

فرادیر

دبستان تا دکترا



FaraDabir.ir



بسمه تعالی



جزوه ی تحقیق در عملیات 2

نیمسال دوم سال تحصیلی 91 – 1390

فهرست مطالب

موضوع	صفحه	موضوع	صفحه
برنامه ریزی عدد صحیح	3	روش کاروش - کاهن - تاکر	44
الگوریتم انشعاب و تحدید	6	روش گرادیان	46
روش برش صفحات گموری	9	روش نیوتن - رافسون	47
الگوریتم برش همگی عدد صحیح	14	تئوری بازیها	49
برنامه ریزی عدد صحیح مختلط	16	بازی با استراتژی های مختلط	49
برنامه ریزی صفر ویک	24	حل هندسی بازی	50
تحلیل شبکه	25	حل بازی ها با برنامه ریزی خطی	50
قضیه ی حداکثر جریان، حداقل برش	24		
الگوریتم حداثر جریان	26		
برنامه ریزی پویا	29		
مسئله ی کوله پشتی	32		
برنامه ریزی آرمانی	35		
سیمپلکس برنامه ریزی آرمانی	38		
برنامه ریزی غیر خطی	39		
شرایط لازم و کافی نقاط اکسترمم	39		
ماتریس هسین	40		
شرایط بهینگی در مسائل بدون محدودیت	42		
ماکزیمم و می نیمم مسائل محدودیت دار	42		
روش لاگرانژ	42		

برنامه ریزی خطی : تخصیص منابع محدود به فعالیت های تعریف شده جهت افزایش بازدهی و یافتن بهترین راه حل بهینه را برنامه ریزی خطی می گویند.

مفروضات یک مسئله ی برنامه ریزی خطی :

1- تناسب : یعنی هر فعالیت به تنهایی و مستقل از سایر فعالیتها عمل نموده و میزان افزایش و یا کاهش متغیرهای تابع هدف و متغیرهای محدودیتها متناسب با تغییرات آن متغیر می باشد.

2- جمع پذیری : تابع هدف از مجموع تک تک متغیرها حاصل می شود. همچنین محدودیت ها نیز از مجموع تک تک مقادیر مصرف شده از منابع حاصل می شود.

3- بخش پذیری (قابلیت تقسیم) : هر فعالیت به هر عدد دلخواهی قابل تقسیم بوده ، فلذا متغیرهای تصمیم گیری ، هر مقدار غیر صحیح را نیز می توانند شامل گردند.

4- معین بودن (قطعیت) : همه ی پارامترهای مسئله (c, a, b) مقادیری ثابت و معلوم می باشند.

برنامه ریزی عدد صحیح (IP) : به دو روش زیر قابل حل می باشد :

1- روش انشعاب و تحدید Branch and Bound

2- روش برش گومری Gomory

روش انشعاب و تحدید (شاخه و کران)

از ویژگی های این روش عبارتند از :

- تقسیم منطقه ی موجه به منطقه های کوچکتر.

- بررسی امکان پاسخ در منطقه های کوچکتر.

- منطقه های کوچکتر. بیانگر یک مسئله ی فرعی.

جواب های بهینه ی برنامه ریزی خطی و برنامه ریزی عدد صحیح رابطه ی زیر با یکدیگر دارند:

$$Z_{IP}^* \leq Z_{LP}^*$$

گام های الگوریتم

1- حل مسئله بدون در نظر گرفتن شرایط عدد صحیح

2- پیدا کردن مقدار بهینه ی مسئله

3- اگر پاسخ عدد صحیح باشد فرایند متوقف می گردد، در غیر اینصورت مقدار $-\infty$ را به عنوان بدترین مقدار تابع هدف در نظر می گیریم. (حد پایین)

*بهترین مقدار تابع هدف IP همان Z_{LP} است.

4- هر وقت در فرایند حل پاسخ موجه صحیح که بهتر باشد پیدا شود، مقدار بدست آمده را جایگزین مقدار قبلی جواب بهینه می کنیم.

5- در هر گام، تقسیم منطقه ی موجه با افزودن یک محدودیت جدید (به کمک متغیر شاخه زنی) توسعه می یابد.

6- انتخاب متغیر شاخه زنی x_j برای شاخه زنی.

- یک مسئله ی فرعی با افزودن محدودیت $x_j \leq L_j$ بدست می آید و یک مسئله ی فرعی با افزودن محدودیت $x_j \geq L_j + 1$ است.

-مقدار ثابت L_j برابر بزرگترین عدد صحیحی است از مقدار x_j^* کوچکتر می باشد.

- x_j^* از حل مسئله ی LP بهینه ی اولیه تعیین می گردد.

مثال :

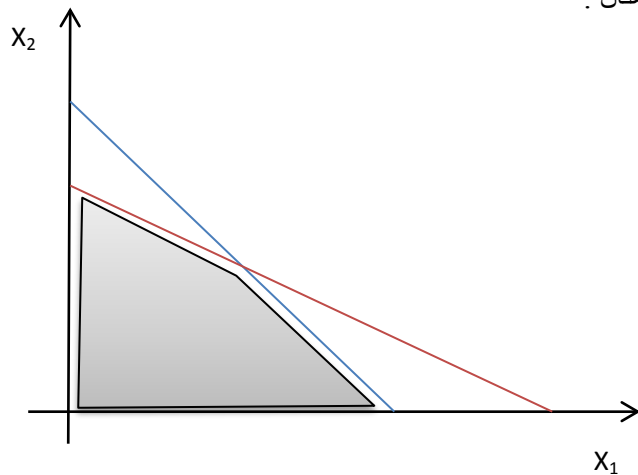
$$\text{Max } 5X_1 + 8X_2$$

S.t.

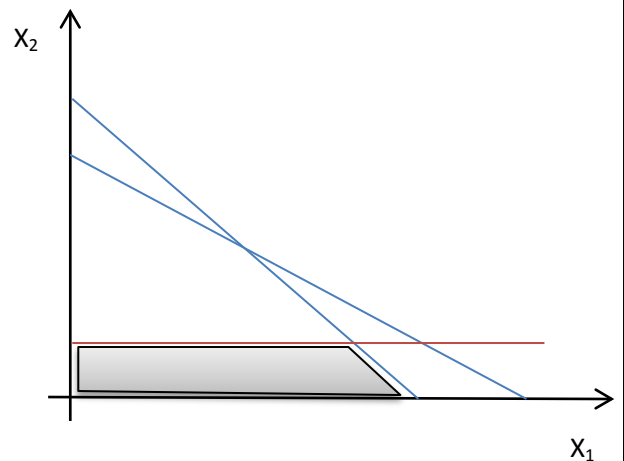
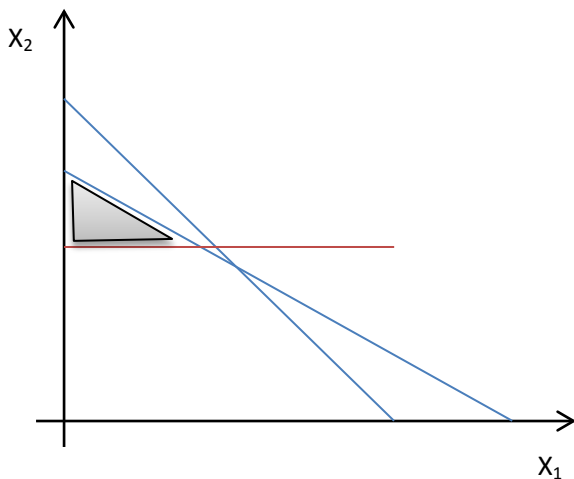
$$X_1 + X_2 \leq 6$$

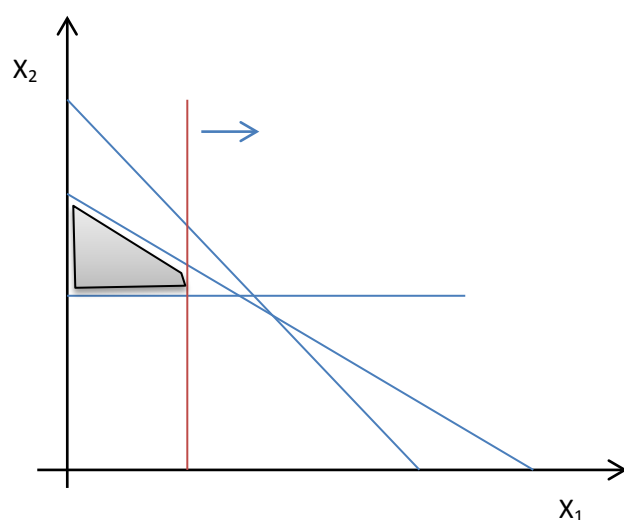
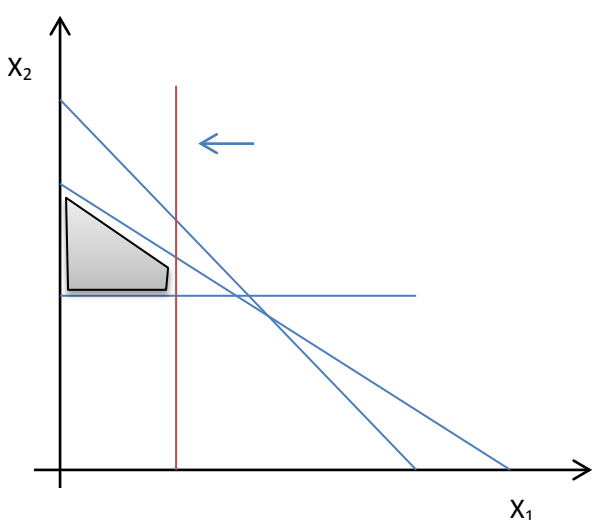
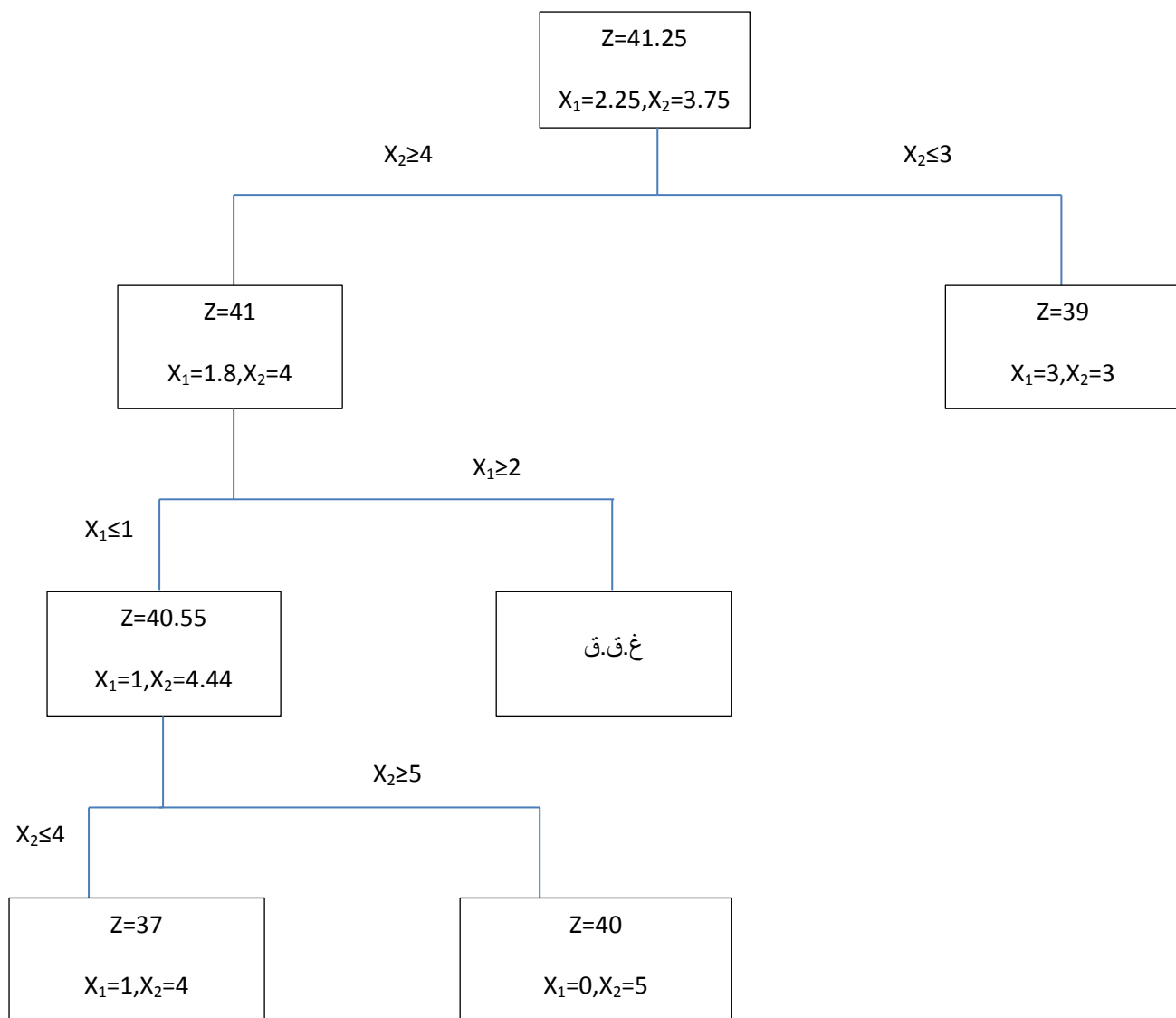
$$5X_1 + 9X_2 \leq 45$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



$$x_2 : 3.75 \quad x_2 \leq 3 \quad x_2 \geq 4$$





از بین مقادیر به عمق رسیده بالا Z بهین را انتخاب می کنیم که مقدار $Z=40$ انتخاب می شود.

تمرین / مسئله ی زیر را به کمک روش ترسیمی حل کنید.

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 5X_2$$

S.t.

$$2X_1 + 4X_2 \leq 24$$

$$X_1 \leq 8$$

$$2X_2 \leq 10$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الگوریتم انشعاب و تحدید (دو متغیره)

- روش تغییر متغیر : هر محدودیت جدید ناشی از انشعاب، یک محدودیت حدار است که با انجام تغییر متغیری به صورت زیر و بدون نیاز به حل مسائل فرعی جدید از آغاز، و ثابت نگه داشتن تعداد محدودیت ها در تمام مسائل، قابل حل می شود.

$$1. x_j \geq L_j \rightarrow x_j = L_j + y_j \rightarrow y_j = x_j - L_j$$

$$2. x_j \leq L_j \rightarrow u_j = x_j + y_j \rightarrow y_j = u_j - x_j$$

- روش سیمپلکس : در این شیوه مسئله P_0 و سایر مسائل فرعی ناشی از آن به روش سیمپلکس حل می شود.

از ویژگی های این روش عبارتند از :

زمان بر بودن، هر شاخه به معنای اضافه کردن یک محدودیت جدید است.

- روش سیمپلکس تجدید نظر شده (تحلیل حساسیت)

زمان حل کاهش می یابد اما برای مسائل با ابعاد بزرگ زمان بر است، با استفاده از محدودیت اضافه شده میتوان به کمک تحلیل حساسیت، تغییرات را تعیین نمود.

الگوریتم انشعاب و تحدید برای حالات چند متغیره

- چگونگی انتخاب شاخه زنی :

1- روش بهترین کران

- انتخاب مسئله ای با بهترین کران

- ممکن است تعداد تکرارهای مود نیاز کاهش پیدا کند.

- ممکن است شانس بیشتری برای دستیابی به مقدار تابع بهینه داشته باشیم.

2- روش جدیدترین کران

- انتخاب آخرین مسئله ی فرعی (به شرطی که به خاتمه یا ژرفا نرسیده باشیم).

مثال :

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 8X_2$$

S.t.

$$X_1 + X_2 \leq 6$$

$$5X_1 + 9X_2 \leq 45$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
z	0	0	5/4	3/4	41.25
X_1	1	0	9/4	-1/4	2.25
X_2	0	1	-5/4	1/4	3.75

از آن جاکه مسئله فاقد جواب عدد صحیح است، X_2 برای انشعاب انتخاب می شود:

$$X_2 \leq 3 \rightarrow X_2 + Y_2 = 3$$

$$X_2 \geq 4 \rightarrow X_2 = Y_2 + 4$$

$$X_2 \geq 4$$

	X_1	Y_2	S_1	S_2	R.H.S
z	0	0	5/4	3/4	41.25
X_1	1	0	9/4	-1/4	2.25
Y_2	0	1	-5/4	1/4	-1/4
Z	0	1	0	1	41
X_1	1	9/5	0	1/5	9/5
S_1	0	-4/5	1	-1/5	1/5

$$X_2 \leq 3$$

	X_1	Y_2	S_1	S_2	R.H.S
Z	0	0	5/4	3/4	41.25
X_1	1	0	9/4	-1/4	2.25
Y_2	0	1	5/4	-1/4	-3/4
Z	0	3	5	0	39
X_1	1	-1	1	0	3
S_2	0	-4	-5	1	3

چون جواب بهینه است، این شاخه به عمق رسیده است.

ادامه انشعاب از شاخه X_1 .

$$X_1 \leq 1 \rightarrow X_1 + Y_1 = 1$$

$$X_1 \geq 2 \rightarrow X_1 = Y_1 + 2$$

$$X_1 \geq 2$$

	Y_1	Y_2	S_1	S_2	R.H.S
Z	0	1	0	1	41
Y_1	1	9/5	0	1/5	-1/5
S_1	0	-4/5	1	-1/5	1/5

Y_1 متغیر خروجی است، اما عدد منفی در سطر لولا وجود ندارد. در نتیجه این شاخه به عمق می رسد.

$$X_1 \leq 1$$

	Y_1	Y_2	S_1	S_2	R.H.S
Z	0	1	0	1	41
Y_1	1	-9/5	0	-1/5	-4/5
S_1	0	-4/5	1	-1/5	1/5
Z	5/9	0	0	8/9	40.55
Y_2	-5/9	1	0	1/9	4/9
S_1	-4/9	0	1	-1/9	5/9

تمرین / ادامه ی مسئله به عهده ی دانشجو می باشد.

روش برش صفحات گموری: گموری (Gomory) در سال 1958 محدودیت برش به این طریق را اولین بار ارائه کرد. منظور از روش صفحه برش دهنده این است که مجموعه محدب فضای جواب را تغییر دهند به طوریکه نقطه حدى مقتضى تماما عدد صحيح شوند. این گونه تغییرات در مرزهای فضای جواب باید باز هم یک مجموعه محدب بدست دهد. همچنین این تغییرات نباید هیچ یک از جوابهای موجه با اعداد صحيح اصلی را از فضای جواب ببرد. بنابر این ابتدا بر مبنای روش سیمپلکس یا سیمپلکس دوگان مسئله ی مورد نظر حل می شود، اگر جواب بهینه ی مسئله غیر عدد صحيح شود با اضافه کردن محدودیت های جدید به طوریکه بخشی از فضای حل باشند و منجر به عدد صحيح شدن یک یا چند متغیر تصمیم شود، مسئله را با بکارگیری روش سیمپلکس ثانویه ادامه می دهیم. با یک یا چند برش متوالی به جوابی موجه و عدد صحيح می رسیم.

- مقدار تابع هدف اگر Max باشد کاهش پیدا می کند(به صورت پی در پی)

	$W_1 \dots W_4 \dots W_n$	$V_1 \dots V_i \dots V_m$	R.H.S
Z	$Z_1 - C_1 \dots Z_i - C_i \dots Z_n - C_n$	$0 \dots 0 \dots 0$	
Y_1	$A_{11} \dots a_{1i} \dots a_{1n}$	1 0 0	B_1
.	.	.	.
.	.	.	.
.	$A_{i1} \dots a_{ii} \dots a_{in}$	0 1 0	b_i
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
Y_m	$A_{m1} \dots a_{mi} \dots a_{mn}$	0 0 1	B_m

متغیر غیر اساسی W

متغیر اساسی V

$$A_{i1} W_1 + a_{i2} W_2 + \dots + a_{ij} W_j + \dots + a_{in} W_n + V_i = b_i$$

هدف : نامعادله ی معینی برای برش فضای حل به گونه ای که مقدار صحيح حاصل گردد.

$$(1) \quad \sum a_{ij} W_j + V_i = b_i$$

هر کدام از ضرایب a_{ij} و b_i شامل دو بخش عدد صحيح و کسری است. مقدار غیر عدد صحيح b_i معادل است با :

$$b_i = [b_i]_I + [b_i]_F \quad 0 \leq [b_i]_F \leq 1$$

$$a_{ij} = [a_{ij}]_I + [a_{ij}]_F \quad 0 \leq [a_{ij}]_F \leq 1$$

به این ترتیب معادله ی (1) را می توان اینگونه نوشت :

$$\sum \{[a_{ij}]_I + [a_{ij}]_F\} W_j + V_i = [b_i]_I + [b_i]_F$$

$$\sum [a_{ij}]_I W_j + \sum [a_{ij}]_F W_j + V_i = [b_i]_I + [b_i]_F$$

برای مسائل عدد صحیح محض، کله ی متغیرهای V_i و W_j باید عدد صحیح باشند. با توجه به این نکته، مقادیر عدد صحیح را به سمت چپ معادله فوق منتقل کنید.

$$\sum [a_{ij}]_I W_j - [b_i]_I + V_i = [b_i]_F - \sum [a_{ij}]_F W_j$$

از آنجا که همه مقادیر سمت چپ عدد صحیح هستند، سمت راست معادله نیز باید عدد صحیح باشند، یعنی

$$[b_i]_F - \sum [a_{ij}]_F W_j \quad \text{باید عدد صحیح باشد.} \quad (2)$$

چون بخش کسری هر عدد مقداری غیر منفی و $W_{ij} \geq 0$ است، آنگاه :

$$\sum [a_{ij}]_I W_j$$

مقداری غیر منفی است که اگر از $[b_i]_F$ ، (معادله ی 2) کم شود، حاصل آن کم تر از $[b_i]_F$ است.

$$[b_i]_F - \sum [a_{ij}]_F W_j \leq [b_i]_F \quad (3)$$

با توجه به نامعادله ی 3 مقدار سمت چپ که مقداری عدد صحیح است باید از $[b_i]_F$ کوچکتر یا مساوی آن باشد. این وضعیت فقط وقتی رخ می دهد که سمت چپ صفر یا منفی باشد. بنابراین:

$$[b_i]_F - \sum [a_{ij}]_F W_j \leq 0$$

در نتیجه شرط عدد صحیح بودن به صورت زیر در می آید که به نامعادله ی گموری معروف است :

$$-\sum [a_{ij}]_F W_j \leq -[b_i]_F$$

با افزودن متغیر کمک S_{gi} به محدودیت فوق، معادله ی زیر بدست می آید که به برش گموری معروف است :

$$-\sum [a_{ij}]_F W_j + S_{gi} \leq -[b_i]_F$$

در معالیه ی فوق که به محدودیت گموری یا برش گموری مشهور است در آن S_{gi} متغیری عدد صحیح است و یک قاعده ی کلی در حل مسائل با این روش این است که سطری که مقدار $[b_i]_F$ بزرگتری دارد برای انشعاب انتخاب می شود و سطر منبع نامیده می شود. همینطور یک شرط اساسی این است که باید تمام ضرایب و مقدار اعداد سمت راست هر محدودیت عدد صحیح باشند. اگر ضرایب کسری وجود داشت با ضرب دو طرف محدودیت اصلی در کوچکترین مضرب مشترک مخرج های کسرها ی ضرایب می توان محدودیت با ضرایب عدد صحیح تشکیل داد.

گام های پیاده سازی الگوریتم

- 1- تبدیل ضرائب و مقادیر سمت راست محدودیت ها به عدد صحیح.
- 2- حل مسائل به کمک سیمپلکس :
 - اگر مقدار متغیرها صحیح باشد توقف می کنیم.
 - اگر مساله غیر موجه باشد جواب نداریم (بدون پاسخ).
 - در غیر اینصورت به گام بعدی میرویم.
- 3- انتخاب متغیر پایه با مقدار غیر صحیح و تعریف محدودیت برش گموری.
- 4- افزودن محدودیت برش به جدول نهایی سیمپلکس ← حل به کمک سیمپلکس ثانویه و رفتن به گام 3.

مثال :

$$\text{Min } Z = X_1 - 2X_2$$

S.t.

$$2X_1 + X_2 \leq 5$$

$$-4X_1 + 4X_2 \leq 5$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
Z	0	0	1/3	5/12	15/4
X_1	1	0	1/3	-1/12	1 1/4
X_2	0	1	1/3	1/6	2 1/2

چون مقدار کسری X_2 بیش تر از مقدار کسری X_1 است، X_2 برلی انشعاب انتخاب می شود.

$$-(\frac{1}{3}S_1 + \frac{1}{6}S_2) + S_{g1} = -\frac{1}{2}$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_{g1}	R.H.S
z	0	0	$1 \frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	0	$\frac{15}{4}$
S_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$1 \frac{1}{4}$
S_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$2 \frac{1}{2}$
S_{g1}	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	1	$-\frac{1}{2}$
z	0	0	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{13}{4}$
X_1	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{4}$
X_2	0	1	0	0	1	2
S_1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	-3	$\frac{3}{2}$

$$-(\frac{3}{4}S_2 + S_{g1}(0)) + S_{g2} = -\frac{3}{4}$$

$$-\frac{3}{4}S_2 + S_{g2} = -\frac{3}{4}$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_{g1}	S_{g2}	R.H.S
z	0	0	0	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{13}{4}$
X_1	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$
X_2	0	1	0	0	1	0	2
S_1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	-3	0	$\frac{3}{2}$
S_{g2}	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	0	1	$-\frac{3}{4}$

*پاسخ غير موجه بنابر اين با سيمپلكس ثانويه اصلاح مي كنيم.

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_{g1}	S_{g2}	R.H.S
z	0	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	3
X_1	1	0	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	1
X_2	0	1	0	0	1	0	2
S_1	0	0	1	0	-3	$\frac{2}{3}$	1
S_2	0	0	0	1	0	$-\frac{4}{3}$	1

$$Z^* = 3, x_1 = 1, x_2 = 2$$

نمایش ترسیمی برش گموری

ترسیم محدودیت های برش بر مبنای متغیرهای تصمیم (x_1, x_2)

برش ها براساس متغیرهای کمکی توسعه می یابند.

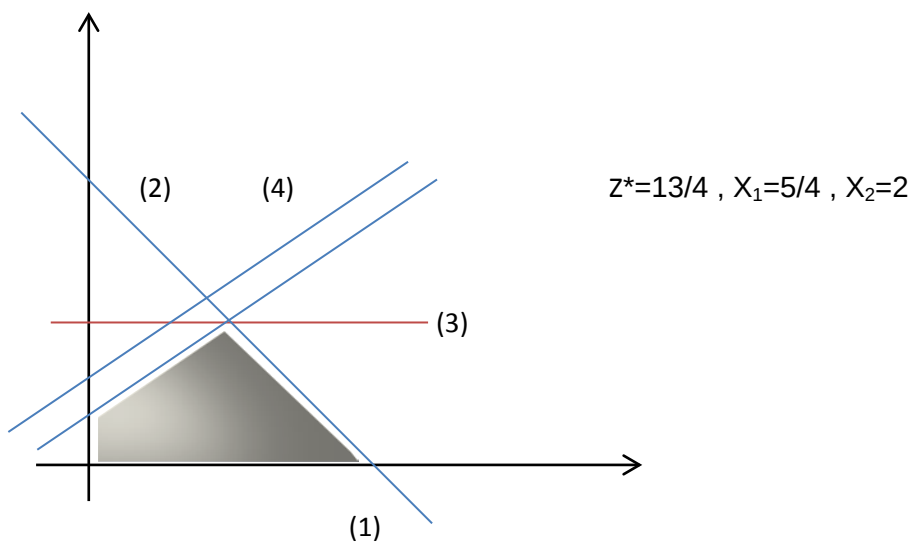
قراردادن مقادیر متغیرهای کمکی در محدودیت های برش

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 + S_1 = 5 & (1) \\ -4X_1 + 4X_2 + S_2 = 5 & (2) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} S_1 = 5 - 2X_1 - X_2 \\ S_2 = 5 + 4X_1 - 4X_2 \end{cases} \quad (a)$$

$$-1/3 S_1 - 1/6 S_2 \leq -1/2 \quad (b) \quad \text{از قبل داریم :}$$

$$(b) \text{ و } (a) \longrightarrow X_2 \leq 2 \quad (3) \quad \text{برش دوم :}$$

$$-3/4 S_2 \leq -3/4 \Rightarrow -3X_1 + 3X_2 \leq 3 \quad (4) \text{ برش دوم :}$$



تمرین / حل مسئله زیر به کمک روش گموری

$$\text{Min } Z = X_1 - 3X_2$$

S.t.

$$X_1 - X_2 \leq 2$$

$$2X_1 + 4X_2 \leq 15$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \text{ and Int}$$

الگوریتم برش همگی عدد صحیح

برش گفته شده قبل بر مبنای مفهوم ثانویه نهاده شده است. در آن برش، جواب های مسئله در هر جدول تا قبل از رسیدن به جواب نهایی دارای دارای مقادیری غیر عدد صحیح هستند و این وضعیت تا رسیدن به جواب بهینه ادامه می یابد. اگر الگوریتم به هر دلیل (شاید بخاطر محاسبات بیش از حد) متوقف شود، هیچ جواب موجه عدد صحیحی به دست نمی آید.

برای جلوگیری از این مشکل از الگوریتم برش اولیه ی تماماً عدد صحیح (primal all-integer cut) استفاده می شود. با انجام این برش جواب تمام تکرارها مقادیر عدد صحیح است. ضرورت انجام این برش نیز مستلزم عدد صحیح بودن ضرایب کلیه ی متغیرهای تصمیم و اعداد سمت راست در جدول ابتدایی است. اگر اعداد سمت راست را با b_i نشان داده شوند و x_k متغیر ورودی باشد، انگاه مانند روش سیمپلکس متغیر خروجی بر اساس رابطه ی زیر مشخص می شود:

$$\text{Min} \left\{ b_i / a_{ik} \right\} = b_r / a_{rk} \quad ; \quad i=1,2,\dots,m$$

اگر با توجه به اینکه $(a_{ik} \geq 1)$ ، $a_{rk} = 1$ ، از روش سیمپلکس معمولی استفاده می شود و اگر $a_{rk} > 1$ بود، برش زیر به مسئله اضافه می شود:

$$\sum \left[\frac{a_{rj}}{a_{rk}} \right] x_j + s_i = \left\lfloor \frac{b_r}{a_{rk}} \right\rfloor$$

x_j متغیر غیر اساسی s_i متغیر کمکی

گام های الگوریتم:

- 1- با جدول ابتدایی که همگی عدد صحیح هستند، شروع می کنیم.
 - 2- اگر جدول بهینه باشد توقف می کنیم، در غیر این صورت به گام 3 می رویم.
 - 3- متغیر غیر پایه ایی x_k به عنوان متغیر ورودی در نظر می گیریم. متغیر خروجی را تعیین می کنیم. اگر $a_{rk} = 1$ ، ادامه حل با روش سیمپلکس معمولی و اگر $a_{rk} > 1$ ، برش مربوطه اضافه می شود.
- اضافه کردن برش به جدول نهایی به گام 2 می رویم.

مثال :

$$\text{Max } Z = x_1 + 4x_2$$

S.t.

$$5x_1 + 7x_2 \leq 21$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

حل مسئله:

$$-X_1 + 3X_2 + S_2 = 8$$

← سطر منبع

اضافه کردیم

	X_1	$\downarrow X_2$	S_1	S_2	S_3	R.H.S
z	-1	-4	0	0	0	0
S_1	5	7	1	0	0	21
S_2	-1	1	0	1	0	8
S_3	-1	1	0	0	1	

$$-\frac{1}{3}x_1 + \frac{3}{3}x_2 + S_3 = \frac{8}{3}$$

معادله برش

اضافه کردیم

سطر منبع

	$\downarrow X_1$	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	R.H.S
z	-5	0	0	0	4	0	8
S_1	12	0	1	0	-7	0	7
S_2	2	0	0	1	-3	0	2
X_2	-1	1	0	0	1	0	2
S_4	1	0	0	0	-1	1	0

$$-\frac{12}{12}x_1 + \frac{-7}{12}S_3 + S_4 = \frac{7}{12}$$

← معادله برش

	X_1	X_2	S_1	S_2	$\downarrow S_3$	S_4	S_5	R.H.S
z	0	0	0	0	-1	5	0	8
S_1	0	0	1	0	5	-12	0	7
S_2	0	0	0	1	-1	-2	0	2
X_2	0	1	0	0	0	1	0	2
X_1	1	0	0	0	-1	1	0	0
S_5	0	0	0	0	1	-3	1	1

سطر منبع $s_1 + 5s_3 - 12s_4 = 7$

$$-\frac{1}{5}s_1 + \frac{5}{5}s_3 + \frac{-12}{5}s_4 = \frac{7}{5}$$

← معادله برش

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	R.H.S
z	0	0	0	0	0	2	1	9
S_1	0	0	1	0	0	3	-5	2
S_2	0	0	0	1	0	-5	1	3
X_2	0	1	0	0	0	1	0	2
X_1	1	0	0	0	0	-2	1	1
S_3	0	0	0	0	1	-4	1	1

الگوریتم به پایان رسید.

برنامه ریزی عدد صحیح مختلط

در بعضی از مسائل ممکن است با شرایطی مواجه شویم که چند متغیر از متغیرهای تصمیم عدد صحیح باشند، در نتیجه برای حل اینگونه مسائل از الگوریتم انشعاب و تحدید و صفحات برشی میتوانیم استفاده کنیم.

اگر متغیری شرط عدد صحیح بودن را نداشته باشد، برای آن انشعابی صورت نمی گیرد و انشعاب فقط روی متغیرهای عدد صحیح صورت می گیرد. گموری در سال 1960 موفق به ابداع راه حلی برای مسائلی با این شرایط شد که پایه ی این الگوریتم همان الگوریتم عدد صحیح محض است.

معادله ی زیر برای یک مسئله ی برنامه ریزی خطی با مقداری غیر عدد صحیح نوشته شده است:

$$x_i \geq 0, y_i \in \text{Int}$$

$$v_i = \{[b_i] + [b_i]\} - \sum a_{ij} w_j$$

$$v_i - [b_i] = [b_i] - \sum a_{ij} w_j$$

w_j می تواند مقادیر غیر صحیح داشته باشد و a_{ij} مقداری منفی یا مثبت اختیار کنند.

$$[b_i] + \{[b_i] - v_i\} \geq 0, \text{ یا } [b_i] + \{[b_i] - v_i\} < 0$$

$$\sum_j a_{ij} w_j \geq [b_i] \quad \left[\frac{[b_i]_F}{[b_i]_F - 1} \right] \sum a_{ij} w_j > [b_i]$$

بنابراین محدودیت گموری زیر بدست می آید:

$$\text{Sg} \left\{ \sum a_{ij} w_j + \left[\frac{[b_i]_F}{[b_i]_F - 1} \right] \sum a_{ij} w_j \right\} = -[b_i]_F$$

برنامه ریزی صفر و یک

وقتی متغیرهای تصمیم در یک مسئله ی برنامه ریزی خطی عدد صحیح، محدود به مقادیر صفر و یک باشند، مسئله ی برنامه ریزی صفر- یک نامیده می شود

یک مسئله ی برنامه ریزی صفر- یک را با بررسی تمام ترکیب های ممکن از متغیرهای تصمیم که بتوانند جوابی موجه ارائه کنند، میتوان حل کرد. این کار با صفر یا یک قرار دادن مقدار متغیرهای تصمیم صورت می پذیرد. در اینصورت، ترکیبی که در تمام محدودیت ها صدق کند و تابع هدف را به بهترین مقدار برساند، جواب بهینه است. این روش، روش شمارش صریح گفته می شود. با این حال، انجام این روش نیازمند بررسی 2^n ترکیب از n متغیر تصمیم است.

با افزایش تعداد متغیرها، جواب های ممکن مسئله به به سرعت افزایش می یابد و قرار دادن این جواب ها در محدودیت ها و تابع هدف برای رسیدن به جواب موجه و بهینه مستلزم صرف وقت زیادی است. بالاس در سال 1967 الگوریتم شمارش ضمنی را معرفی کرد که راه حلی برای کاهش جست و جو در میان جواب های ممکن مسئله است. این الگوریتم را الگوریتم جمعی نیز می نامند.

مثال :

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 2X_2 - 4X_3 + 5X_4 + 3X_5$$

S.t.

$$2X_1 + X_2 + 4X_3 + 10X_4 + 1/2X_5 \leq 6$$

$$\begin{matrix} 3 & 2 & x & 1/2 & 6 \\ & & & & Z \end{matrix} \text{ ارزش ها در } Z$$

$$\begin{matrix} \text{اول ارزش بالاتر} & X_5 = 1 & \text{دوم} & X_1 = 1 & \text{سوم} & X_2 = 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \text{Max } Z = 6 + 2 + 3 = 11$$

$$\text{Max } \sum_j C_{ij} X_j \quad C_j \leq 0$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} \sum a_{ij} X_j \leq b_i \\ X_j = \{0,1\} \end{cases} \quad Y_i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_j a_{ij} X_j \geq b_i \xrightarrow{*(-1)} - \sum_j a_{ij} X_j \leq -b_i$$

$$\sum_j a_{ij} X_j = b_i \Rightarrow \begin{cases} \sum a_{ij} X_j \geq b_i \\ \sum a_{ij} X_j \leq b_i \end{cases}$$

ضوابط شاخه زنی

1- هر متغیری که آزاد باشد و ضریب آن در تمامی محدودیت‌هایی که مقدار متغیر کمکی آن‌ها منفی است، همگی مثبت باشد، برای شاخه زنی انتخاب می‌شود.

2- متغیر آزاد X_j که ضریب آن در تابع هدف C_j باشد اگر در رابطه ذیل صدق کند برای انشعاب انتخاب نمی‌شود. $Z_i + C_j \leq Z$

3- از میان متغیرهای آزادی که پس از گام‌های 1 و 2 برای شاخه زنی باقی می‌مانند، متغیری که برای آن مقدار قدر مطلق رابطه زیر کمتر باشد، انتخاب می‌شود.

$$V_j = \sum_{i=1} \min\{0, S_i - a_{ij}\}$$

S_i متغیر کمکی

a_{ij} متغیری با ضریب منفی

ضوابط به عمق رسیدن گره

1. مقدار تابع هدف از Z_i کمتر شود.

2. نرسیدن به جواب موجه $| -S_i | < | \text{مجموع ضرایب فنی متغیرهای آزاد} |$

3. عدم وجود متغیر آزاد

4. رسیدن به جواب موجه

مثال :

$$\text{Max } Z = -8X_1 + -2X_2 - 4X_3 - 7X_4 - 5X_5$$

S.t.

$$3X_1 + 3X_2 - X_3 - 2X_4 - 3X_5 \geq 2$$

$$5X_1 + 3X_2 + 2X_3 + X_4 - X_5 \geq 4$$

$$X_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2, \dots, 5$$

حل مسئله:

$$-3X_1 - 3X_2 + X_3 + 2X_4 + 3X_5 + S_1 \geq 2$$

$$-5X_1 - 3X_2 - 2X_3 - X_4 + X_5 + S_2 \geq 4$$

X_5 را صفر در نظر می‌گیریم زیرا در هر دو قید مثبت و هم علامت S_1, S_2 می‌باشد.

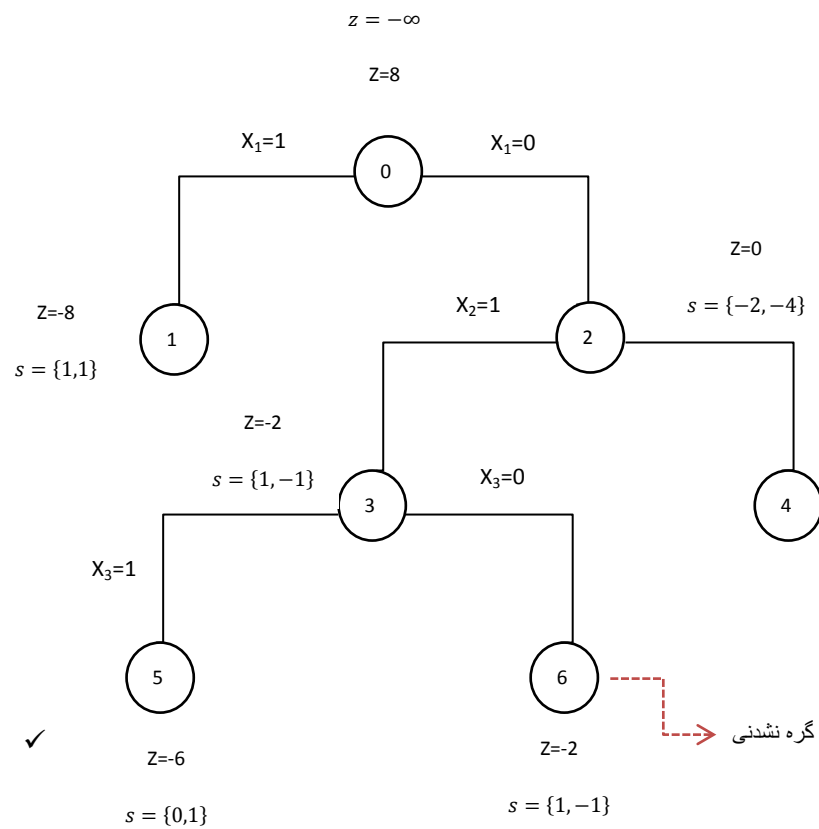
$$V_1 = \min\{0, -2 + 3\} + \min\{0, -4 + 5\} = 0 \quad |0|$$

$$V_2 = \min\{0, -2 + 3\} + \min\{0, -4 + 3\} = -1 \quad |-1|$$

$$V_3 = \min\{0, -2 - 1\} + \min\{0, -4 + 2\} = -3 \quad |-3|$$

$$V_4 = \min\{0, -2 - 2\} + \min\{0, -4 + 1\} = -4 \quad |-4|$$

توجه به اندازه ها V_1 قابل قبول است.



برای گره ی دوم

$$Z_2 + C_2 \leq Z_l \rightarrow 0-2 \leq -8$$

$$Z_3 + C_3 \leq Z_l \rightarrow 0-3 \leq -8$$

$$Z_4 + C_4 \leq Z_l \rightarrow 0-4 \leq -8$$

$$V_2=-1, V_3=-3, V_4=-4$$

تمرین 1 / با استفاده از روش انشعاب و تحدید مساله برنامه ریزی عدد صحیح زیر را بصورت ترسیمی رسم کنید.

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 3X_2$$

S.t.

$$X_1 + 3X_2 \geq 5$$

$$2X_1 + X_2 \geq 6$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \text{ and Int}$$

تمرین 2 / با استفاده از روش انشعاب و تحدید مساله برنامه ریزی عدد صحیح زیر را حل نماید .

$$\text{Max } Z = 3X_1 + X_2 + 3X_3$$

S.t.

$$2X_1 + X_2 + X_3 \leq 2$$

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 5$$

$$2X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 6$$

$$x_i \in \text{Int} \quad i: 1, 2, 3$$

مثال:

$$\text{Max } Z = 7X_1 + 9X_2$$

S.t.

$$-X_1 + 3X_2 \leq 6$$

$$7X_1 + X_2 \leq 35$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \quad X_i \in \text{Int}$$

حل:

	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
z	0	0	28/11	15/11	63
X_2	0	1	7/22	1/22	7/2
X_1	1	0	-1/22	3/22	9/2

$$Sg_1 - (\frac{3}{22}S_2 + \frac{1}{22}(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}})S_1) = -\frac{1}{2}$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	Sg_1	R.H.S
z	0	0	28/11	15/11		63
X_2	1	0	7/22	1/22	0	7/2
X_1	0	1	-1/22	3/22	0	9/2
Sg_1	0	0	-1/22	-3/22	1	-1/2

	X_1	X_2	S_1	S_2	Sg	R.H.S
z	0	0	23/6	0	10	58
X_2	0	1	10/3	0	1/3	7/2
X_1	1	0	-1/11	0	1	9/2
Sg	0	0	1/3	1	-22/3	-1/2

مثال:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 8X_2$$

S.t.

$$2X_1 - 6X_2 \leq 3$$

$$-X_1 + 4X_2 \leq 5$$

$$2X_1 + 2X_2 \geq 13$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \quad X_i \in \text{Int}$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sg_1	R.H.S
z	0	0	0	6/5	8/5	0	134/5
S_1	0	0	1	8/5	-1/5	0	42/5
X_2	0	1	0	1/5	1/10	0	23/10
X_1	1	0	0	1/5	2/5	0	21/5
Sg_1	0	0	0	-1/20	-2/5	1	-1/5

معادله برش

$$sg_1 - (\frac{2}{5}S_3 + (-\frac{1}{4})(-\frac{1}{5})S_2) = -\frac{1}{2}$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sg_1	R.H.S
z	0	0	0	1	4	0	26
S_1	0	0	1	13/8	0	-1/2	17/2
X_2	0	1	0	3/16	0	1/4	9/2
X_1	1	0	0	-1/4	0	1	4
S_3	0	0	0	1/8	1	-5/2	1/2

ادامه مبحث برنامه ریزی صفر و یک

$$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n \leq b$$

- مدل سازی صفر و یک :

$$x_1+x_2+\dots+x_n=1$$

- انتخاب یک متغیر:

$$a_1x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \leq b_1+My_1$$

- انتخاب یک محدودیت :

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \leq b_2+My_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \leq b_m+My_m$$

$$\begin{aligned} * \quad y_1+y_2+\dots+y_m &= m-1 \\ \begin{cases} y \in \{0,1\} \\ M = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

اگر انتخاب k محدودیت از m تا را داشته باشیم، به جای محدودیت * داریم:

$$y_1+y_2+\dots+y_m=m-k$$

مثال / فردی قصد دارد از میان سه روش سرمایه گذاری یکی را انتخاب نماید. جدول زیر مقادیر نرخ بازده هر یک از سرمایه گذاری ها را نشان می دهد.

نرخ بازده	پروژه
7%	x_1
11%	x_2
9%	x_3

حالات سرمایه گذاری :

1. مجموع سرمایه گذاری در پروژه اول و دوم نباید از 40 درصد مجموع سرمایه گذاری بیش تر باشد.

2. مقدار سرمایه گذاری در پروژه سوم نباید از نصف مجموع سرمایه گذاری بیش تر باشد.

3. حداقل نصف سرمایه گذاری مربوط به پروژه اول و سوم باشد.

$$\text{Max } Z = .07x_1 + .11x_2 + .09x_3$$

$$C_1: x_1+x_2 \leq .4(x_1+x_2+x_3)+My_1$$

$$C_2: x_3 \leq .5(x_1+x_2+x_3)+My_2$$

$$C_3: x_1+x_3 \geq .5(x_1+x_2+x_3)-My_3$$

$$C_4: x_1+x_2+x_3 \leq 1$$

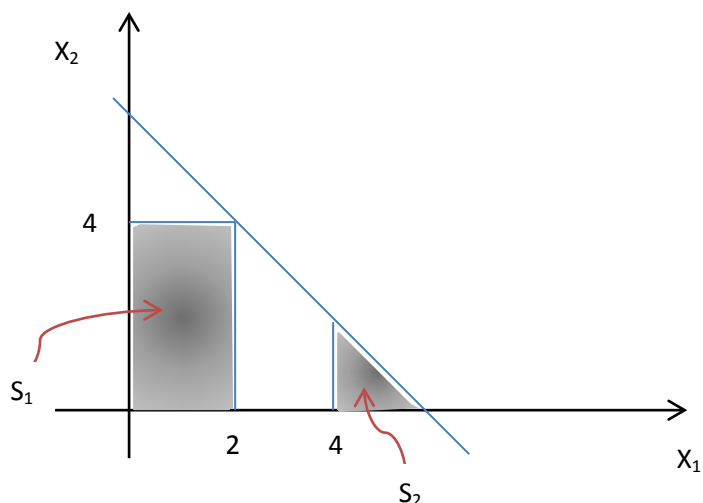
$$C_5: x_i \geq 0$$

$$C_6: y_1+y_2+y_3=2$$

$$C_7: y_i \in \{0,1\} \quad \forall i = 1,2$$

مثال/اگر فضای جواب به دو بخش تقسیم شود با استفاده از برنامه ریزی صفر و یک داریم :

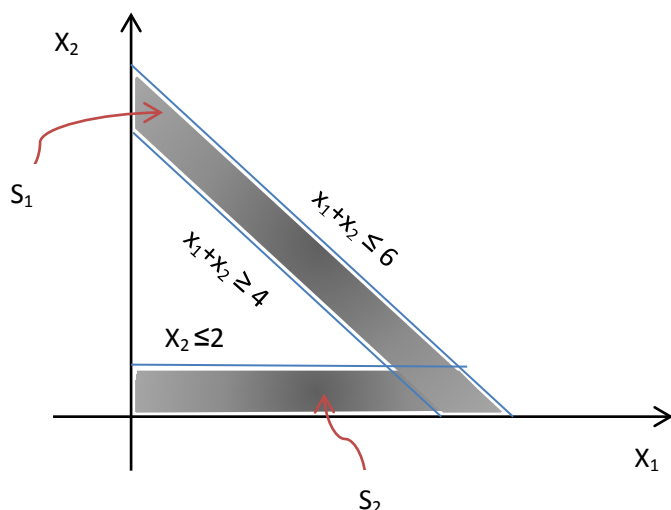
(انتخاب یکی از دو فضای جواب)



$$s1 \begin{cases} x_2 \leq 4 + My \\ x_1 \leq 2 + My \end{cases}$$

$$s2 \begin{cases} x_1 \geq 4 - M(1 - y) \\ x_1 + x_2 \leq 6 + M(1 - y) \end{cases}$$

$$y \in \{0,1\} : x_1, x_2 > 0$$



$$s1 \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 + My \\ x_1 + x_2 \geq 4 - My \end{cases}$$

$$s2 \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 + M(1 - y) \\ x_2 \leq 2 + M(1 - y) \end{cases}$$

$$y \in \{0,1\} : x_1, x_2 > 0$$

تحلیل شبکه

تعاریف و مفاهیم

شبکه یا گراف خطی: شبکه یا گراف خطی شامل تعدادی گره (Nodes) یا نقاط اتصال است که برخی یا تمام آنها با شاخه ها (branches) یا کمان هایی به هم وصل شده اند.

شاخه ی جهت دار (directed branch): اگر جریان در شاخه فقط در یک جهت مجاز باشد (مانند خیابان یکطرفه)، به آن شاخه ی بدون جهت دار می گویند.

شاخه ی بدون جهت (undirected branch): اگر جریان در شاخه در هر دو جهت مجاز باشد (مانند خیابان دوطرفه) به آن شاخه ی بدون جهت گویند.

شاخه ی پسرو: هر شاخه ای که وارد گره i شود.

شاخه ی پیشرو: هر شاخه ای که از گره i خارج شود.

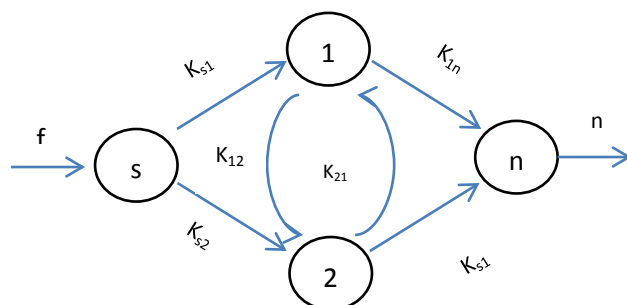
مسیر (Path): هر مسیر متشکل از یک سری شاخه هایی است که از گره مبدا آغاز می شود و به گره مقصد منتهی می شود.

تذکر: حداکثر جریان در هر مسیر از شبکه مربوط به مسیری است که کمترین ظرفیت ارسالی را دارد.

حلقه (Cycle): مسیری که دارای گره آغازین و گره پایانی یکسانی است.

برش (Cut): عبارت است از دیواره ی مجزا کننده ی شبکه به دو زیر بخش S و $\bar{S}$. به طوریکه بخش S شامل مبدا باشد و بخش $\bar{S}$ شامل گره مقصد باشد.

ظرفیت برش (Capacity of Cut): ظرفیت یک برش را با $k(s, \bar{S})$ نشان داده که برابر است با مجموع ظرفیت های شاخه های متصل شده از گره های S به گره های $\bar{S}$.



- منبع (گره ورودی)
- گره خروجی (چاه)
- f_{ij} : مقدار جریان بین گره i و j
- k_{ij} : ظرفیت انتقال در گره

$$\text{Max } f$$

$$\text{s.t. : } f_{s1} + f_{s2} = f$$

$$f_{s1} + f_{21} = f_{12} + f_{1n}$$

$$f_{s2} + f_{12} = f_{21} + f_{2n}$$

$$f_{1n} + f_{2n} = f$$

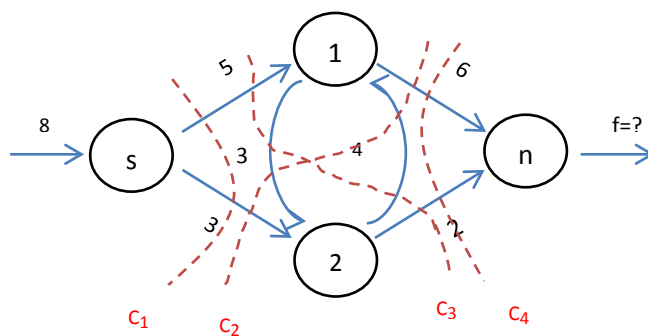
$$0 \leq f_{s1} \leq k_{s1} \quad , \quad 0 \leq f_{s2} \leq k_{s2} \quad , \quad 0 \leq f_{12} \leq k_{12} \quad , \quad 0 \leq f_{21} \leq k_{21} \quad , \quad 0 \leq f_{1n} \leq k_{n1} \quad , \quad 0 \leq f_{2n} \leq k_{2n}$$

روش برش – قضیه ی حداکثر جریان، حداقل برش

حداکثر جریان در هر شبکه معادل با ظرفیت ((حداقل برش)) است. با توجه به قضیه و تعاریف فوق، حداکثر جریان را می توان در شبکه پیدا کرد. شبکه مورد نظر را به کمک مجموعه ایی از برش ها به بخش های مختلف تفکیک می کنیم. اما برای برش باید همواره به این نکته توجه شود که گره مبدا در یک سمت برش و گره خروجی در سمت دیگر برش قرار می گیرد.

سپس مجموع ظرفیت های یال هایی که دارای جریان از گره مبدا به سمت گره مقصد می باشند را محاسبه می کنیم. در نهایت حداکثر ظرفیت شبکه برابر است با حداقل مجموع ظرفیت ها.

مثال /



$$C_1: 5+3=8$$

$$C_2: 6+3+3=12$$

$$C_3: 4+5+2=11$$

$$C_4: 6+2=8$$

$$\min\{c_1, c_2, c_3, c_4\} = 8$$

الگوریتم حداکثر جریان

اساس این الگوریتم این است که باید مسیری را پیدا نمود که بتوان در آن جریان مثبتی را از گره مبدا به گره مقصد ارسال داشت.

به این مسیر، مسیر جریان افزایشده می گویند. از این مسیر برای ارسال بیشترین مقدار جریان ممکنه از S به T استفاده می شود و در روش تا جایی تکرار می شود که چنین مسیر جریان افزایشده ای پیدا نشود. در صورت وقوع این حالت، حداکثر جریان شبکه بدست آمده است. با توجه به مطالب فوق حداکثر جریان در مسیر با توجه به نکات زیر تعیین می شود:

1- جریان خروجی از یک گره با جریان ورودی به آن گره مساوی است.

2- حداکثر میزان جریانی که در یک مسیر می توان از گره مبدا به گره مقصد ارسال کرد با شاخه ای که کمترین ظرفیت ارسال در این مسیر را دارد برابر است.

در ضمن هنگامی که به شاخه ای خاص جریانی اختصاص داده می شود، باید:

1- ظرفیت در جهت جریان تخصیص داده شده به همان میزان جریان کاهش یابد.

2- ظرفیت در جهت مخالف جریان به همان میزان جریان افزایش یابد.

الگوریتم زیر گام های لازم برای حل مسئله ی حداکثر جریان را ارائه می کند:

1- مسیری را از مبدا به مقصد پیدا کنید که همراه با یک جریان مثبت است. اگر چنین مسیری پیدا نشد به گام پنجم بروید.

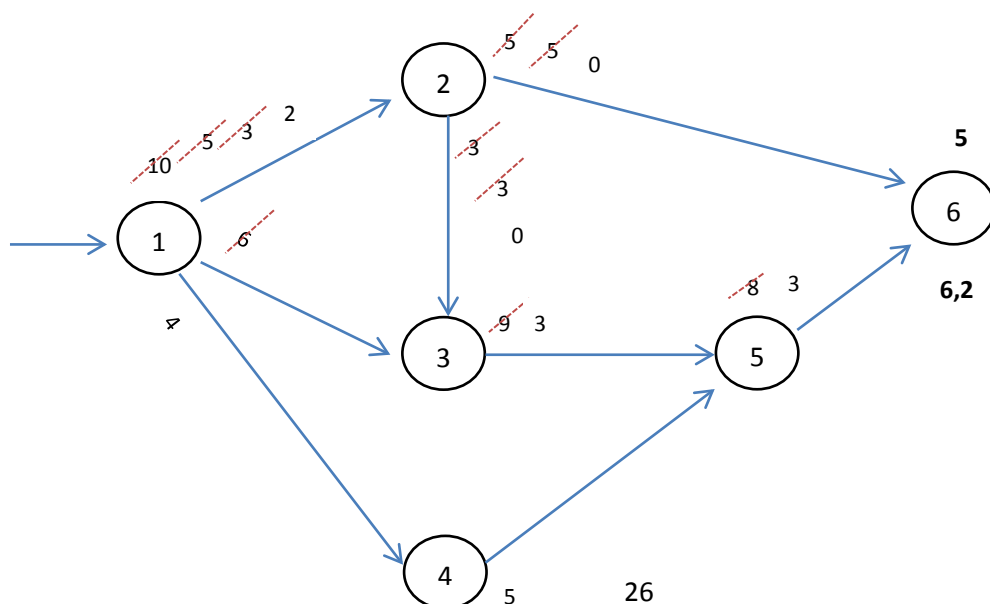
2- حداکثر جریانی را که می توان از طریق این مسیر ارسال کرد، تعیین کنید و آن را با C^* نشان دهید.

3- مقدار C^* را از مقدار ارسالی از هر گره کم و به مقدار دریافتی توسط هر گره اضافه کنید.

4- به گام اول بروید.

5- حداکثر جریان عبارت است از میزان ارسالی به مقصد.

مثال /



ظرفیت

مسیرها از گره 1 به 6

5

1-2-6

3

1-2-3-5-6

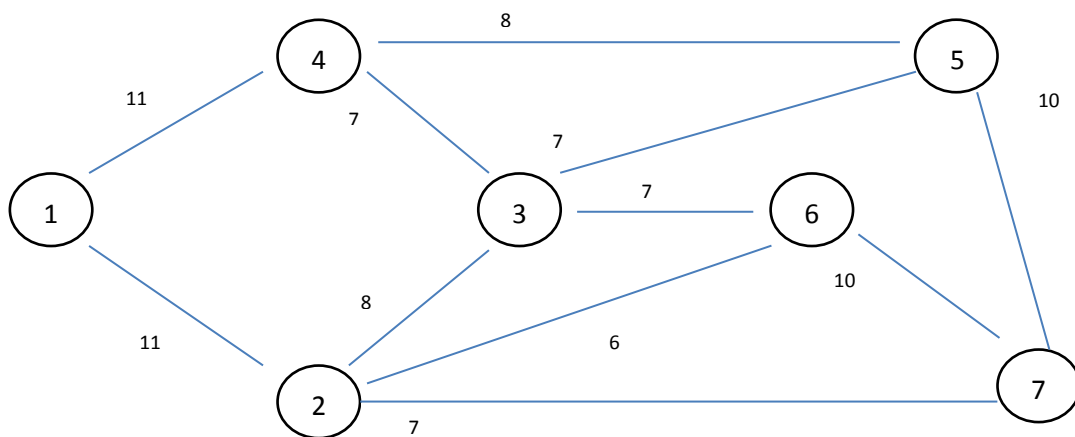
5

1-3-5-6

13

مجموع

مثال /



ظرفیت

مسیر

8

1-4-5-7

2

1-4-3-5-7

1

1-4-3-6-7

6

1-2-3-6-7

3

1-2-6-7

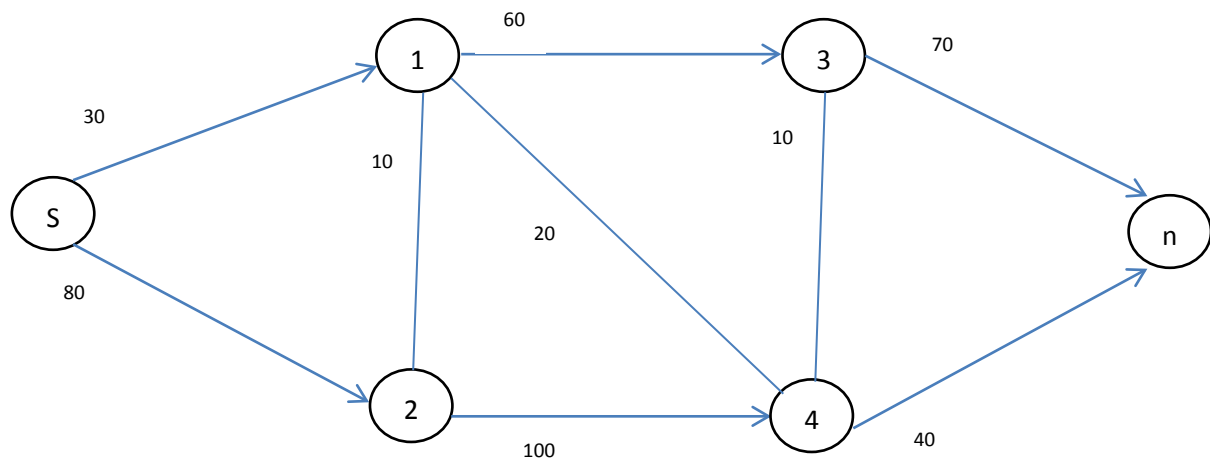
2

1-2-7

22

مجموع

تمرین/شبکه خیابان زیر را در نظر بگیرید. ارقام موجود در کنار شاخه ها معرف ظرفیت های جریان ترافیک می باشد. علائم یکطرفه را در خیابان های بدون جهت چگونه انتخاب کنیم تا حجم ترافیک از نقطه ی S به n بیشینه گردد؟

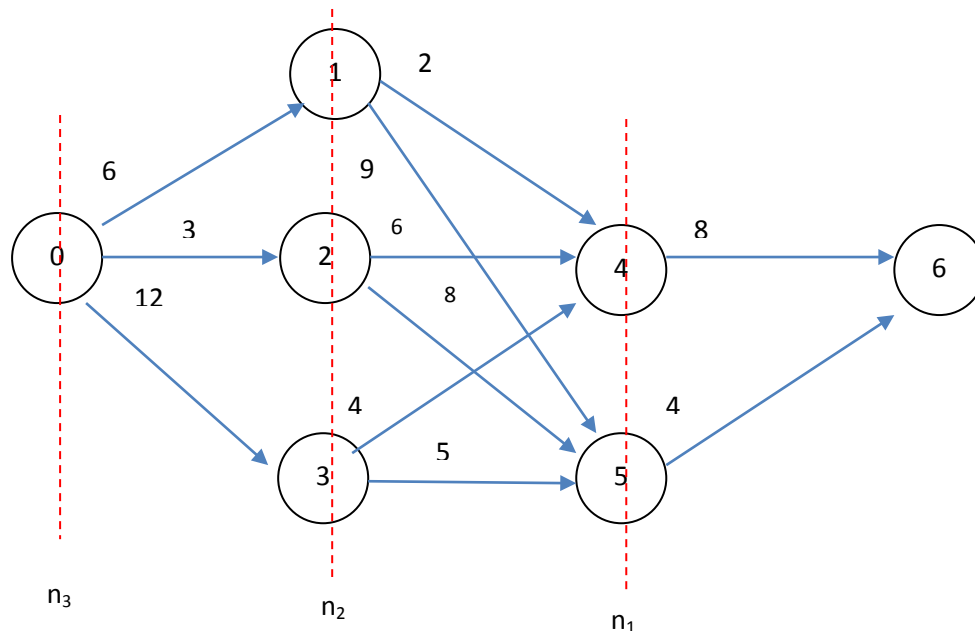


برنامه ریزی پویا

در بسیاری از مسائل، که در آنها رشته ای از تصمیم های مرتبط با یکدیگر مطرح باشد، غالباً از برنامه ریزی پویا که ماهیتاً روش ریاضی است استفاده می شود. این برنامه ریزی با به کارگیری فرایندی نظام گرا ترکیبی از تصمیم های متوالی را تعیین میکند که به حداکثر شدن کارائی کلی منتهی شود.

بر خلاف برنامه ریزی خطی، چارچوب استاندارد برای فورموله کردن مسائل برنامه ریزی پویا وجود ندارد. در واقع، آنچه برنامه ریزی پویا انجام می دهد ارائه ی روش برخورد کلی، جهت حل این نوع مسائل است. در هر مورد، باید معادلات و روابط ریاضی مخصوصی که با شرایط آن مسئله تطبیق نماید نوشته شود. از این رو، برای آنکه بتوان تشخیص داد که آیا اصولاً می توان مسئله ای را با برنامه ریزی پویا حل کرد و اگر می شود راه حل آن چگونه است، ضرورت دارد ساختار کلی مسائل برنامه ریزی پویا شناخته شود و علاوه بر آن، به خلاقیت نیز تا حدی احتیاج است. آشنایی با انواع کاربردهای برنامه ریزی پویا و بررسی ویژگی های مشترک آنها، احتمالاً می توان به رشد چنین توانایی هایی کمک کند. برای نیل به این مقصود چندین مثال تشریحی در این بخش ارائه می گردد.

مثال /



$s \backslash K$	6	f	K^*
4	8	8	
5	4	4	5

$k \backslash$	1	2	3	f^*	K^*
0	6+10	3+10	12+9	13	2

$k \backslash$	4	5	f^*	K^*
1	2+8	9+4	10	4
2	8+8	6+4	10	5
3	4+8	5+4	9	5

مسیر بهینه: 0_2_5_6

مسافت بهینه: 13

مثال /

کل سرمایه موجود: 6

گزینه های موجود برای سرمایه گذاری: بانک (1) بورس (2) ارز و سکه (3)

گزینه برای سرمایه گذاری	بانک	بورس	ارز و سکه
1	1	1	1
2	1.4	1.8	1.3
3	1.6	2.2	1.5
4	1.7	2.3	1.9
5	2	2.4	2.4
6	2.1	2.5	2.5

حل مساله /

ابتدا به دلخواه یکی از سه گزینه موجود برای سرمایه گذاری را انتخاب می کنیم.

n_1 ارز و سکه /

s	f	K^*
0	0	0
1	1	1
2	1.3	1.3
3	1.5	1.5
4	1.8	1.8
5	2.4	2.4
6	2.5	2.5

بورس /

S	0	1	2	3	4	5	6	f*
0	0							
1	1	1						1
2	1.8	1+1	1.3					2
3	2.2	1+1.3	1+1.3	1.5				2.3
4	2.3	1+1.5	1.8+1.3	1+1.5	1.9			3.1
5	2.4	1+1.9	2.2+1.3	1.8+1.5	1.9+1	2.4		3.5
6	2.5	1+2.4	2.3+1.3	2.2+1.5	1.9+1.8	2.4+1	2.5	3.7

بانک /

k	0	1	2	3	4	5	6	f*
6	2.1	2+1	1.7+2	1.6+2.3	1.4+3.1	1+3.5	3.7	4.5

طریقه بهینه سرمایه گذاری :

بانک	بورس	ارز وسکه
2	2	2
1	3	2

مسئله ی کوله پشتی

یکی از مسائل معروف مسئله ی کوله پشتی (Knapsack problem) است. این مسئله در ارتباط با حمل کالا یا بار توسط اتومبیل، هواپیما، کشتی یا افراد است. اقلام مورد حمل در این مسئله، کالاهایی غیر قابل تقسیم، متفاوت و با وزن و ارزشی متفاوت است. در صورتی که هدف حمل n نوع کالا با وزن های $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ و ارزش $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ توسط وسیله ای به ظرفیت C باشد، مدل زیر انتخاب ترکیب مناسبی از بار ارزش ترین محموله ها را با توجه به ظرفیت وسیله ی نقلیه نشان می دهد.

$$\begin{aligned} \text{MAX } Z &= C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n \\ \text{s. t } \quad &a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq C \\ &x_j = 0 \text{ یا } (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

در مدل فوق x_j تصمیم گیری در مورد حمل یا عدم حمل محموله ی j ام را به عهده دارد، $x_j=1$ به معنی حمل محموله ی j ام و $x_j=0$ به معنی عدم حمل آن محموله است.

مثال /

یک کارخانه میتواند کالا های A و B و C را به تعداد مختلف تولید کند. هر محصول احتیاج به دو نوع مواد خام x و y دارد که فقط از هر کدام 4 تن در دسترس است. مقداری از x و y که برای تولید 1 و 2 و 3 قلم از محصولات فوق مورد نیاز است در جدول زیر دته شده است .

نوع محصول

C		B		A		مقدار تولید
y	x	y	x	y	x	
1	1	2	1	2	1	1
2	1	3	2	2	2	2
3	2	4	2	3	3	3

درآمد حاصل از تولید 1 و 2 و 3 واحد از محصولات در جدول زیر داده شده است :

نوع محصول

مقدار تولید	A	B	C
1	10	6	5
2	17	12	8
3	19	17	11

میزان تولید هر محصول به طوری که درآمد کل ماکزیمم گردد، چقدر است ؟

حل /

محصول C :

مراحل	x	y	اقدام بهینه	میزان عایدی
1	1	1	1	5
	1	2	2	8
	1	3	2	8
	1	4	2	8
	2	1		5
	2	2		11
	2	3		11
	2	4		5

محصول B :

مراحل	x	y	اقدام بهینه	میزان عایدی
2	1	1	0	5
	1	2	1	6
	1	3	0	8
	1	4	0	8
	2	1	0	5
	2	2	0	8
	2	3	2	12
	2	4	3	17
	3	1	0	5
	3	2	0	8
	3	3	2	12
	3	4	3	17
	4	1	0	5
	4	2	0	8
	4	3	2	12
	4	4	3	17

محصول A :

مرحله	$K=3$	$K=2$	$K=1$	$K=0$
3	24	25	18	17

محصول :
 تعداد :
 عایدی :

A B C

2 0 2

25

برنامه ریزی آرمانی

یکی از روش های تصمیم گیری با اهداف چندگانه، برنامه ریزی آرمانی است که اول بار در دهه ی 1960 میلادی چارنس (Charnes) و کوپر (Cooper) ایگنیزو ابداع کرده و آن را (Ignizio) و لی (Lee) آن را توسعه دادند. همان طور که از نام آن پیداست، در برنامه ریزی آرمانی تصمیم گیرنده برای هر هدف یک آرمان تعیین می کند. به منظور ایجاد درکی روشن تر از مفاهیم برنامه ریزی آرمانی، آشنایی با واژه های زیر ضرورت دارد.

هدف. هدف عبارات و روابطی ریاضی است که منعکس کننده ی خواسته های تصمیم گیرنده است. این خواسته ممکن است حداکثر سود و یا حداقل کردن هزینه باشد.

سطح تمایل. سطح تمایل عبارت است از ارزش تعیین شده که تصمیم گیرنده در پی کسب آن برای هدف مورد نظر است.

آرمان. هدف مرتبط با هر سطح تمایل را آرمان می نامند. مثلاً آرزوی کسب سودی حداقل معادل X ریال و یا کاهش هزینه ای معادل Y ریال آرمان نامیده می شود. به این ترتیب حداکثر سود هدف، است، اما با کسب سودی معادل 1000 واحد، آرمان است که سطح تمایل تصمیم گیرنده را برای بدست آوردن میزان مشخصی از سود بیان می دارد.

متغیرهای انحراف از آرمان. دست یابی به سطح تمایل تعیین شده در هدف، وابسته به امکانات، منابع و محدودیت هایی است و در عمل ممکن است تصمیم گیرنده به سطح تمایل تعیین شده دست یابد یا نیابد. در بسیاری از موارد ممکن است بین آرزوها، تمایلات و خواسته های تصمیم گیرنده و آنچه در عمل به آن دست میابد، تفاوت و اختلاف وجود داشته باشد. این میزان تفاوت را در برنامه ریزی آرمانی با متغیری بنام انحراف از آرمان اندازه گیری می کنند. به عبارت دیگر تفاوت بین مکتسبات و خواسته ها را انحراف از آرمان می نامند. مثلاً، در صورتیکه کسب سودی معادل 1000 واحد آرمان شرکت تولیدی بوده و در عمل سود این شرکت 800 واحد گردد، میزان متغیر انحراف از آرمان که با d نشان داده می شود، برابر 200 است و اگر سود شرکت 1000 واحد باشد میزان انحراف از آرمان برابر صفر بوده و شرکت کاملاً به آرمان کسب سود خود دست یافته است. سطح دستیابی ممکن است بیش تر یا کم تر از آرمان تعیین شده باشد. در صورتیکه سود کسب شده 800 واحد باشد میزان انحراف از آرمان برابر 200 است. این انحراف را با حالتی که مقدار سود 1200 می شود و انحراف آن نیز 200 است نباید اشتباه کرد. به منظور تفکیک این دو حالت از هم، میزان فزونی از آرمان را با d^+ و میزان عدم دستیابی به آرمان را با d^- نشان می دهند. مثلاً $d^+ = 300$ به معنای دستیابی به سودی معادل 1300 و $d^- = 150$ بیانگر کسب سودی معادل 850 است. d^+ و d^- را به ترتیب متغیرهای انحراف منفی و مثبت از آرمان می نامند.

مثال / یک شرکت تبلیغاتی در حال تهیه ی برنامه ی تبلیغاتی برای شرکت خودرو فروشی الفا است، شرکت آلفا دارای سه هدف زیر می باشد:

1- حداقل 40 میلیون نفر از آقایان با درآمد بالا برنامه تبلیغاتی را تماشا کنند.

2- حداقل 60 میلیون نفر از آقایان با درآمد پایین برنامه را تماشا می کنند.

3- حداقل 35 میلیون نفر از خانم ها درآمد بالا برنامه را تماشا کنند.

این شرکت تبلیغاتی دو نوع تبلیغ، یکی برای نمایش در تلویزیون به هنگام مسابقات ورزشی و یکی برای نمایش به هنگام فیلم سینمایی می تواند تهیه کند. هزینه ی تبلیغاتی و تعداد تماشاچیان بالقوه برای یک آگهی یک دقیقه ای در جدول داده شده است.

سوال در مورد خرید تعداد آگهی های تبلیغاتی برای زمان مسابقات ورزشی و برای زمان فیلم سینمایی است.

هزینه	هزینه و تعداد بینندگان			
	HIW	LIP	HIM	
100000000	5	10	7	به هنگام مسابقات ورزشی (1)
60000000	4	5	3	به هنگام پخش فیلم سینمایی (2)

ضمناً فرض می گردد که هر بار تعداد تماشاچیان یک میلیون نفر کمتر از هدف تعیین شده باشد، برای HIM شرکت الف 200000 واحد پولی متضرر خواهد شد. این مسئله برای LIP 100000 و برای HIM 50000 در نظر گرفته شده است.

در صورتیکه حداکثر هزینه مجاز برای برنامه تبلیغاتی 600000 واحد پولی باشد. مسئله را برای کمینه سازی انحراف از آرمان ها فرموله نمایید و جواب بهینه را پیدا کنید.

حل مسئله /

$$\text{Min } 200 d_1^- + 100 d_1^- + 50 d_3^-$$

s.t :

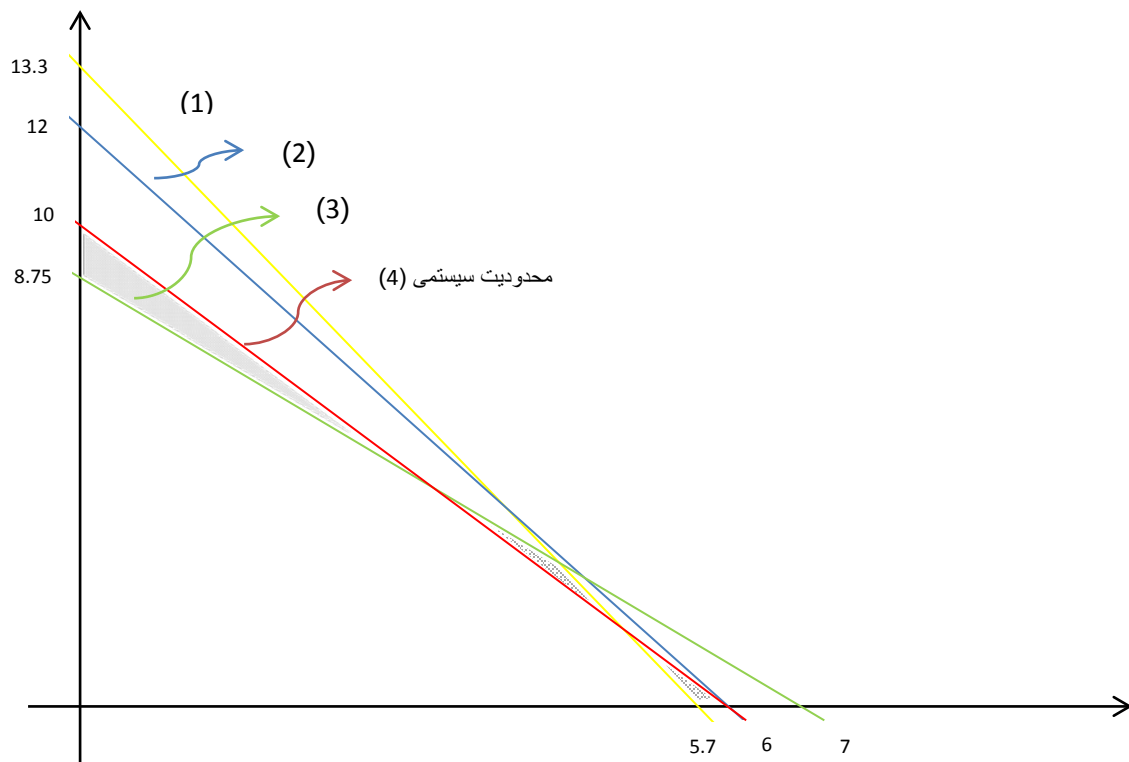
$$7x_1 + 3x_2 - d_1^+ + d_1^- = 40 \quad (1)$$

$$10x_1 + 5x_2 - d_2^+ + d_2^- = 60 \quad (2)$$

$$5x_1 + 4x_2 - d_3^+ + d_3^- = 35 \quad (3)$$

$$100x_1 + 60x_2 \leq 100 \quad (4)$$

$$x_2, d_2 \geq 0$$



در محدودیت اول /

$$7(6)+3(0)+d_1^--d_1^+=40 \longrightarrow \begin{cases} d_1^-=0 \\ d_1^+=2 \end{cases}$$

در محدودیت دوم /

$$10(6)+5(0)+d_2^--d_2^+=60 \longrightarrow \begin{cases} d_2^-=0 \\ d_2^+=0 \end{cases}$$

در محدودیت سوم /

$$5(6)+4(0)+d_3^--d_3^+=60 \longrightarrow \begin{cases} d_3^-=5 \\ d_3^+=0 \end{cases}$$

$$Z=200(0)+100(0)+50(5)=250$$

روش سیمپلکس برنامه ریزی آرمانی

از این روش در حل مسائل برنامه ریزی آرمانی با n متغیر استفاده می شود و با وجود شباهت های زیاد با روش سیمپلکس معمولی تفاوت هایی نیز با آن دارد. اولین تفاوت عمده ی آن استفاده از چندین سطر در جدول سیمپلکس برنامه ریزی آرمانی برای تابع هدف است، به طوریکه به ازای هر اولویت یک سطر در نظر گرفته می شود. دومین تفاوت آن در انتخاب متغیر ورودی است که با این موضوع در گام های لازم برای حل هر مساله برنامه ریزی آرمانی که در ادامه معرفی می شوند، آشنا می شوید.

گام 1. تنظیم مساله. مانند روش سیمپلکس معمولی تابع هدف را به Max تبدیل و متغیرهای سمت راست را در تابع هدف مساله ی برنامه ریزی آرمانی به سمت چپ تساوی منتقل کنید. با استفاده از متغیرهای کمکی محدودیت های به صورت نامعادله را به معادله تبدیل کنید.

گام 2. وارد کردن مساله به جدول. به ازای هر اولویت در مساله، یک سطر در جدول سیمپلکس برنامه ریزی آرمانی در نظر بگیرید و آن را با $(Z_1, Z_2, \dots, Z_p)$ نشان دهید. آنگاه تابع هدف و محدودیت ها و معادلات آرمان را وارد جدول کنید. متغیرهای اساسی مربوط به محدودیت هایی که دارای متغیرهای انحراف از آرمان هستند d_p^- اند. برای سایر محدودیت های مساله، متغیرهای اساسی مانند روش سیمپلکس معمولی تعیین می شوند.

گام 3. یکه کردن بردارهای متغیرهای اساسی.

گام 4. انتخاب متغیر ورودی. در سطرهای تابع هدف در جدول، سطر ی را مشخص کنید که دارای بالاترین اولویت است. متغیری را که در آن سطر دارای منفی ترین ضریب می باشد متغیر ورودی انتخاب کنید. ستون زیر آن را در سطرهای مربوط به محدودیت های جدول، ستون لولا بنامید.

اگر در صدد انتخاب متغیر ورودی برای آرمان های با اولویت بعدی هستید در صورتی در سطر مربوط به آن اولویت می توانید متغیری با منفی ترین ضریب را انتخاب کنید که ضریب این متغیر در سطرهای با اولویت بالاتر صفر باشد و در غیر اینصورت مجاز به انتخاب این متغیر برای ورود نیستید ولی می توانید در همان سطح (در صورت وجود) متغیر دیگری را انتخاب کنید که دارای ضریب منفی کوچکتری بوده اما ضریب آن در سطرهای با اولویت بالاتر صفر است. اگر چنین متغیری وجود نداشت یا ضریب تمامی متغیرهای آن سطر غیر مثبت بودند، توقف کنید. به جدول نهایی رسیده اید.

گام 5. انتخاب متغیر خروجی. مانند روش سیمپلکس معمولی، اعداد سمت راست محدودیت ها را بر اعداد مثبت ستون لولا تقسیم و کوچکترین نسبت حاصل را انتخاب کنید. سطر مربوط به آن را سطر لولا بنامید. متغیر اساسی مربوط به آن سطر متغیر خروجی است.

گام 6. مانند روش سیمپلکس معمولی عملیات لازم را برای بدست آوردن جدول بعد انجام دهید و به گام 4 بروید.

برنامه ریزی غیر خطی

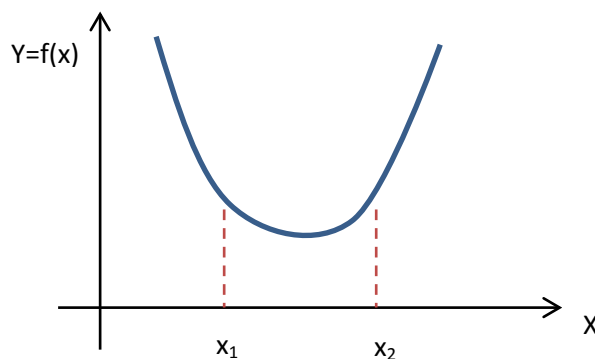
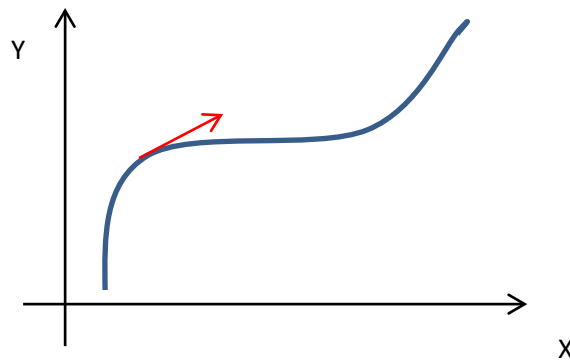
شرایط لازم و کافی نقاط اکسترمم

در این قسمت شرط لازم و کافی را برای اینکه نقطه ای مانند x نقطه ی اکسترمم تابع $f(x)$ باشد که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ به دست می آوریم. در تمامی این قسمت فرض بر آن است که مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم تابع $f(x)$ در حوضه ی تعریف f موجود و پیوسته باشد. قضیه. (شرط لازم و بهینگی). شرط لازم برای آنکه نقطه ی x یک نقطه اکسترمم $f(x)$ باشد، آن است که :

$$\nabla f(x^0) = 0$$

این شرایط برای نقاط عطف (بازگشتی) و نقاط زین اسبی منحنی ها نیز برقرار است. در نتیجه این شرایط لازم است، اما تشخیص این نقاط لازم نمی باشد. بنابراین مناسب است که جوابهای معادله ی بالا را نقاط پایداری¹ (نقاط ساکن) بنامیم.

$$Df(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h\delta) - f(x)}{h}$$



تابع محدب

¹ Stationary Points

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \nabla f(x_1)(x_2 - x_1)^2 \text{ اگر فقط اگر}$$

اگر $f(x)$ ، دوبار مشتق پذیر باشد :

$$\nabla^2 f(x) = PSD \quad x \in S \text{ اگر فقط اگر}$$

$$\nabla^2 f(x) = PD \quad x \in S \text{ اگر فقط اگر}$$

$\nabla^2 f(x)$ ماتریس هسین

ماتریس H_x را ماتریس هسین تابع $f(x_1, x_2, x_3)$ (یا ماتریس مشتق دوم) می نامیم و آن را به صورت زیر می نویسیم :

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

قضیه. شرط کافی بهینگی

شرط کافی برای آنکه نقطه ی پایداری x یک نقطه ی اکسترمم تابع $f(x)$ باشد آن است که ماتریس هسین محاسبه شده در x به صورت زیر باشد :

(1) ماتریس H_x در نقطه ی x نیمه معین منفی باشد، نقطه ی x یک نقطه ی ماکزیمم موضعی است.

(2) ماتریس H_x در نقطه ی x نیمه معین مثبت باشد، نقطه ی x یک نقطه ی می نیموم موضعی است.

تعیین نوع تابع به کمک ماتریس هسین

نوع $f(x)$ تحدب	نوع H
محدب	نیمه معین PSD
محدب اکید	معین مثبت PD
مقعر	نیمه معین منفی NSD
مقعر اکید	معین منفی ND
نقطه زینی	غیر معین ID

مراحل تشخیص نوع ماتریس هسین

شرط لازم

(1) $H=PD$ or PSD اگر تمام درایه های قطری ماتریس هسین مثبت و یا صفر باشند.

(2) $H=ND$ or NSD اگر تمام درایه های قطری ماتریس هسین منفی و یا صفر باشند.

تذکر: البته قابل ذکر است که تمام درایه ها نمی توانند صفر باشند.

شرط کافی

(1) $H=PD$ ، اگر دترمینان زیر ماتریس ها (مینورها) همگی اعداد مثبت باشند.

(2) $H=PSD$ ، اگر دترمینان زیر ماتریس ها همگی اعداد مثبت یا صفر باشند.

(3) $H=ND$ ، اگر دترمینان زیر ماتریس ها همگی به ترتیب مثبت و منفی باشند.

(4) $H=NSD$ ، اگر دترمینان زیر ماتریس ها همگی به ترتیب مثبت و منفی باشند و برخی از مثبت ها صفر باشند.

تذکر: اگر شرط لازم برقرار نباشد ماتریس هسین غیر معین (ID) می باشد.

مثال / نوع ماتریس های هسین زیر را تعیین کنید.

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Det}(HM_1) > 0 \quad \text{Det}(HM_2) > 0 \longrightarrow PD$$

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow H = -\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow NSD$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow ID$$

مثال / شرایط بهینگی در تابع دو متغیره زیر بر حسب α بررسی کنید.

$$\text{Min } f(x) = x_1^3 - 3\alpha x_1 x_2 + x_2^3$$

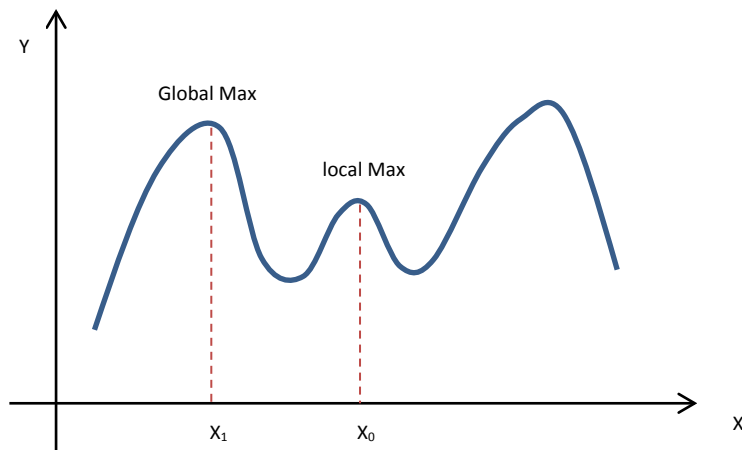
حل /

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 3\alpha x_2 \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} = 6x_1 \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} = 6x_2 \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 3x_2^2 - 3\alpha x_1$$

$$H = \begin{bmatrix} 6x_1 & -3\alpha \\ -3\alpha & 6x_2 \end{bmatrix} \quad 6x_1 = 0 \longrightarrow x_1 = 0, \alpha = 0 \quad 36x_1 x_2 - 9\alpha^2 = 0 \longrightarrow 4x_1 x_2 = \alpha^2, x_1, x_2 = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} 6\alpha & -3\alpha \\ -3\alpha & 6\alpha \end{bmatrix} \longrightarrow H = \begin{bmatrix} 0 & -3\alpha \\ -3\alpha & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow H \text{ is ID}$$

$$H = \begin{bmatrix} 6\alpha & -3\alpha \\ -3\alpha & 6\alpha \end{bmatrix} \text{ if } \alpha \geq 0 \longrightarrow PSD, PD \quad , \quad \text{if } \alpha \leq 0 \longrightarrow NSD, ND$$



شرایط بهینگی در مسائل بدون محدودیت

$$\nabla f(x) = 0: \text{ شرط لازم}$$

شرط کافی: تابع $f(x)$ محدب باشد.

- اگر تابع $f(x)$ محدب باشد، X^* بهینه موضعی (محلی)

- اگر تابع $f(x)$ محدب اکید باشد، X^* بهینه کلی (جهانی)

ماکزیمم و می نیمم مسائل محدودیت دار

روش لاگرانژ

این روش فقط زمانی قابل استفاده می باشد که تمام محدودیت ها به فرم تساوی باشند و حتی محدودیت های نامنفی بودن متغیرها هم در آن وجود نداشته باشد. مساله را در حالت کلی به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\max \text{ or } \min f(x_1, \dots, x_n)$$

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

ابتدا تابع لاگرانژ را تشکیل می دهیم:

$$L(x, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

تابع L را تابع لاگرانژ و λ_i ها را ضرایب لاگرانژ می نامیم. حال شرایط لازم بهینگی را برای تابع لاگرانژ می نویسیم:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

از این دو تابع، لاگرانژ را مستقیما می توان برای بدست آوردن شرایط لازم نقاط پایداری به کار برد. این بدان معنی است که بهینه بودن تابع $f(x_1, x_2, x_3)$ مشروط بر قیدهای تساوی $g(x_1, \dots, x_n)$ معادل بهینه سازی تابع لاگرانژ $L(x, y)$ می باشد.

شرایط کافی برای روش لاگرانژ را بدون اثبات به صورت زیر بیان می کنیم :

$$H^B = \left[\begin{array}{c|c} O & P \\ \hline P^t & Q \end{array} \right]$$

$$P = \begin{bmatrix} \nabla g_1(x) \\ \vdots \\ \nabla g_m(x) \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$Q = \left[\frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{n \times n}$$

ماتریس H^B را ماتریس هسین وسعت یافته می نامیم.

نقطه ی پایداری (x, λ) برای تابع لاگرانژ $L(x, \lambda)$ داده شده و ماتریس هسین وسعت یافته H^B در نقطه ی (x, λ) محاسبه شده است. آنگاه x :

1) یک نقطه ماکزیمم است، اگر با دترمینان اصلی از مرتبه ی $(2m+1)$ شروع کرده و $(n-m)$ زیر دترمینان های اصلی از H^B اولی دارای علامت $(-1)^{m+1}$ و بقیه علامت تناوبی داشته باشند.

2) یک نقطه می نیمم است، اگر با زیر دترمینان اصلی از مرتبه ی $(2m+1)$ و آخرین $(n-m)$ زیر دترمینان های اصلی از H^B دارای علامت $(-1)^m$ باشد.

این شرایط برای تشخیص نقطه ی بهینگی کافی هستند ولی لازم نمی باشند. به عبارت دیگر، یک نقطه ی پایداری ممکن است یک نقطه ی ماکزیمم یا می نیمم باشد بدون اینکه در این شرایط صدق کند.

مثال/ مساله زیر را با تابع هدف $f(x)$ را در نظر بگیرید :

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$s.t \quad x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

که در این حات محدودیت ها و تابع لاگرانژ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$g_1(x) = x_1 + x_2 + 3x_3 - 2$$

$$g_2(x) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5$$

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda_1(x_1 + x_2 + 3x_3 - 2) - \lambda_2(5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - 5\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(x_1 + x_2 + 3x_3 - 2) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5) = 0$$

دستگاه 5 معادله 5 مجهول فوق را باید حل کنیم. جواب آن برابر است با :

$$(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0) = (0.18, 0.35, 0.28, 0.0867, 0.3067)$$

این نقطه، نقطه ی پایداری مساله می باشد. برای آنکه وضعیت نقطه مشخص شود، شرط کافی آن را امتحان می کنیم.

$$P = \begin{bmatrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad P^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$H^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

چون تعداد متغیرها $n=3$ و تعداد محدودیت ها $m=2$ می باشد پس $2m + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$ یعنی باید از زیر ماتریس اصلی 5×5 آن شروع به محاسبه دترمینان کنیم که همان ماتریس H^B می شود و چون $n-m=1$ پس باید فقط علامت دترمینان ماتریس H^B را در نظر بگیریم.

$$\det(H^B) = 460 > 0$$

چون علامت دترمینان آن با $(-1)^2$ برابر است و m هم برابر 2 می باشد. بنابراین این نقطه، می نیمم تابع می باشد.

روش کاروش - کاهن - تاکر (K.K.T)

این روش برای مسائلی استفاده می شود که محدودیت های آن نامساوی هم می باشند. پس این روش یک روش کامل تر و کلی تر از روش لاگرانژ است. تعمیم این روش به منظور تعیین نقاط پایداری مساله شرایط لازم می باشد و تحت محدودیتی خاص (تحدب و تقعر تابع هدف) همان شرایط لازم، شرایط کافی هم خواهند بود.

به عنوان مثال مسئله ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max f(x)$$

$$g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

که در آن فرض نامنفی بودن متغیرها هم در m محدودیت مساله قرار دارد. به عنوان مثال اگر شرط $x_i \geq 0$ وجود داشته باشد آن را به صورت $-x_i \leq 0$ تبدیل کرده ایم.

شرایط کاروش- کاهن- تاکر که شرایط لازم بهینگی می باشند به صورت زیر می باشند :

$$1) \nabla f(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x)$$

$$2) \lambda_i g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$3) g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$4) \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

توجه داشته باشید که λ_i ها یعنی ضرایب لاگرانژ، همان قیمت های سایه در برنامه ریزی خطی می باشند. علامت λ_i ها و یا نامقید بودن آنها بستگی به تابع هدف (ماکزیمم یا می نیمم بودن آن) و جهت محدودیت ها دارد. به عنوان مثال اگر تابع هدف می نیمم باشد و محدودیت $g_k(x) \leq 0$ باشد انگاه $\lambda_k \leq 0$ می باشد و اگر محدودیت K ام $g_k(x) = 0$ باشد λ_k نامقید خواهد بود.

مثال / تهیه ی نقطه ی بهینه شرایط $k-T$ برای تابع $f(x)$.

$$\text{Min } f(x) = (x - 1)^2$$

$$s. t \quad g_1(x) = x \geq 0.5$$

حل /

$$-x \leq -0.5 \quad 0.5 - x \leq 0$$

$$2) \lambda_1(0.5 - x) = 0 \quad 3) \lambda_1 \leq 0 \longrightarrow x = 0.5 \text{ یا } \lambda_1 = 0$$

$$4) 2(x - 1) + \lambda_1(-1) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 2(x - 1) \longrightarrow x = 0.5 \text{ غ. ق. ق.}$$

$$1) x^* = 1 \quad f^*(x^* = 1) = 0$$

مثال /

$$\text{Min } Z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$g_1(x) = 2x_1 + x_2 - 5 \leq 0$$

$$g_2(x) = x_1 + x_3 - 2 \leq 0$$

$$g_3(x) = -x_1 + 1 \leq 0$$

$$g_4(x) = -x_2 + 2 \leq 0$$

$$g_5(x) = -x_3 \leq 0$$

حل/

$$\lambda_1(2x_1 + x_2 - 5) = 0 \quad \lambda_2(x_1 + x_3 - 2) = 0$$

$$\lambda_3(-x_1 + 1) = 0 \quad \lambda_4(-x_2 + 2) = 0 \quad \lambda_4(-x_3) = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = 0, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 4$$

روش گرادیان

در این بخش روشی را برای پیدا کردن بهینگی تابعی که دوبار مشتق پذیر و پیوسته می باشد بیان می کنیم. این روش نقاطی را تولید می کند که با شروع از یک نقطه ی اولیه و حرکت در جهت بیشترین افزایش تابع برای بهبود مقدار آن می باشد. (برای حداقل سازی در جهت بیشترین کاهش تابع حرکت می کند.) این روش را روش پر شیب ترین قدم هم می نامیم.

شرط توقف این روش، نقطه ای می باشد که $\nabla f(x^k) = 0$ شود، یعنی شرط لازم بهینگی برقرار شود. پس قبل از شروع با این روش ابتدا باید اطمینان حاصل کنیم که تابع محدب یا مقعر می باشد.

فرض کنید که بخواهیم تابع $f(x)$ را ماکزیم کنیم و x^0 نقطه ی شروع باشد این روش از این نقطه شروع می کند و $\nabla f(x^k)$ را به عنوان گرادیان تابع در نقطه ی x^k ام یعنی x^k تعریف می کند. ایده عبارتست از تعیین نمودن طول گام P به طوری که $\frac{\partial f}{\partial P_k}$ در نقطه ی مورد نظر تابع هدف حداکثر گردد. این نتیجه در صورتی به دست می آید که نقاط متوالی x^k و x^{k+1} به صورت زیر انتخاب گردد :

$$x^{k+1} = x^k + r \nabla f(x^k) \quad , \quad r \geq 0$$

که r پارامتری است که طول گام بهینه نامیده می شود. پارامتر r به طوری تعیین می گردد که x^{k+1} بیشترین مقدار افزایش را به تابع بدهد. به عبارت دیگر اگر تابع $h(r)$ را به صورت زیر تعریف کنیم :

$$h(r) = f(x^k + r \nabla f(x^k))$$

r مقداری است که $h(r)$ را حداکثر می کند.

روش فوق هنگامی خاتمه میابد که دو نقطه ی متوالی x^k و x^{k+1} تقریباً مساوی باشند و این معادل آن است که :

$$r \nabla f(x^k) \approx 0$$

با فرض آنکه $r \neq 0$ ، که این فرض همواره برقرار است مگر آنکه x^k جواب بهینه باشد، که این معادل است با شرط لازم بهینگی یعنی :

$$\nabla f(x^k) = 0$$

مثال / با استفاده از روش گرادیان ونقطه آغازین (0 و 1) مقدار $\min$ تابع $f(x)=3x^2+y^2-2xy$ را بدست بیاورید.

$$\nabla f(x) = (6x - 2y, 2y - 2x)$$

$$\nabla f(x) = (6, -2)$$

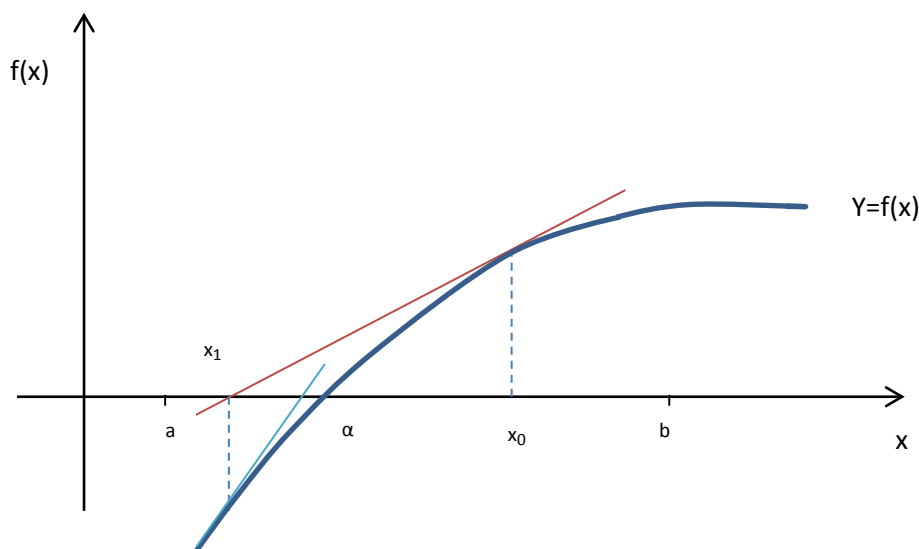
$$x_1 = (1, 0) - \alpha (6, -2) = (1 - 6\alpha, 2\alpha)$$

$$f(x) = 3(1 - 6\alpha)^2 + 4\alpha^2 - 2(1 - 6\alpha)(2\alpha) \longrightarrow f'(x) = 0 \longrightarrow \alpha = \frac{5}{34}$$

$$x_1 = (1 - \frac{5}{34}, 2\frac{5}{34}), \quad x_1(\frac{4}{34}, \frac{10}{34})$$

روش نیوتن - رافسون

روش نیوتن رافسون یک روش عددی جهت پیدا کردن جواب معادله $f(x)=0$ می باشد که ایده ی کلی آن در شکل زیر موجود می باشد. ابتدا اطمینان حاصل می کنیم که تابع $f(x)$ در بازه ی $[a, b]$ فقط یک ریشه دارد. حال نقطه ی x_0 را به طور دلخواه در بازه ی $[a, b]$ انتخاب می کنیم. سپس مماس بر $f(x)$ را در نقطه ی x_0 رسم می کنیم. این مماس محور x ها را در نقطه ی x_1 قطع می کند. حال مماس بر تابع در نقطه ی x_1 را رسم می کنیم این کار را تا به دست آوردن تقریب خوبی از α ریشه $f(x)=0$ انجام می دهیم.



برای بدست آوردن معادله خطی که در نقطه ی x_k بر تابع مماس می باشد و محور x ها را در نقطه ی x_{k+1} قطع می کند به صورت زیر عمل می کنیم :

$$(y - f(x_k)) = f'(x_k)(x - x_k)$$

نقطه ی $(x_{k+1}, 0)$ را در معادله ی خط قرار می دهیم :

$$0 - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k)$$

که داریم :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

همگرایی این روش تضمین شده نمی باشد زیرا ممکن است در رابطه ی بالا $f'(x_k) = 0$ یعنی خط مماس در نقطه ی x_k بر تابع $f(x)$ موازی محور x ها باشد و آنگاه محور x ها را قطع نمی کند. که این موضوع را می توان با تغییر متغیر نقطه ی x_0 اولیه برطرف کرد.

قضیه. شرط کافی همگرایی روش نیوتن آن است که :

$$\left| \frac{f''(x)f(x)}{f'(x)^2} \right| < 1 \quad \forall x \in [a, b]$$

از این روش می توان برای پیدا کردن هر تابع یک متغیره استفاده کرد که به طور خاص در پیدا کردن نقطه ای که شرط لازم بهینگی را دارد استفاده کرد. حال فرمول نهایی برای پیدا کردن ریشه ی تابع عبارت است از :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

برای بدست آوردن نقطه ی پایداری تابعی چند متغیره بنام $f(x)$ داریم :

$$\nabla f(x) = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x))$$

اگر $\nabla h(x^k) = B_k$ بگیریم اگر $|B_k| \neq 0$ باشد آنگاه می توانیم داشته باشیم :

$$h(x) = x_k - B_k^{-1} A_k$$

مثال / min تابع $f(x) = e^{-x} + \frac{x}{10}$ را به کمک روش نیوتن در نقطه آغازین صفر بدست آورید.

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 0 - \frac{-e^{-x} + \frac{1}{10}}{e^{-x}} = -\frac{-0.09}{1} = 0.09$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_2)} = 1.65$$

⋮

$$x^* = 2.3$$

تئوری بازیها

در بازی های مجموع صفر^۲، دو بازیکن A و B وجود دارند به طوریکه این دو بازیکن رقیب یکدیگر می باشند و کاملاً باهوش و به کار خود مسلط هستند. ماتریس A با مولفه های a_{ij} ($i=1, \dots, m$ & $j=1, \dots, n$) را ماتریس بازده یا بده-بستان (pay-off) می نامیم که به صورت مثال نمایش داده می شود.

		B	
		$H(\frac{1}{2})$	$T(\frac{1}{2})$
A	$H(\frac{1}{2})$	1	-1
	$T(\frac{1}{2})$	-1	1

دریافتی A اگر B با استراتژی $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ بازی کند :

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1)) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(1)) = 0 \quad \text{ارزش بازی}$$

اگر بازیکن A استراتژی i را انتخاب کند و بازیکن B هم استراتژی j را انتخاب کند آنگاه a_{ij} ارزش (مبلغ) بازی خواهد بود. همواره فرض بر این است که بازیکن A می برد و بازیکن B می بازدهد. حال اگر $a_{ij} \geq 0$ باشد، بازیکن A برده و بازیکن B باخته است و اگر $a_{ij} \leq 0$ باشد یعنی بازیکن B برده و بازیکن A باخته است.

بازی با استراتژی های مختلط

جدول بازده زیر را در نظر بگیرید :

		B			
		1	2	3	4
A	1	1	2	-3	7
	2	2	5	4	-6

محاسبه ارزش بازی برای بازیکن A : $\text{Max}(\min) = -3$

محاسبه ارزش بازی برای بازیکن B : $\text{Min}(\max) = 2$

پس : $\min\{\max(a_{ij})\} \neq \max\{\min(a_{ij})\}$

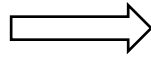
یعنی مساله نقطه زینی ندارد.

² Two-Person Zero-Sum Games

حل هندسی بازی های $(m \times 2)(2 \times n)$

برای تشریح این روش باید در نظر داشته باشیم که یا بازیکن A باید دارای 2 استراتژی باشد و یا بازیکن B دارای 3 استراتژی باشد و فرض کنید جدول بالا جدول بازده مساله باشد:

$$\text{ارزش بازی} \begin{cases} A: -3 \\ B: 2 \end{cases}$$

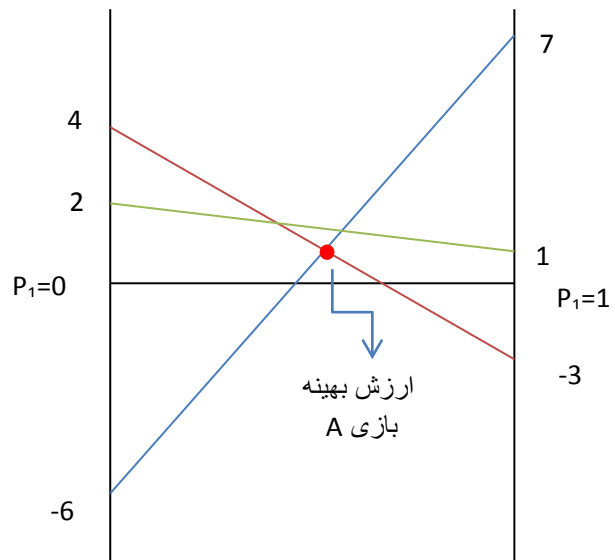


$$-3 \leq \text{ارزش بازی} \leq 2$$

$$Eb_1(A) = 1P_1 + 2P_2$$

$$Eb_3(A) = -3P_1 + 4P_2$$

$$Eb_4(A) = 7P_1 - 6P_2$$



حل بازی های $(m \times n)$ با برنامه ریزی خطی

B

X: استراتژی A

A

3	7
4	1
8	0

$$\left[\begin{array}{l} \sum x_i = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 \geq V \\ 7x_1 + x_2 \geq V \end{array} \right] \xrightarrow{\div V} \left[\begin{array}{l} \frac{x_1}{V} + \frac{x_2}{V} + \frac{x_3}{V} = \frac{1}{V} \\ \frac{3}{V}x_1 + \frac{4}{V}x_2 + \frac{8}{V}x_3 \geq 1 \\ \frac{7}{V}x_1 + \frac{x_2}{V} \geq 1 \end{array} \right]$$

$$y_i \sim \frac{x_i}{v} \longrightarrow \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 8y_3 \geq 1 \\ 7y_1 + y_2 \geq 1 \end{cases}$$

$$MIN Z = y_1 + y_2 + y_3$$

برنامه ریزی خطی ، نشان دهنده میزان دریافتی بازیکن A.