\,dy \end{cases}$$

مثال / اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با میانگین‌های به ترتیب $\mu_X=2$ و $\mu_Y=3$ و واریانس‌های $\sigma_X^2=1$ و $\sigma_Y^2=2$ باشند، میانگین و واریانس متغیر تصادفی Z بصورت $Z=3X+2Y-7$ را محاسبه کنید.

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

$$\mu_Z = E(Z) = E(3X+2Y-7)$$
$$= 3E(X)+2E(Y)-7$$
$$= 3\mu_X+2\mu_Y-7$$
$$= 3(2)+2(3)-7 = 5 \rightarrow \mu_Z = 5$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma^2_{\underbrace{3X+2Y}_{W\ \text{متغیر}}-7} = \sigma^2_{3X+2Y} = 9\sigma_X^2+4\sigma_Y^2 = 9(1)+4(2) = 17$$

مثال / اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم زیر باشند،

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

اولاً بررسی کنید که f یک تابع احتمال توأم است. $\left(\int_0^1\int_0^x 8xy\,dy\,dx\right)$

ثانیاً مطلوبست $\mu^* = E(Y|X)$ ، $V(Y|X)$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^x 8xy\,dy = \begin{cases} 4x^2 & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{8xy}{4x^2} = \frac{2y}{x} \qquad 0\le x\le 1$$

$$\mu^* = \int_0^x y \times \frac{2y}{x}\,dy = \frac{2x^2}{3} \qquad 0<x\le 1$$

SAMAND

Subject:

Year: Month: Day:

تمرین ۲: اگر دو متغیر تابع احتمال مشترک $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/y} \cdot e^{-y}}{y} & x>0 ,\ y>0 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$

داشته باشد، مطلوبست حل مطالبات تمرین قبل.

Subject:

Year: Month: Day:

$$V(Y|X) = \int_0^x \left(y - \frac{2x^2}{3}\right)^2 \cdot \frac{2y}{x}\, dy \overset{?}{=} \frac{x^2}{18}$$

تمرین / اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 \leq x,y \leq 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$

باشند، مطلوبست محاسبهٔ $E(Y|X)$ ، $E(X|Y)$ ، $V(X|Y)$ و

$V(Y|X)$.

Subject:

Year: Month: Day:

تابع مولد گشتاور

با توجه به اینکه محاسبه میانگین و واریانس یک متغیر تصادفی اهمیت زیادی در طراحی دارد، لازم است که این دو مقدار همواره محاسبه شوند. اما محاسبه اینها در بسیاری از موارد با استفاده از تعریف، کار ساده‌ای نمی‌باشد. همچنین موارد می‌توان از گشتاورها و تابع مولد گشتاور برای محاسبه μ و σ^2 استفاده کرد.

تعریف گشتاور مرتبه r ام:

اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه به مقدار $E(X^r)$ که با علامت μ'_r نشان داده می‌شود، گشتاور مرتبه r ام پیرامون مبدا (صفر) می‌گویند.

$$\mu'_r = E(X^r)$$

تذکر: گشتاور مرتبه r ام نوعی امید ریاضی خاص است اگر $g(X)=X^r$ فرض کنیم که r عددی طبیعی است.

Subject:

Year: Month: Day:

اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، تابع مولد گشتاور این متغیر که با علامت $M_X(t)$ نشان داده می‌شود را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f_X(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx \end{cases}$$

$\Rightarrow$ حاصل تابعی از t است

* t یک عدد دلخواه می‌باشد.

$$M'(t) = \frac{dM}{dt} = \begin{cases} \sum_x x e^{tx} f_X(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{tx} f_X(x)\,dx \end{cases} \Rightarrow M'(0) = E(X)$$

$$M''(t) = \frac{d^2M}{dt^2} = \begin{cases} \sum_x x^2 e^{tx} f_X(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{tx} f_X(x)\,dx \end{cases} \Rightarrow M'(0) = E(X^2)$$

$$M^{(r)}(t) = \frac{d^rM}{dt^r} = \begin{cases} \sum_x x^r e^{tx} f_X(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{tx} f_X(x)\,dx \end{cases} \Rightarrow M^{r}(0) = E(X^r)$$

SAMAND

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

مثال/ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X بصورت زیر است $M(t)=e^{(2t+\frac{1}{2}t^2)}$

مطالبست محاسبهٔ میانگین، واریانس و انحراف معیار این متغیر.

$\mu = M'(0)$ $\qquad \sigma^2 = M''(0) - (M'(0))^2$

$M'(t) = (2+t)\,e^{(2t+\frac{1}{2}t^2)} \Rightarrow \mu = M'(0) = E(X) = 2 \Rightarrow \mu = 2$

$M''(t) = e^{2t+\frac{1}{2}t^2} + (2+t)^2 e^{(2t+\frac{1}{2}t^2)}$

$M''(0) = E(X^2) = 1+4 = 5$

$\sigma^2 = 5-(2)^2 = 1 \Rightarrow \sigma^2 = 1 \Rightarrow \sigma = 1$

قضایای تکمیلی از تابع مولد گشتاور:

۱) اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع مولد گشتاور $M_X(t)$ ، $M_Y(t)$ باشند، آنگاه X و Y دارای توزیع یکسان (هم توزیع) می‌باشند اگر و تنها اگر

$M_X(t) = M_Y(t)$

مثال: $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ $\qquad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y \geq 0 \\ 0 & y<0 \end{cases}$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

$\mu_1' = \mu_1 = E(X) = M'(0) = \frac{dM}{dt}\Big|_{t=0}$

$\mu_2' = E(X^2) \longrightarrow \sigma^2 = M''(0) - (M'(0))^2$

مثال/ اگر X متغیری با تابع احتمال $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ باشد، میانگین، واریانس و انحراف معیار متغیر X را به دو طریق تعیین کنید. ۱- استفاده از تعریف ۲- استفاده از تابع مولد گشتاور

$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx = 2$

$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 1 \longrightarrow \sigma = 1$

$M(t) = E(e^{tx}) = \int_0^{+\infty} e^{tx} \cdot e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{(t-1)x}\,dx$

$= \frac{1}{t-1} e^{(t-1)x}\Big|_0^{+\infty} \qquad t<1$

$M(t) = \frac{1}{1-t} \qquad t<1$ تابع مولد گشتاور

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

Subject:
Year: Month: Day:

۲) اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با تابع مولد گشتاورهای $M_X(t)$ و $M_Y(t)$ باشند،

آن گاه تابع مولد گشتاور $Z=X+Y$ برابر است با:

$$M_Z(t) = M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

تعمیم: اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ مستقل باشند، آن گاه:

$$M_{X_1, X_2, \dots, X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t)$$

اگر $X_1, \dots, X_n$ هم توزیع و مستقل باشند، آن گاه:

$$M_{X_1, \dots, X_n}(t) = \left(M_X(t)\right)^n$$

تمرین: تابع مولد گشتاور متغیر X به صورت زیر است.

$$M(t) = \frac{1}{10} e^{t} + \frac{2}{10} e^{2t} + \frac{2}{10} e^{3t} + \frac{3}{10} e^{4t} + \frac{2}{10} e^{5t}$$

الف: مطلوبست محاسبهٔ μ، σ^2 و σ

ب: مطلوبست محاسبهٔ تابع احتمال X.

SAMAND

ج: حداکثر ۱۶ مهره سفید باشد

د: از ۱۰ تا ۱۸ مهره سفید باشد (با در نظر گرفتن خود ۱۰ و ۱۸)

این آزمایش، دوجمله‌ای است. اگر X را تعداد مهره سفید تعیین کنیم

$$b(x;\underset{n}{20},\underset{p}{0.8})$$

$$f_X(x)=\binom{20}{x}(0.8)^x(0.2)^{20-x} \qquad x=0,1,2,\dots,20$$

الف: $P(X=18)=f_X(18)=\binom{20}{18}(0.8)^{18}(0.2)^2=$ کار مشکل است

$$P(X=18)=\sum_{x=0}^{18} b(x;20,0.8)-\sum_{x=0}^{17} b(x;20,0.8)$$

$$=F_X(18)-F_X(17)=0.9308-0.7940$$

ب: $P(X\geq 15)=1-P(X\leq 14)=1-F_X(14)=1-0.1958$

ج: $P(X\leq 16)=F(16)=0.5886$

د: $P(10\leq X\leq 18)=F(18)-F(9)=0.9308-0.0004$

$$M(t)=(pe^t+q)^n$$

$$M'(t)=npe^t(pe^t+q)^{n-1}$$

$$\mu=M'(0)=np$$

$$M''(t)=npe^t(pe^t+q)^{n-1}+(npe^t)^2(pe^t+q)^{n-1}$$

$$\sigma^2=M''(0)-\mu^2=$$

مثال زیر چگونگی استفاده از توزیع تجمعی دوجمله‌ای را که برای n های مختلف $n=1,2,\dots,25$ و p های مختلف ($p=0.1$ تا 0.9) نوشته شده است را نشان می‌دهد.

مثال: از ظرفی که ۸ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه دارد، ۲۰ مهره را به تصادف، به طور متوالی و با جایگذاری بیرون می‌آوریم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال‌های زیر:

الف: وقتی ۱۸ مهره سفید باشد.

ب: حداقل ۱۵ مهره سفید باشد.

P

n	۲	...	$0/8$ مهره	$F(x)=\sum_{x=0} b(x;n,p)$
۲۰	۰		X	
	۲۰			

توزیع فوق هندسی

آزمایش فوق هندسی: به یک آزمایش تصادفی که دارای ۲ ویژگی زیر باشد، آزمایش فوق هندسی می‌گویند.

۱- یک نمونه تصادفی n تایی بدون جایگذاری از N کالا انتخاب شود.

۲- از N کالای موجود، k کالا موفقیت و $N-k$ کالا شکست تلقی شود.

مثال: از ظرفی که ۸ مهره سفید و ۲ مهره سیاه دارد، سه مهره را همزمان انتخاب می‌کنیم. یا، خرید ۵ دستگاه تلویزیون از فروشگاهی که ۱۰ دستگاه تلویزیون سالم و ۲ دستگاه تلویزیون خراب دارد.

متغیر تصادفی فوق هندسی: متغیر تصادفی X که نمایانگر تعداد موفقیت در آزمایش فوق هندسی باشد را متغیر فوق هندسی می‌گویند.

توزیع احتمال فوق هندسی: توزیع متغیر فوق هندسی را توزیع فوق هندسی گویند و این تابع احتمال بصورت زیر است:

$$f_X(x)=h(x;N,n,k)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

قضیه: میانگین و واریانس توزیع فوق هندسی برابر است با

$$\mu=n\cdot\frac{k}{N} \qquad \sigma^2=\left(\frac{N-n}{N-1}\right)n\cdot\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)$$

نتیجه: اگر N به اندازه کافی بزرگ باشد و n کوچک باشد،

$$\frac{k}{N}=p \qquad 0<p<1$$

$$\mu=np \qquad \sigma^2=npq$$

اگر تعداد کالا زیاد و تعداد نمونه کم باشد، نمونه‌گیری بدون جایگذاری با نمونه‌گیری با جایگذاری برابر است. در کنترل کیفیت نمونه‌گیری بدون جایگذاری است و با توجه به زیاد بودن کالا از توزیع دوجمله‌ای استفاده می‌کنند.

توزیع دوجمله‌ای منفی

آزمایش دوجمله‌ای منفی: اگر یک آزمایش برنولی را آنقدر ادامه دهیم تا r موفقیت رخ دهد و سپس آزمایش را قطع کنیم، چنین آزمایشی را دوجمله‌ای منفی گویند.

مثال: یک تاس را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا سومین (rامین) عدد ۶ مشاهده شود.

متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی: متغیر تصادفی X که نشان‌دهنده تعداد آزمایش تا رسیدن به rامین موفقیت را متغیر دوجمله‌ای منفی گویند.

توزیع این متغیر را توزیع دوجمله‌ای منفی نامیده و با علامت زیر نشان می‌دهند و فرمول آن به قرار زیر است

$$f_X(x) = b^*(x;r,p) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$$

X: تعداد آزمایش $\quad x = r, r+1, \ldots$

قضیه: میانگین و واریانس توزیع دوجمله‌ای منفی برابر است با

$$\mu = \frac{r}{p} \qquad \sigma^2 = \frac{rq}{p^2}$$

اثبات: به کمک تابع مولد گشتاور. ابتدا تابع مولد گشتاور را محاسبه می‌کنیم.

$$M(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0} e^{tx}\binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$$

$$= p^r e^{rt}(1-qe^t)^{-r} \qquad t < \ln q$$

حالت خاص:

اگر $r=1$ باشد. یعنی آزمایش را آنقدر ادامه دهیم تا اولین موفقیت به دست آید، سپس آزمایش را قطع می‌کنیم. این آزمایش را آزمایش هندسی گوئیم.

$$b^*(x;1,p) = g(x;p) = pq^{x-1} \qquad (x = 1, 2, \ldots)$$

مثال: تاسی را متوالیاً پرتاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آنکه سومین عدد ۶ در دهمین پرتاب نتیجه شود.

$r=3 \quad p=\frac{1}{6}$

x: تعداد آزمایش $=10$

$$\Rightarrow b^*(10;3,\tfrac{1}{6}) = \binom{10-1}{3-1}\left(\tfrac{1}{6}\right)^3\left(\tfrac{5}{6}\right)^{10-3}$$

توزیع پواسون:

آزمایش پواسون: اگر نتیجه یک آزمایش تصادفی در یک فاصله زمانی یا ناحیه‌ای معین رخ دهد، چنین آزمایشی را پواسون گویند. (فاصله زمانی: ثانیه، دقیقه، ساعت، روز ...) (ناحیه: طول، سطح، حجم ...)

مثال: تعداد تصادف در طول روز (ماه، سال و ...) در یک شهر. یا تعداد دفعاتی که تلفن به صدا در می‌آید. یا تعداد اشتباهات یک تایپیست در یک صفحه و ترکیب بیشتر

در تمام آزمایش‌های پواسون λ = متوسط تعداد موفقیت، که مقدار آن معلوم است.

متغیر پواسون: متغیر تصادفی X که نشان‌دهنده تعداد موفقیت در آزمایش پواسون باشد را متغیر پواسون گویند.

$X: x = 0, 1, 2, ...$

توزیع پواسون: توزیع متغیر پواسون را توزیع پواسون می‌گویند و با علامت $f_X(x)=P(x;\lambda)$ نشان داده و فرمول آن بصورت مقابل است.

$$f_X(x)=P(x;\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

قضیه: میانگین و واریانس توزیع پواسون برابر است با:

$$\mu=\lambda \quad , \quad \sigma^2=\lambda \Rightarrow \sigma=\sqrt{\lambda}$$

اثبات: (به کمک تابع مولد گشتاور)

قبل از اثبات می‌خواهیم ببینیم که فرمول پواسون آیا تابع احتمال هست یا خیر.

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\overset{?}{=}1$$

$$e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}e^{\lambda} \qquad \left(e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \text{ بسط مک‌لورن}\right)$$

$$e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1 \checkmark$$ تابع احتمال هست.

حال اثبات:

$$M(t)=E(e^{tx})=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}f_X(x)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$e^{-\lambda}\underbrace{\sum\frac{(\lambda e^t)^x}{x!}}_{e^{\lambda e^t}}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda e^t}$$

$$M(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$$

هر تابع احتمالی که تابع مولد گشتاورش به شکل مقابل باشد، مربوط به توزیع پواسون است.

$\mu = M'(0) = \lambda e^t . e^{\lambda(e^t-1)}\Big|_{t=0} \to \boxed{\mu = \lambda}$

قضیه زیر نشان می‌دهد که توزیع پواسن حالت خاصی از توزیع دو جمله‌ای است. هنگامی که

$n \to \infty$ و $p \to 0$ (یا $p \to 1$)

$q \to 1$, $q \to 0$

قضیه ـ تقریب دو جمله‌ای به وسیله پواسن

اگر X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با توزیع $b(x;n,p)$ باشد، آنگاه شکل حدی توزیع این متغیر هنگامی که $n \to +\infty$ و $p \to 0$ یک توزیع پواسن با پارامتر $\lambda = np$ خواهد شد.

به عبارت دیگر:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{e^{-np} \cdot (np)^x}{x!}$$

⚠ اگر در توزیع دو جمله‌ای $n \geq 25$ باشد، $p \to 0$ یا $p \to 1$ باشد ← شروط برقرار است. می‌توان از توزیع پواسن استفاده کرد.

تذکر: جدول توزیع تجمعی این متغیر برای مقادیر مختلف λ، (از 0/1 تا 18) نوشته شده که در محاسبات از آن استفاده می‌شود.

مثال: گزارش شده است که به طور متوسط 6 تصادف در طول روز در یک شهر رخ می‌دهد. مطلوب است محاسبه احتمال آنکه:

الف: در یک روز معین هیچ تصادفی رخ ندهد.

ب: حداقل 2 تصادف رخ دهد.

ج: حداکثر 10 تصادف رخ دهد.

حل: این آزمایش یک آزمایش پواسن است. اگر x را تعداد تصادف تعیین کنیم

$$p(x,6) = \frac{e^{-6} \times 6^x}{x!}$$

الف: $p(X=0) = p(0,6) = \frac{e^{-6} \times 1}{1} = e^{-6} = \sum_{x=0}^{0} p(x,6) = F_X(0) = 0/0025$ (تجمعی)

ب: $p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1) = 1 - F_X(1) = 1 - 0/0174$

ج: $p(X \leq 10) = F_X(10) = 0/9332$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

بررسی چند توزیع پیوسته

توزیع گاما:

تابع گامای α:

تابع گامای α که با علامت $\Gamma(\alpha)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

$$\alpha=1 \Rightarrow \Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx=1 \Rightarrow \Gamma(1)=1$$

$$\alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow \Gamma(\tfrac{1}{2})=\int_0^{+\infty} x^{-1/2}e^{-x}\,dx \overset{?}{=} \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha!$$

توزیع گاما:

متغیر تصادفی X که دارای تابع احتمال پیوسته به صورت زیر است،

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

را متغیر گاما و توزیع این متغیر را توزیع گاما با پارامترهای α و β می‌گویند.

تذکر: میانگین و واریانس توزیع گاما برابر است با:

$$\mu=\alpha\beta \quad , \quad \sigma^2=\alpha\beta^2$$

SAMAND

Subject:

Year: Month: Day:

مثال/ متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین معلوم μ و واریانس معلوم σ^2 هم است

به کمک جدول احتمالات زیر را محاسبه کنید

$$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = ?$$

$$= P\left(-1 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 1\right) = P(-1 < Z < 1) = F_Z(1) - F_Z(-1) = ۰/۶۸۲۶$$

$$P(\mu-۲\sigma < X < \mu+۲\sigma) = P\left(-۲ < \frac{X-\mu}{\sigma} < ۲\right) = F_Z(۲) - F_Z(-۲) = ۰/۹۵۴۴$$

$$P(\mu-۳\sigma < X < \mu+۳\sigma) = P\left(-۳ < \frac{X-\mu}{\sigma} < ۳\right) = F_Z(۳) - F_Z(-۳) = ۰/۹۹۷۴$$

نتیجه گیری:

در یک توزیع نرمال ۶۸/۲۶ ٪ مشاهدات جامعه در بازه ($\mu+\sigma$ و $\mu-\sigma$) قرار دارد

Subject:

Year: Month: Day:

Subject:
Year: Month: Day:

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد تحت شرایطی، توزیع گسستهٔ دوجمله‌ای به توزیع پیوسته میل می‌کند.

قضیه - تقریب دوجمله‌ای به کمک نرمال

اگر X یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با توزیع $b(x;n,p)$ باشد، آن‌گاه شکل حدی توزیع متغیر تصادفی $Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$ یک توزیع نرمال استاندارد خواهد شد هنگامی که $n\to\infty$

(n تعداد تکرار یا تعداد نمونه)

از این قضیه هنگامی که $n\geq 30$ باشد می‌توان استفاده کرد.

مثال: متغیر تصادفی X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n=12$ و $p=\frac{1}{2}$ است (توزیع متغیر X، توزیع دوجمله‌ای $b(x;12,\frac{1}{2})$ است) مطلوب است محاسبهٔ احتمالات زیر به دو روش

۱- به کمک جدول ۲- استفاده از تقریب نرمال

الف) $p(4\leq X\leq 7)=?$ ب) $p(X=5)=?$

$$b(x,12,\tfrac{1}{2})=\binom{12}{x}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{x}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{12-x}$$

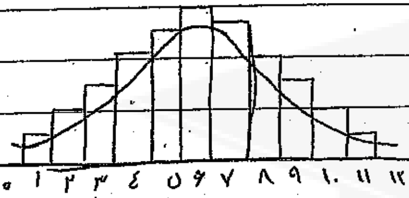
الف) $p(4\leq X\leq 7)=F_x(7)-F_x(4)=0.7330$

ب) $p(X=5)=F_x(5)-F_x(4)=0.1930$

$\mu=np=12\times\frac{1}{2}=6$

$\sigma=\sqrt{12\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

$n(x,6,\sqrt{3})$



الف) $p(4\leq X\leq 7)\simeq p(3.5<X<7.5)=p\left(\frac{3.5-6}{\sqrt{3}}<Z<\frac{7.5-6}{\sqrt{3}}\right)$

$=0.7342$

ب) $p(X=5)\simeq p(4.5<X<5.5)=p\left(\frac{4.5-6}{\sqrt{3}}<Z<\frac{5.5-6}{\sqrt{3}}\right)$

$=0.1937$

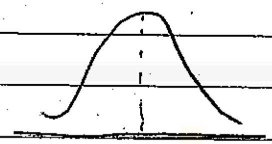
توزیع t

نوعی توزیع پیوسته است و بصورت تئوری از قضیه زیر نتیجه میشود.

اگر متغیر تصادفی V دارای توزیع توان دوم کای با درجه آزادی ν و متغیر تصادفی Z دارای توزیع نرمال استاندارد بوده و V و Z مستقل باشند، آنگاه توزیع متغیر تصادفی $T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{\nu}}}$ به توزیع t معروف است. (با درجه آزادی ν)

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu}}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)} \qquad t \in R$$

اگر $f(t)$ را به ازای یک مقدار دلخواه ν ($\nu = 1$ تا ۳۰) رسم کنیم بصورت زیر خواهد بود.



$\mu = 0$

ضمناً ثابت میشود که $\mu = 0$ و $\sigma^2 = \frac{\nu}{\nu - 2}$

$$(\nu \geq 30 \Rightarrow f_T(t) = f_Z(z))$$

Subject:
Year: Month: Day:

یک بازه اطمینان ۱۰۰(۱-α)% برای μ عبارت است از:

$$\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < \mu < \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

از فرمول فوق در سه صورت می‌توان استفاده کرد:

۱) $n \geq 30$ ، جامعه دلخواه (توزیع احتمال جامعه نامشخص) ، σ معلوم

۲) $n \geq 30$ ، ״ ״ ״ ״ ، σ نامعلوم (استفاده از s به جای σ)

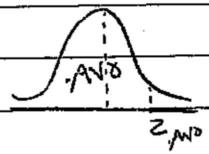
۳) $n < 30$ ، جامعه نرمال ، σ معلوم

مثال: یک نمونه تصادفی ۶۴ تایی از جامعه‌ای انتخاب و مشخص شده میانگین این نمونه $\bar{x}_{64} = 76$ و واریانس این نمونه $S^2 = 9$ می‌باشد. یک فاصله اطمینان ۹۵% برای μ، میانگین واقعی این جامعه به کمک نمونه بدست آورید.

$$\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < \mu < \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = ?$



$P(Z < z) = 0.975$

$z = 1.96$

Subject:
Year: Month: Day:

صفحه مقابل به اشتباه در این قسمت نوشته شده است.

در حالیکه محل صحیح آن صفحه دارای * است.

Subject:
Year: Month: Day:

جامعه‌ها و نمونه‌ها (Population & Samples)

تعریف (جامعه یا جمعیت): به مجموعه‌ی همه‌ی حالاتی که پس از آزمایش تصادفی گردآوری شده و مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد، جامعه یا جمعیت می‌گویند.

اندازه یا حجم جامعه: به تعداد عناصر مجموعه‌ی جامعه، اندازه‌ی جامعه یا حجم جامعه می‌گویند و با N نشان می‌دهند.

مثال: فرض کنید می‌خواهیم گروه خون ۱۰۰ دانشجو را مورد بررسی قرار دهیم. این عمل یک آزمایش تصادفی است. پس از این آزمایش، ۱۰۰ عدد خواهیم داشت که این اعداد مقداری از یک متغیر تصادفی مانند X می‌باشند که X، هشت مقدار را اختیار می‌کند.

X: مشاهده‌ی گروه خونی هر نفر $\quad X: x = 1, 2, \ldots, 8 \quad (1 \to O^+ \quad 2 \to AB, \ldots$

$1, 2, 8, 7, 2, 6, 4, 5, 1, 2, \ldots$

جامعه مجموعه‌ای از مشاهدات است ← مشاهدات مقداری از یک متغیر تصادفی مانند X است

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

$$76 - 1.96\left(\frac{3}{\sqrt{64}}\right) < \mu < 76 + 1.96\left(\frac{3}{\sqrt{64}}\right)$$

$a < \mu < b \Rightarrow \mu \in (a, b)$ با اطمینان ۰٫۹۵

محاسبه‌ی خطا در برآورد μ به وسیله‌ی $\bar{x}$

می‌دانیم یک بازه اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای μ عبارت است از

$$\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < \mu < \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{+(-\bar{x})}$$

$$-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < \mu - \bar{x} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\underbrace{|\mu - \bar{x}|}_{\text{خطا}} < \underbrace{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$ مقدار بالای خطا

در برآورد μ به وسیله‌ی $\bar{x}$ با $100(1-\alpha)\%$ اطمینان می‌توان گفت خطا کمتر از مقدار $e = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ است.

$$e = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}(\sigma)}{e} \Rightarrow$$

$$n = \left[\left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}(\sigma)}{e}\right)^2\right]$$

جزء صحیح

SAMAND

هر متغیری مانند X دارای یک تابع احتمال $f_X(x)$ است ← هر تابع احتمال دارای μ و σ^2 است ← پس هر جامعه دارای μ و σ^2 است.

هر جامعه‌ای دارای یک اسم است. اسم جامعه همان اسم توزیع احتمال است.

جامعه: ۱- متناهی (در عمل کوچک)

۲- نامتناهی (در عمل بزرگ)

جامعهٔ بزرگ ← به همهٔ مشاهدات دسترسی نیست ← به متغیر X دسترسی نیست ← به تابع احتمال $f_X(x)$ دسترسی نیست ← به μ و σ^2 دسترسی نیست

در جامعهٔ بزرگ به μ و σ^2 پارامترهای جامعه می‌گویند.

نمونه چیست؟ هر زیر مجموعه از یک جامعه را نمونه می‌گویند. نمونه هم از مشاهدات تشکیل شده است.

نمونهٔ تصادفی: اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$، n متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکسان $f_X(x)$ باشد، آن‌گاه این n متغیر را یک نمونهٔ تصادفی از جامعه‌ای با تابع احتمال $f_X(x)$ گوییم

واضح است که $\mu_{x_1}=\mu_{x_2}=\dots=\mu_{x_n}=\mu_x=\mu_{\text{جامعه}}$ و

$$\sigma^2_{x_1}=\sigma^2_{x_2}=\dots=\sigma^2_{x_n}=\sigma^2_x=\sigma^2_{\text{جامعه}}$$

$$f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)=f_X(x_1)\,f_X(x_2)\dots f_X(x_n)$$

به صورت کاربردی نمونهٔ تصادفی را می‌توان به شکل زیر نیز تعریف کرد

نمونهٔ تصادفی: یک نمونهٔ تصادفی با اندازهٔ n، نمونه‌ای است که همهٔ نمونه‌های تصادفی دیگر همان شانس انتخاب شدن را داشته باشند.

نمونهٔ تصادفی (مشاهدات) ← یک متغیر تصادفی تعریف می‌کنیم به نام آماره ← تابع احتمال آماره ← میانگین و واریانس (نمونه)

آماره:

هر تابعی از یک نمونهٔ تصادفی n تایی، که فاقد پارامتر مجهول باشد را آماره یا آمار می‌گویند

به عبارت دیگر اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از جامعه‌ای با توزیع احتمال $f_X(x)$ باشد، هر تابعی مانند $g(x)$ از متغیرهای $X_1, \ldots, X_n$ را آماره می‌گوییم. مثلاً:

$$g(x) = X_1 + X_n \qquad g(x) = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$k(x) = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n} \Longrightarrow$$ چون μ مجهول است، پس آماره نیست.

توجه: از یک نمونهٔ تصادفی، بی‌شمار آماره مانند $g(x)$ می‌توان ساخت. با توجه به تعریف، آماره‌ها متغیر تصادفی می‌باشند.

آماره‌های معروف عبارتند از:

۱- آمارهٔ میانگین ۲- آمارهٔ میانه ۳- آمارهٔ مد ۴- آمارهٔ برد

۵- آمارهٔ واریانس (S^2) ۶- آمارهٔ واریانس (S'^2)

آمارهٔ میانگین (Mean)

آمارهٔ میانگین را با علامت تابعی $\bar{X}_n$ نشان داده و برای نمونه‌ای تصادفی به صورت $X_1, \ldots, X_n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

آمارهٔ میانه (median)

میانه را با علامت تابعی $\tilde{X}$ (ایکس تیلدا) نشان می‌دهند و برای نمونهٔ تصادفی n تایی که به ترتیب صعودی $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ مرتب شده باشند برابر است با مقدار میانی مشاهدات اگر n فرد باشد و نصف مجموع دو مقدار میانی اگر n زوج باشد.

آمارهٔ مد ـ نما (mode)

آمارهٔ مد را با M نشان داده و مقدار این آماره برای یک نمونهٔ تصادفی n تایی با مشاهدات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ برابر است با مشاهداتی که بیشترین فراوانی را دارند.

از این سه آماره مخصوصاً $\bar{X}_n$ در قسمت‌های بعدی برای محاسبه μ (میانگین جامعه) استفاده خواهیم کرد.

آمارهٔ برد : Range

آمارهٔ برد را با R نشان داده و مقدار این آماره برای نمونه‌ای تصادفی با اندازه n که به ترتیب صعودی مرتب شده باشند $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n$ ، $x_n - x_1$

آمارهٔ واریانس S^2

این آماره را با S^2 نشان داده و برای نمونهٔ تصادفی به صورت $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر است با:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

آمارهٔ واریانس S'^2

این آماره به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

تذکر: با توجه به تعریف S^2 و S'^2 اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد، $(n \ge 30)$ ، S^2 با S'^2 یکسان می‌شود. اما اگر $n < 30$ باشد نشان می‌دهیم که S^2 آمارهٔ بهتری از S'^2 است.

از این سه آماره (S'^2, S^2, R) در قسمت‌های بعد برای برآورد σ^2 واریانس جامعه استفاده خواهیم کرد.

قضیه: اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ یک نمونهٔ تصادفی از جامعه‌ای با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند، آنگاه:

$$\mu_{\bar{X}_n} = E(\bar{X}_n) = \mu_{\text{جامعه}}$$

$$\sigma^2_{\bar{X}_n} = \frac{\sigma^2_{\text{جامعه}}}{n}$$

اثبات:

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = E\left(\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)\right)$$

$$= \frac{1}{n} E(x_1 + \dots + x_n)$$

$$= \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$\sigma^2_{\bar{X}_n} = \sigma^2_{\frac{1}{n}\sum x_i} = \frac{1}{n^2}\sigma^2_{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = \frac{1}{n^2}\left(\sigma^2_{x_1} + \dots + \sigma^2_{x_n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

قضیه: اگر S^2 واریانس یک نمونهٔ تصادفی از جامعهٔ نرمالی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آنگاه

$$E(S^2) = \sigma^2 \qquad E(S'^2) \ne \sigma^2 \qquad E(S'^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

در برآورد μ به وسیلهٔ $\bar{x}$ با $100(1-\alpha)\%$ اطمینان می‌توان گفت که خطا کمتر از مقدار e است اگر تعداد نمونه $n=\left[\left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\,\sigma}{e}\right)^2\right]$ اختیار کنیم.

محاسبهٔ فاصلهٔ اطمینان برای μ هنگامی که $n<30$، جامعه نرمال، σ نامعلوم

می‌دانیم در این شرایط اگر به جای σ از S استفاده کنیم، توزیع آماره

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad (1)$$

توزیع t با درجه آزادی $n-1$ است.

$$P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}<T<t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}<\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}<t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha \quad (3)$$

از تساوی ۳ نتیجهٔ زیر به دست می‌آید.

$$P\left(\bar{x}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)<\mu<\bar{x}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{S}{n}\right)\right)=1-\alpha \quad (4)$$

از ۴ نتیجهٔ زیر به دست می‌آید.

نتیجه: یک فاصلهٔ اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای μ (در شرایطی که $n<30$، جامعه نرمال، σ نامعلوم) عبارت است از:

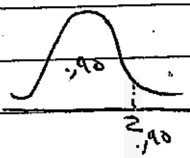
$$\bar{x}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)<\mu<\bar{x}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

مثال: یک بازهٔ اطمینان $0/90$ برای μ میانگین جامعه‌ای نرمال به دست آورید در صورتی که بدانیم $\sigma^2=4$ و میانگین یک نمونهٔ ۲۵ تایی از این جامعه ۲۰، $\bar{x}_{25}$ گزارش شده است.

$$\bar{x}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)<\mu<\bar{x}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$1-\alpha=0.9 \Rightarrow \alpha=0.1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=0.05$$

$z_{1-0.05}=z_{0.95}=?$



$P(Z<z)=0.95$

$$z_{0.95}=1.645$$

$$20-\left(1.645\times\frac{2}{\sqrt{25}}\right)<\mu<20+\left(1.645\times\frac{2}{\sqrt{25}}\right)$$

حداکثر خطا: $e=\frac{1.645\times 2}{\sqrt{25}}$ (کران بالای خطا)

یک بازه اطمینان چه ویژگی هایی باید داشته باشد؟

۱- ضریب اطمینان بالا داشته باشد

۲- طول بازه کم باشد.

تعیین فاصله اطمینان برای پارامتر $\theta = \sigma^2$ و $\theta = \sigma$

میدانیم یک برآوردگر خوب برای σ^2، برآوردگر S^2 است. بنابراین یک مقدار برای این برآوردگر هنگامی که نمونه تصادفی بصورت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ اختیار شود و مقدار S_n^2 آن محاسبه گردد برآورد نقطه‌ای خوبی برای σ^2 است.

از طرفی میدانیم (تحت شرایطی): ① $X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ توزیع کای دو با درجه آزادی $v = n-1$ و نیز میدانیم:

$$P(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} < X < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha \quad ②$$

$$①, ② \Rightarrow P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha \quad ③$$

مثال: از جامعه‌ای نرمال یک نمونه تصادفی انتخاب و نتایج زیر بدست آمده است.

$x_1 = 3, \; x_2 = 1, \; x_3 = 3, \; x_4 = 4, \; x_5 = 4$

$3, 1, 3, 4, 4 \Rightarrow n = 5$

یک فاصله اطمینان ۹۹٪ برای μ میانگین واقعی این جامعه بدست آورید.

$x_1, x_2, \ldots, x_5 \to \bar{x}_5 = 3$

$\to S^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow S = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$1-\alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005$

$t_{1-0.005} = t_{0.995} =$ از جدول $= 4.6$

$v = 4$

$$\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right) < \mu < \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

$$3 - \left(4.6 \times \frac{\sqrt{3/2}}{\sqrt{5}}\right) < \mu < 3 + \left(4.6 \times \frac{\sqrt{3/2}}{\sqrt{5}}\right)$$

طول بازه اطمینان: $L = b - a = \left(\bar{x}_1 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\bar{x}_1 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$L = 2Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2e \qquad e \to 0 \Rightarrow L \to 0$

از ۳ در نتیجه می‌گیریم:

۱- یک بازه اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای σ^2 واریانس واقعی جامعه (مجهول در فرضیه آزمون تصادفی) با اندازه n ، $n<30$ ، از جامعه‌ای با توزیع نرمال اختیار شود) برابر است با

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}$$

۲- یک بازه اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای σ انحراف معیار عبارت است از:

$$S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2}}} < \sigma < S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2}}}$$

مثال: در مثال قبلی یک بازه اطمینان ۹۹٪ برای σ^2 و σ (واریانس و انحراف معیار واقعی جامعه) بدست آورید.

$$S^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow S = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

x_i	x_i^2
3	9
1	1
3	9
4	16
4	16
$\sum x_i = 15$	$\sum x_i^2 = 51$

$$S^2 = \frac{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{n(n-1)}$$

$$S^2 = \frac{5\times 51 - (15)^2}{5\times 4} = \frac{255-225}{20} = \frac{3}{2}$$

$$1-\alpha = 0/99 \rightarrow \alpha = 0/01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0/005$$

$\chi^2_{0/005} =$ از جدول $= 0/207$ ($v=4$) $\qquad \chi^2_{0/995} =$ از جدول $= 14/9$ ($v=4$)

$$\frac{4\times\frac{3}{2}}{14/9} < \sigma^2 < \frac{4\times\frac{3}{2}}{0/207}$$

تعیین برآورد نقطه‌ای و برآورد فاصله اطمینان برای پارامتر $\theta=\mu_1-\mu_2$ (تفاضل میانگین دو جامعه)

می‌دانیم یک برآوردگر خوب برای پارامتر $\mu_1-\mu_2$ ، برآوردگر $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ است.

$$E(\bar{x}_1-\bar{x}_2) = E(\bar{x}_1) - E(\bar{x}_2) = \mu_1-\mu_2$$

این برآوردگر نااریب است. (امید ریاضی = پارامتر جامعه)

در نتیجه یک مقدار از این برآوردگر هنگامیکه دو نمونه تصادفی مستقل با اندازه‌های n_1 و n_2 از این جامعه انتخاب شود و $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ آن محاسبه شود، برآورد نقطه‌ای خوبی برای $\mu_1-\mu_2$ است (مقدار $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ تخمین نقطه‌ای خوبی برای $\mu_1-\mu_2$ است)

می‌دانیم تحت شرایطی توزیع برآوردگر (آماره) $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ توزیع نرمال با میانگین $\mu_1-\mu_2$ و

Subject:

Year: Month: Day:

واریانس $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ برابر $\sigma^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$ است. یا به عبارت دیگر:

$$Z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad (1)$$

از طرف دیگر میدانیم $P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}<Z<Z_{1-\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha$. (2)

$$1,2 \Rightarrow P\left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}<\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}<Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left((\bar{x}_1-\bar{x}_2)-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)=1-\alpha \quad (3)$$

از فرمول ۳ نتیجه زیر حاصل میشود:

یک بازه اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای پارامتر $\mu_1-\mu_2$ (تفاضل میانگین دو جامعه) عبارت است از:

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

SAMAND

Subject:

Year: Month: Day:

از این فرمول در سه حالت میتوان استفاده کرد. این سه حالت همان شرایطی است که $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ دارای توزیع نرمال میباشد.

۱) $n_1,n_2\geq 30$ ، دو جامعه دلخواه و مستقل (یا دو نمونه مستقل) ، σ_1^2 و σ_2^2 معلوم

۲) $n_1,n_2\geq 30$ ، " " " " ، σ_1^2 و σ_2^2 نامعلوم

به جای σ_1^2 و σ_2^2 از S_1^2 و S_2^2 در فرمول استفاده شود.

۳) $n_1,n_2<30$ ، دو جامعه نرمال مستقل یا دو نمونه مستقل ، σ_1^2 و σ_2^2 حتماً باید معلوم باشند.

تعیین برآورد نقطه‌ای و برآورد فاصله اطمینان برای پارامتر $\theta=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ و $\theta=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

میدانیم یک برآوردگر خوب برای $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ ، برآوردگر $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ است. بنابراین یک مقدار از این برآوردگر هنگامی که دو نمونه تصادفی مستقل با اندازه‌های n_1 و n_2 از دو جامعه نرمال اختیار و مقدار $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ آن محاسبه شده، این مقدار برآورد خوبی برای نسبت $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ است.

میدانیم توزیع برآوردگر $\frac{S_1^2}{S_2^2}\times\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ یک توزیع F با درجات آزادی به ترتیب $\nu_1=n_1-1$ و $\nu_2=n_2-1$ است.

$$F(\nu_1,\nu_2)=\frac{S_1^2}{S_2^2}\times\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \quad (1)$$

SAMAND

مثال: از دو جامعه مستقل دو نمونه تصادفی با اندازه‌های $n_1=50$ و $n_2=100$ اختیار کرده و نتایج زیر بدست آمده است.

$n_1=50 \Rightarrow \bar{x}_{50}=7.82 , \quad S_1=0.24$

$n_2=100 \Rightarrow \bar{x}_{100}=4.75 , \quad S_2=0.3$

یک بازه اطمینان ۹۵% برای پارامتر $\theta=\mu_1-\mu_2$ (تفاضل میانگین دو جامعه) تعیین کنید.

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{x}_1-\bar{x}_2)+Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

در این فرمول به جای σ_1 و σ_2 از S_1^2 و S_2^2 استفاده می‌کنیم چون نمونه‌ها بیشتر از ۳۰ تا هستند.

$1-\alpha=0.95 \Rightarrow \alpha=0.05 \Rightarrow \alpha/2=0.025 \qquad Z_{0.975}=1.96$ از جدول

$$(7.28-4.75)-1.96\left(\sqrt{\frac{(0.24)^2}{50}+\frac{(0.3)^2}{100}}\right) < \mu_1-\mu_2 < (7.28-4.75)-1.96$$

$\sqrt{}$

مثال: یک بازه اطمینان ۹۸% برای $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ تعیین کنید (نسبت انحراف معیار دو جامعه) هنگامی که دو نمونه

از طرفی داریم:

$$P\left(F_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2) < F < F_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)\right)=1-\alpha \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)}\right)=1-\alpha \quad (3)$$

نتایج زیر از تساوی ۳ بدست می‌آید:

۱) یک بازه اطمینان $(1-\alpha)\%$ برای پارامتر $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ (نسبت واریانس‌های دو جامعه نرمال مستقل) عبارت است از:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)}$$

$F_{\alpha/2}(\nu_2,\nu_1)$ ... $F_{1-\alpha/2}(\nu_2,\nu_1)$

سمت راست ... سمت چپ

۲- یک بازه اطمینان $(1-\alpha)\%$ برای $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ برابر است با:

$$\frac{S_1}{S_2}\sqrt{\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)}} < \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < \frac{S_1}{S_2}\sqrt{F_{1-\alpha/2}(\nu_2,\nu_1)}$$

Subject:
Year: Month: Day:

دو نمونه مستقل با اندازه های $n_1=16$ و $n_2=25$ از دو جامعه نرمال انتخاب و نتایج زیر بدست آمده اند. $S_1=4$, $S_2=3$

$$\frac{S_1}{S_2}\sqrt{\frac{1}{f_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)}} < \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < \frac{S_1}{S_2}\sqrt{f_{1-\alpha/2}(\nu_2,\nu_1)}$$

$1-\alpha=0.98 \Rightarrow \alpha=0.02 \Rightarrow \alpha/2=0.01$

$$\left.\begin{array}{l} f_{0.99}(15,24)=2.89 \\ f_{0.99}(24,15)=3.29 \end{array}\right\} \text{از جدول}$$

بطور کلی برای تخمین یک پارامتر مانند θ از یک جامعه آماری، مراحل زیر انجام می شود: (نقطه ای و فاصله ای)

۱- برای پارامتر مورد نظر که θ نام گذاری شده، تعدادی برآوردگر تعریف می کنیم. ($\hat\theta_1, \hat\theta_2, \dots$)

۲- بین برآوردگرهای تعریف شده، ناأریب ها انتخاب می شوند. ($E(\hat\theta_1)=\theta, \dots$)

۳- بین برآوردگرهای ناأریب، کاراترین را انتخاب می کنیم (برآوردگری که کمترین واریانس را دارد)

۴- برای کاراترین برآوردگر، تابع احتمال یا توزیع احتمال تعریف می کنیم. (فرض کنیم توزیع برآوردگر W است)

Subject:
Year: Month: Day:

۵- به کمک توزیع آماره و فرمول $P(W_{\alpha/2}<W<W_{1-\alpha/2})=1-\alpha$ یک بازه اطمینان بدست می آوریم.

تعیین برآورد نقطه و فاصله برای پارامتر $\theta=p$ (نسبت در آزمایش دو جمله ای)

$$b(x;n,p)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \qquad x=0,1,2,\dots$$

یک برآوردگر خوب برای پارامتر p، برآوردگر $\hat p=\frac{X}{n}$ است. که در آن X متغیر تصادفی دو جمله ای با توزیع $b(x;n,p)$ است.

$$\mu_{\hat p}=E(\hat p)=E\left(\frac{X}{n}\right)=E\left(\frac1n X\right)=\frac1n \underbrace{E(X)}_{np}=\frac{np}{n}=p$$

پس برآوردگر $\hat p$ ناأریب است.

$$\sigma^2_{\hat p}=\sigma^2_{\frac1n X}=\frac{1}{n^2}\underbrace{\sigma^2_X}_{npq}=\frac{pq}{n}$$

و اما توزیع $\hat p$:

$$Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}=\frac{\frac Xn-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{\hat p-\mu_{\hat p}}{\sigma_{\hat p}}$$

$\hat p$ دارای توزیع نرمال است (به شرط $n\geq 30$)

Subject:
Year: Month: Day:

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \quad (2)$$

$$1, 2 \Longrightarrow P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Longrightarrow P\left(\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} < p < \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) =$$

به طور یقین این نامساوی به جای p و q، مقدار تخمین نقطه‌ای آن را قرار می‌دهیم. به عبارت دیگر

به جای p، q، $\hat{p}$ و $\hat{q}$ را به کار می‌بریم

$$P\left(\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) \approx 1-\alpha \quad (3)$$

نتیجه: یک بازه اطمینان $(1-\alpha)\%$ برای پارامتر $\theta = p$ (نسبت در آزمایش دوجمله‌ای)

عبارت است از:

$$\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$ تقریبی

$\hat{p} = \frac{x}{n}$ و $\hat{q} = 1-\hat{p}$ ($n \geq 30$ نسبتاً تعداد زیاد)

Subject:
Year: Month: Day:

مثال: یک نمونه تصادفی ۲۰۰ تایی از نوعی باطری قلمی اختیار کرده‌ایم و مشخص شده که ۱۰ عدد از این باطری‌ها ناسالم می‌باشد. یک بازه اطمینان ۹۵٪ برای نسبت واقعی تعداد باطری قلمی سالم از این کارخانه را تعیین کنید.

$$\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$\hat{p} = \frac{x}{n}$ و $\hat{q} = 1-\hat{p}$ (x تعداد کالای سالم در نمونه n تایی)

$n = 200$ و $x = 190$

$\hat{p} = \frac{190}{200} = \frac{19}{20}$ $\quad \hat{q} = 1 - \frac{19}{20} = \frac{1}{20}$

$1-\alpha = 0.95 \longrightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

$z_{0.975} =$ به کمک جدول $= 1.96$

$$\frac{19}{20} - \left(1.96 \times \sqrt{\frac{\frac{19}{20} \times \frac{1}{20}}{200}}\right) < p < \frac{19}{20} + \left(1.96 \times \sqrt{\frac{\frac{19}{20} \times \frac{1}{20}}{200}}\right)$$

SAMAND

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

آزمون فرض ها: testing hypotesis

در این قسمت ابتدا به فرض آماری و آزمون فرض پرداخته و در پایان چگونگی انجام مراحل یک آزمون فرض را به کمک نمونه تصادفی مشخص می‌کنیم.

تعریف فرض آماری

یک فرض آماری عبارتست از بیان یا فرض که در مورد پارامتر یک جامعه گفته شود بدون توجه به آنکه درست یا نادرست باشد.

مثال: ۶۰٪ دانشجویان از خوابگاه استفاده می‌کنند.

(احتمال آنکه یک دانشجو به تصادف انتخاب و خوابگاهی باشد، ۰٫۶ است: $P = 0.6$)

مثال: ۳۰٪ دانشجویان از خوابگاه استفاده می‌کنند.

مثال: میانگین طول عمر لامپ نوع A: $\mu_A = 20$ ساعت است یا $\mu_A < 20$ ساعت

قسم فرض آماری:
۱) ساده: اگر پارامتر جامعه به طور دقیق مشخص شود. $P = 0.6$ یا $\mu_A = 20$

۲) مرکب: اگر پارامتر جامعه به طور دقیق مشخص نشود. $P < 0.3$ یا $\mu_A < 20$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

درستی یا نادرستی یک فرض آماری وقتی به طور دقیق مشخص می‌شود که تمام جامعه مورد بررسی قرار گیرد (کاری غیرممکن است) بنابراین تحقیق در مورد درستی یا نادرستی یک فرض آماری، اجباراً توسط نمونه تصادفی انجام می‌شود.

نمونه تصادفی ← باعث قبول فرض آماری
رد فرض آماری

آزمون فرض:

تحقیق در مورد درستی یا نادرستی یک فرض آماری به کمک نمونه تصادفی را آزمون فرض می‌گویند.

یک فرض آماری چگونه باید بیان شود؟

یک فرض آماری به گونه‌ای بیان می‌شود که در صدد رد آن باشیم، زیرا رد یک فرض آماری با قاطعیت بیشتری انجام می‌گیرد.

مثال: فرض کنید می‌خواهیم بررسی کنیم که یک سکه سالم است یا خیر.

فرض آماری: سکه سالم است. $P = 1/2$ (احتمال شیر یا خط یکسان است)
فرض آماری: سکه سالم نیست. $P \neq 1/2$ (احتمال شیر یا خط یکسان نیست)

$b(x, n, p) =$ $n = 10$, $P = \frac{1}{2}$ $x = 0, 1, \ldots, 10$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

$H_0: p = \frac{1}{2}$ سکه سالم

$H_1: p \neq \frac{1}{2}$ سکه ناسالم

در هر آزمون فرض همواره دو نوع خطا وجود دارد . عامل خطا نمونه است .

۱- خطای نوع اول ۲- خطای نوع دوم

خطای نوع اول:

اگر فرض H_0 را رد کنیم درصورتیکه درست باشد ، خطای نوع اول را مرتکب شده‌ایم. (این خطا یک پیشامد است.) احتمال مرتکب شدن این نوع خطا را سطح تشخیص یا میزان معنی دار بودن گویند و با α نشان میدهند

$\alpha = P(\text{رد فرض } H_0 \mid H_0 \text{ درست باشد})$

خطای نوع دوم:

اگر فرض H_0 را قبول کنیم درصورتیکه نادرست باشد، خطای نوع دوم را مرتکب شده‌ایم. احتمال وقوع این خطا را با β نشان میدهند.

$\beta = P(\text{قبول } H_0 \mid H_0 \text{ نادرست باشد})$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

$P(\underset{\text{دوجمله‌ای}}{X \leq 35}) = P(\underset{\text{نرمال}}{X < 35.5}) = P(Z < \frac{35.5-50}{5}) = 0.002$

احتمال آنکه در ۱۰۰ بار پرتاب یک سکه سالم،

$\mu = np = 100 \times \frac{1}{2} = 50$

کمتر از ۳۵ شیر ظاهر شود، ۰.۰۰۲ است.

$\sigma = \sqrt{100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 5$

پس فرض "سکه سالم نیست" رد میشود

در هر آزمون فرض دو نوع فرض آماری تعریف میشود .

۱- فرض صفر (فرض پوچی)

یک فرض آماری که برای رد شدن تنظیم میشود، فرض صفر می‌گوییم و با علامت H_0 نمایش میدهیم. (فرض صفر چون شرایط موجود را نشان میدهد معمولاً یک فرض ساده است)

$H_0: \theta = \theta_0$

۲- فرض مقابل

یک فرض آماری که در مقابل فرض صفر قرار میگیرد را فرض مقابل می‌گوییم و با H_1 نشان میدهیم

$H_1: \theta \neq \theta_0$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

یا $\beta = P($ قبول H_0 | H_1 درست باشد $)$

در هر آزمون فرض حداقل دو ناحیه تعریف می‌شود.

۱- ناحیه رد (بحرانی)

ناحیه‌ای که در صورت قرار گرفتن آماره در آن ناحیه باعث تصمیم گیری در رد فرض H_0 شود را ناحیه رد یا بحرانی می‌گوئیم

۲- ناحیه قبولی:

ناحیه‌ای که در صورت قرار گرفتن آماره در آن ناحیه باعث تصمیم گیری در قبول فرض H_0 شود را ناحیه قبولی می‌نامیم.

نقاط مرزی بین این دو ناحیه را نقاط بحرانی می‌گوئیم.

فرض کنید می‌خواهیم آزمون به صورت

$$\begin{cases} H_0: p = \frac{1}{2} & \text{سکه سالم است} \\ H_1: p \neq \frac{1}{2} & \text{سکه ناسالم است} \end{cases}$$

را ناحیه بندی کنیم

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

$x=0$ ناحیه رد — ۳۵ — ناحیه قبولی — ۶۶ — ناحیه رد $x=100$

$$\begin{cases} X \leq 35 \\ X \geq 66 \end{cases}$$ ناحیه رد

$35 < X < 66$ ناحیه قبولی

آیا α و β را می‌توان مقایسه کرد؟ آیا می‌توان α و β را همزمان کاهش داد؟

مثال: گزارش شده است که میانگین قد ~~قد~~ دانشجویان یک دانشگاه $\mu = 170\ cm$ و با انحراف معیار $\sigma = 9\ cm$ است. برای بررسی این گزارش (درستی یا نادرستی این فرض آماری) آزمون های زیر را انجام داده‌ایم.

$$1)\begin{cases} H_0: \mu = 170 \\ H_1: \mu \neq 170 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} H_0: \mu = 170 \\ H_1: \mu = 175 \end{cases}$$

در نمونه‌ی تصادفی $n=36$ و $n=64$ اختیار و به کمک یک ناحیه‌ی بحرانی دلخواه α و β را محاسبه کنید.

در آزمون ۱: ابتدا برای $n=36$ محاسبه می‌کنیم

می‌دانیم که آماره (برآوردگر) مناسب برای μ، آماره‌ی $\bar{x}$ است. چون نمونه $n=36$ است،

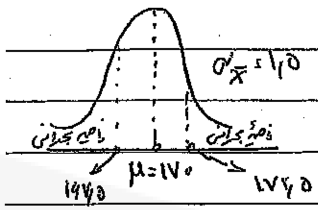
بنابه قضیه حد مرکزی، $\bar{X}$ دارای توزیع نرمال است.

$\mu_{\bar{x}} = 170$

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{9}{\sqrt{36}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1.5$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:



$$\left\{\begin{array}{l}\bar{X} < 167.5 \\ \bar{X} > 172.5\end{array}\right.$$ ناحیه بحرانی دلخواه

$167.5 < \bar{X} < 172.5$ ناحیه قبولی

$$\alpha = P(\bar{X} < 167.5 \mid \mu = 170) + P(\bar{X} > 172.5 \mid \mu = 170) =$$

$$= 2P(\bar{X} < 167.5 \mid \mu = 170) = 2P\left(Z < \frac{167.5 - 170}{1.5}\right) = 0.097$$

$$\beta = P(167.5 < \bar{X} < 172.5 \mid \mu \neq 170) =$$ قابل محاسبه نیست

در آزمون ۲ :

$\alpha = 0.097$

$$\beta = P(167.5 < \bar{X} < 172.5 \mid \mu = 175) = P\left(\frac{167.5 - 170}{1.5} < Z < \frac{172.5 - 170}{1.5}\right)$$

$= 0.04$

اگر $n = 64$ را در نظر بگیریم $\sigma = \frac{9}{\sqrt{64}} = \frac{9}{8} = 1.125$

Subject:
Year: Month: Day:

$$\alpha = P(\bar{X} < 167.5) + P(\bar{X} > 172.5) = 2P\left(Z < \frac{167.5 - 170}{1.125}\right) = 0.02$$

$$\beta = P(167.5 < \bar{X} < 172.5) = P\left(\frac{167.5 - 170}{1.125} < Z < \frac{172.5 - 170}{1.125}\right) = 0.01$$

$$n = 36: \left\{\begin{array}{l}\alpha = 0.09 \\ \beta = 0.04\end{array}\right. \qquad n = 64: \left\{\begin{array}{l}\alpha = 0.02 \\ \beta = 0.01\end{array}\right.$$

در آزمون‌های پیوسته به جای آنکه ناحیه بحرانی را دلخواه انتخاب کرده و مقدار α را محاسبه کنیم، می‌توان برعکس عمل کرد. به عبارت دیگر در چنین آزمون فرض‌هایی ابتدا α را انتخاب و به کمک آن ناحیه بحرانی مشخص می‌شود. معمولاً در کاربرد α را 0.05 یا 0.01 انتخاب می‌کنیم. اگر در مسئله آزمون فرضی α را مشخص نکرده، $\alpha = 0.05$ اختیار می‌شود. (آزمون در سطح تشخیص 0.05 انجام می‌شود.)

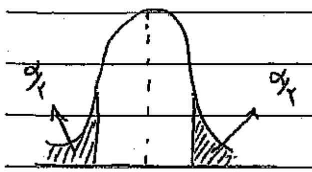
* آزمون‌های یک طرفه و دو طرفه :

آزمون یک طرفه به آزمون فرضی می‌گویند که فرض مقابل آن یک طرفه باشد. به عبارت دیگر آزمون

Subject:

Year: Month: Day:

از ویژگی آزمون های دوطرفه آن است که ناحیه بحرانی در دو سمت توزیع قرار می‌گیرد.



$H_0: \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

بطور کلی برای انجام یک آزمون هنگامیکه از توزیع های پیوسته استفاده میشود (آزمونهای [illegible] از توزیع های پیوسته را دارا باشند)، مراحل زیر اجرا میشود.

۱ـ تشکیل فرض H_0 $\quad H_0: \theta = \theta_0$

۲ـ تشکیل فرض مقابل $H_1: \theta < \theta_0$ یا $\theta > \theta_0$ یا $\theta \neq \theta_0$

۳ـ انتخاب سطح تشخیص آزمون (انتخاب مقدار α)

۴ـ انتخاب آماره مناسب برای θ و تشخیص نوع توزیع آماره یا برآوردگر

۵ـ تشکیل ناحیه بحرانی به کمک α و توزیع آماره

۶ـ محاسبات: به کمک نمونه منتخب مقدار آماره مشخص میشود.

SAMAND

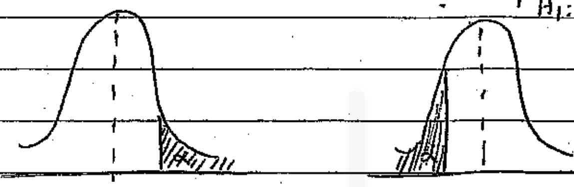
Subject:

Year: Month: Day:

بصورت زیر باشد: $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta > \theta_1 \end{cases}$ یا $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{cases}$

مثال: $\begin{cases} H_0: \mu = 170 \\ H_1: \mu > 170 \end{cases}$ یا $\begin{cases} H_0: \mu = 170 \\ H_1: \mu < 170 \end{cases}$ مثال:

از ویژگی یک آزمون یک طرفه آن است که ناحیه بحرانی آن یک طرفه بوده و در یک سمت توزیع قرار می‌گیرد. (اگر آزمون بصورت $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{cases}$ باشد، ناحیه بحرانی سمت چپ توزیع قرار می‌گیرد. و اگر $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta > \theta_0 \end{cases}$ باشد، ناحیه بحرانی در سمت راست توزیع قرار می‌گیرد.



$H_0: \mu_0$ $\qquad$ $H_0 = \mu_0$

$H_1: \mu > \mu_0$ $\qquad$ $H_1: \mu < \mu_0$

* آزمون فرض دوطرفه به آزمون فرضی می‌گویند که فرض مقابل آن دوطرفه باشد، به عبارت دیگر

$\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \neq \theta_0 \end{cases}$ باشد.

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

۷- نتیجه گیری: اگر مقدار آماره در ناحیه بحرانی قرار گیرد، فرض H_0 رد می شود. در غیر این صورت می گوئیم دلیلی برای رد H_0 پیدا نشد.

مثال: گزارش شده است که میانگین طول عمر نوعی لامپ، $\mu = 1200$ ساعت با انحراف معیار $\sigma = 300$ ساعت است. کارخانه‌ای مدعی است لامپ جدیدی از این نوع تولید کرده که دارای میانگین طول عمر بیشتر از ۱۲۰۰ ساعت است. برای بررسی این ادعا یک نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی از این نوع لامپ جدید انتخاب و مشخص شده است که میانگین طول عمر این نمونه $\bar{x}_{100} = 1265$ ساعت است. در مورد این ادعا چه اظهار نظری می توان کرد. به عبارت دیگر می خواهیم آزمون فرض زیر را داشته باشیم

که $\begin{cases} H_0: \mu = 1200 \\ H_1: \mu > 1200 \end{cases}$ باشد. (سطح تشخیص $\alpha = \%5$ است)

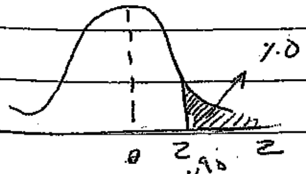
۱) $H_0: \mu = 1200$ $\longrightarrow$ آزمون یک طرفه
۲) $H_1: \mu > 1200$

۳) $\alpha = \%5$ (آزمون یک طرفه)

۴) μ، آماره مناسب برای میانگین $= \bar{x}$

Subject:
Year: Month: Day:

۵) توزیع $\bar{x}$ نرمال است چون $(n = 100 \geq 30)$ است. یا نرمال استاندارد $Z_1 = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$



$Z_{.95} =$ بکمک جدول $= 1.645$

ناحیه بحرانی $Z > 1.645$

۶) محاسبات: $n = 100$ ، $\bar{x} = 1265$ ، $\sigma = 300$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1265 - 1200}{\frac{300}{\sqrt{100}}} = 2.16$$

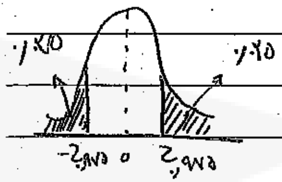
۷) نتیجه گیری: فرض H_0 رد میشود. می پذیریم ادعای این تولید کننده درست است

مثال: میانگین یک نمونه ۱۰۰ تایی از نوعی لامپ دارای طول عمر $\bar{x}_{100} = 1570$ و انحراف معیار $S = 120$ ساعت است. آزمون فرضیه زیر را در سطح تشخیص $\alpha = 0.05$ و $\alpha = 0.01$ انجام دهید.

$H_0: \mu = 1600$ $\longrightarrow$ آزمون دو طرفه
$H_1: \mu \neq 1600$

$\alpha = \%5 \longrightarrow \alpha/2 = 0.025$

$\bar{x}$ آماره مناسب ، توزیع نرمال ← نرمال استاندارد $Z = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$



ناحیه بحرانی $\begin{cases} Z > Z_{.975} \\ Z < -Z_{.975} \end{cases} \xrightarrow{\text{جدول}} \begin{cases} Z > 1.96 \\ Z < -1.96 \end{cases}$

محاسبات : $n = 100$ ، $\bar{x} = 1570$ ، $S = 120$

$Z = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{1570-1600}{\frac{120}{\sqrt{100}}} = -2.50$ ← این عدد در ناحیه بحرانی هست

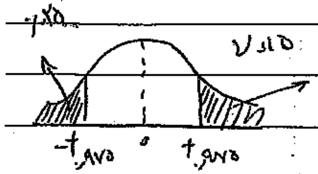
نتیجه‌گیری : فرض H_0 رد میشود . چون Z منفی شده ، پس بزرگتر شده است .

مثال : میانگین یک نمونه ۱۶ تایی از یک جامعه نرمال دارای $\bar{x}_{16} = 50$ و انحراف معیار

$S = 5$ است . به کمک این نمونه آزمون را بصورت زیر انجام داده‌ایم $\begin{cases} H_0 : \mu = 42 \\ H_1 : \mu \neq 42 \end{cases}$

آزمون دوطرفه : $\alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

توزیع آماره ، آماره مناسب $\bar{x}$ است : $T = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ (توزیع t با $\nu = 15$ است .)



ناحیه بحرانی $\begin{cases} t > t_{.975} \\ t < -t_{.975} \end{cases}$ ← از جدول $\begin{cases} t > 2.13 \\ t < -2.13 \end{cases}$

محاسبات : جامعه نرمال $n = 16$ ، $\bar{x}_{16} = 50$ ، $S = 5$

$T = \dfrac{50-42}{\frac{5}{\sqrt{16}}} = 6.4$

نتیجه‌گیری : فرض H_0 رد میشود

مثال : از جامعه نرمالی یک نمونه تصادفی انتخاب و نتایج زیر بدست آمده است : $(n=11)$

۱/۲ ، ۰/۹ ، ۱/۴ ، ۱ ، ۱/۷ ، ۰/۹ ، ۰/۱ ، ۱ ، ۱/۸ ، ۰/۸ ،
۰/۵

در سطح تشخیص : الف : $\alpha = 0.05$ آزمون کنید $\begin{cases} H_0 : \mu = 1 \\ H_1 : \mu > 1 \end{cases}$ انجام میگیرد

ب : $\alpha = 0.1$ آزمون کنید $\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 0.3 \\ H_1 : \sigma^2 \neq 0.3 \end{cases}$ انجام میگیرد

پ : به کمک نمونه $\bar{x}$ و S^2 را بدست میآوریم : $\bar{x} = 1.08$
$S^2 = 0.24$

مثال: دو فرض تصادفی با اندازه‌های $n_1=16$ و $n_2=14$ از دو جامعه نرمال انتخاب و نتایج زیر بصورت آمده است.

$\bar{x}_1 = 75$ ، $S_1 = 6.1$ ، $n_1 = 16$

$\bar{x}_2 = 60$ ، $S_2 = 5.3$ ، $n_2 = 14$

آزمون زیر را در سطح تشخیص ۰.۰۱ به صورت زیر انجام دهید.

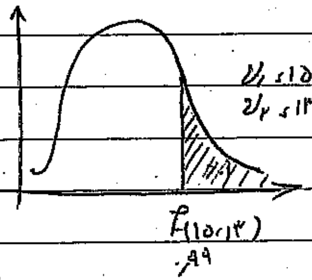
$$\begin{cases} H_0: \sigma_1 = \sigma_2 \\ H_1: \sigma_1 > \sigma_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \\ H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \\ H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1 \end{cases} \longrightarrow \text{آزمون یک طرفه} \longrightarrow \alpha = 0.01$$

آماره مناسب: $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ ، توزیع آماره: $F(\nu_1, \nu_2) = \frac{S_1^2}{S_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$

$\nu_1 = 15$ ، $\nu_2 = 13$



$\nu_1 = 15$
$\nu_2 = 13$

ناحیه بحرانی: $F > F_{0.99}(15,13) = 3.82$

$F > 3.82$

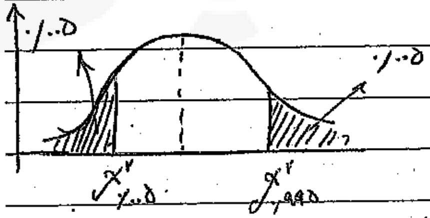
~~[illegible]~~

$H_0: \sigma^2 = 0.3$

$H_1: \sigma^2 \neq 0.3$

آزمون دو طرفه $\longrightarrow \alpha = 0.1 \longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05$

آماره مناسب: S^2 ، توزیع آماره: $X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ دارای توزیع X توان دوم کای با ۱۰ د.آ است



$\cancel{\chi^2_{0.995}}$

ناحیه بحرانی: $\begin{cases} X > \chi^2_{0.995} \\ X < \chi^2_{0.05} \end{cases}$

از جدول: $\begin{cases} X > 25.2 \\ X < \end{cases}$

نمونه: $n = 11$ ، $\bar{x} = 1.08$ ، $S^2 = 0.24$

$$X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{10 \times 0.24}{0.3} = 8$$

نتیجه‌گیری: فرض H_0 رد نمی‌شود.

Subject:
Year: Month: Day:

معرفی چند تابع احتمال کاربردی

در این قسمت به معرفی چند تابع احتمال گسسته و پیوسته می‌پردازیم که در کاربرد بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند. این توزیعات عبارتند از: توزیع یکنواخت، برنولی، دو جمله‌ای، فوق هندسی، دو جمله‌ای منفی و پواسن

توزیع گاما، نرمال (گوس)، کای دو، توزیع t، توزیع F (فیشر)

توزیع یکنواخت

اگر متغیر تصادفی X، n مقدار $x_1, x_2, \dots, x_n$ را با احتمال مساوی اختیار کند توزیع این متغیر را توزیع یکنواخت گویند و با علامت تابعی $f(x;n)$ نشان می‌دهیم.

$$f(x) = f(x;n) = \frac{1}{n}$$

تذکر: به آزمایش تصادفی که متغیر آن دارای توزیع یکنواخت باشد، آزمایش یکنواخت می‌گویند.

بنابراین نام آزمایش، نام متغیر و نام تابع احتمال یکسان تلقی می‌شود.

Subject:
Year: Month: Day:

مثال: پرتاب یک سکه سالم به تعداد ۱ مرتبه یک آزمایش یکنواخت است که توزیع آن هم یکنواخت می‌باشد.

$$f(x;2) = \frac{1}{2} \qquad x = 0, 1$$

مثال: پرتاب یک تاس سالم یک آزمایش یکنواخت است.

$$f(x;6) = \frac{1}{6} \qquad x = 1, 2, \dots, 6$$

قضیه: میانگین و واریانس توزیع یکنواخت $f(x) = \frac{1}{n}$ $(x = x_1, x_2, \dots, x_n)$ برابر است با:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{n}$$

اثبات:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = x_1 \times \frac{1}{n} + x_2\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + x_n\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

توزیع برنولی:

آزمایش برنولی: اگر نتیجه یک آزمایش تصادفی به دو صورت موفقیت و شکست طبقه‌بندی شود، یک آزمایش برنولی می‌گویند. (آزمایش کلی دو حالته)

آزمایش $\to S$، F

"پایان"