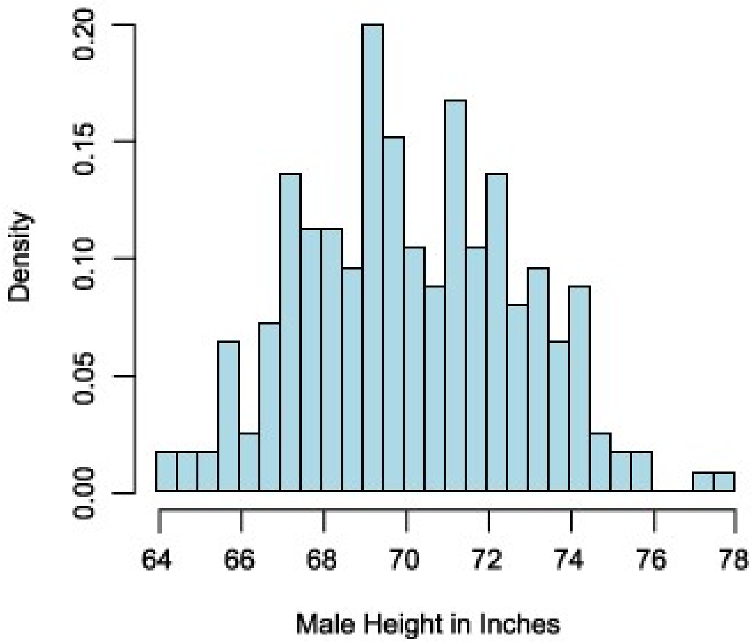
توزیع های احتمالی



توزیع برنولی

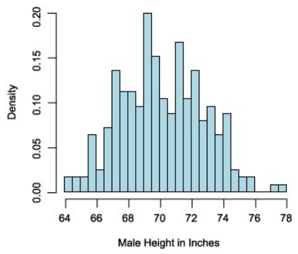
ویژگی ها :

۱- آزمایش فقط یک بار صورت می گیرد

۲- فقط دو پیامد ممکن دارد

۳- احتمال موفقیت و شکست ثابت است (البته در صورت تکرار آزمایش)

۴- آزمایش ها مستقل از یکدیگر انجام می شوند

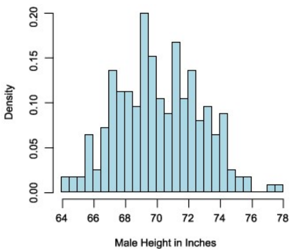


مفاهیم p و q درتوزیع برنولی

- $\mathcal{P}$ یعنی احتمال موفقیت (احتمال وقوع پیشامد مورد نظر)

- q یعنی احتمال شکست (احتمال عدم وقوع پیشامد مورد نظر)

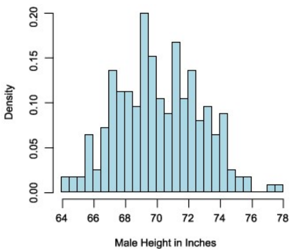
p و q مکمل یکدیگر هستند



$$P(x) = p^x(1 - p)^{1-x} \quad \text{where } x = 0 \text{ or } 1$$

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = pq$$



توزیع دو جمله ای

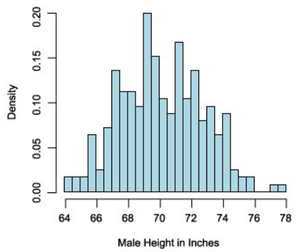
ویژگیها:

۱- تکرار آزمایش (n بار)

۲- هر آزمایشی فقط دو پیامد دارد

۳- ثابت بودن p و q در هر آزمایش

۴- مستقل بودن آزمایش ها از همدیگر



فرمول توزیع دو جمله ای

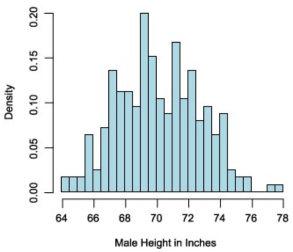
$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x}$$

$$x = 0,1,2,\ldots,n$$

میانگین و واریانس توزیع دو جمله ای

$$1\text{-}\ \ E(X) = np$$

$$2\text{-}\ \ V(X) = npq$$



n و p و q پارامترهای توزیع دو جمله ای هستند

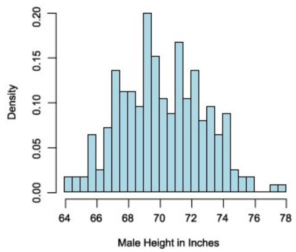
اجزاء تشکیل دهنده توزیع دو جمله ای

تعداد آزمایش ها = n

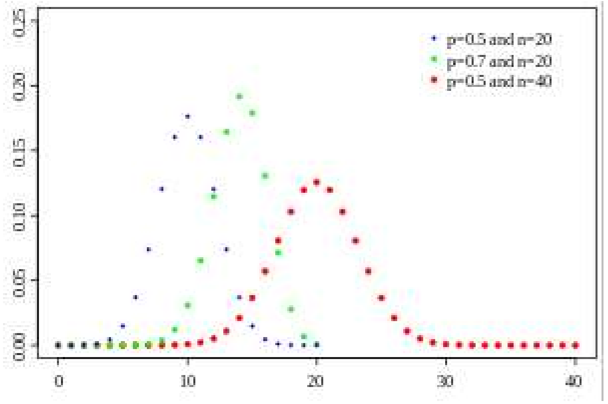
تعداد موفقیت های مورد نظر = x

احتمال موفقیت در هر آزمایش = p

احتمال شکست در هر آزمایش = q



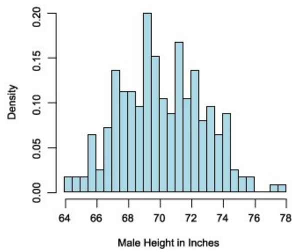
مقدار p و نوع توزیع



۱- اگر $p = 0/5$ باشد ، توزیع متقارن

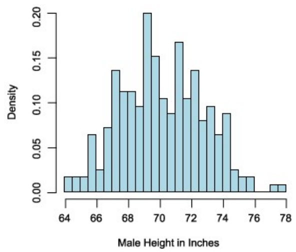
۲- اگر $p > 0/5$ باشد ، توزیع چوله به چپ

۳- و اگر $p < 0/5$ باشد ، توزیع چوله به راست است



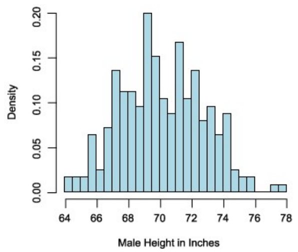
جداول توزیع دو جمله ای

وقتی که n نسبتاً بزرگ است ، محاسبه احتمال از طریق فرمول کار خسته کننده ای می شود ، لذا برای رفع این مشکل از جدول های مخصوصی استفاده می شود



توزیع پواسون

متغیر هایی که بیانگر تعداد برآمدها در واحد زمان،طول، مساحت یا حجم باشند.

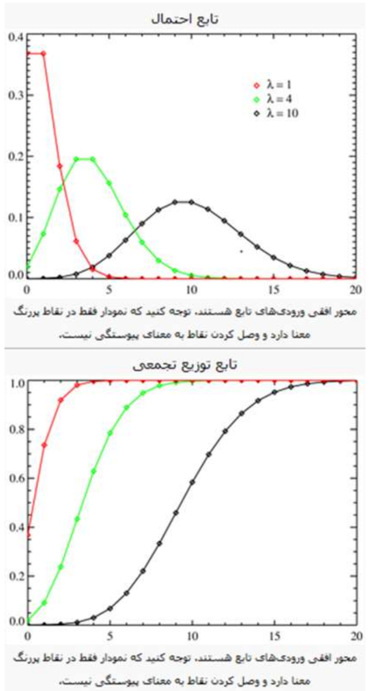


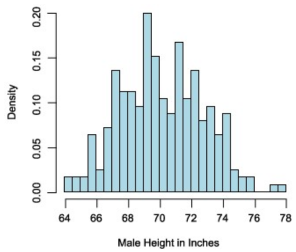
فرمول توزیع پواسون

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x}}{x!},x=0,1,2,...$$

$\lambda = np$ بعنوان پارامتر توزیع

$e \cong 2/718$ و



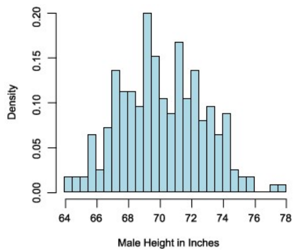


امید ریاضی و واریانس توزیع پواسون

از بین کلیه توزیع های رایج ، توزیع پواسون تنها توزیعی است که میانگین و واریانس آن با هم برابرند

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

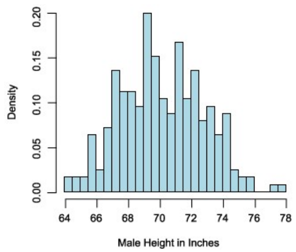


کاربردهای توزیع پواسون

۱- بعنوان تقریب یا برآورد کننده میزان احتمال توزیع های دو جمله ای تحت شرایط خاص

اگر n به سمت بی نهایت و p به سمت صفر میل کند و در عین حال مقدار np ثابت بماند ، می توان بجای توزیع دو جمله ای از توزیع پواسون استفاده نمود

۲- محاسبه احتمالات مربوط به تعداد مراجعات به سیستم با میانگین λ در واحد زمان (t)

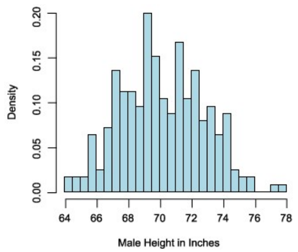


توزیع پواسون برای تعداد مراجعات

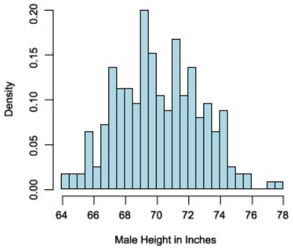
$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$$ فرمول

$$x = 0,1,2,\ldots$$

$\lambda t =$ میانگین مراجعات در واحد زمانی معین

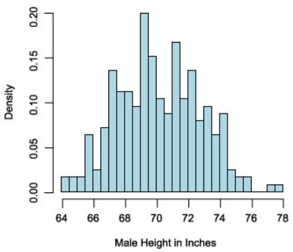


توابع احتمال پیوسته



احتمال در توابع پیوسته

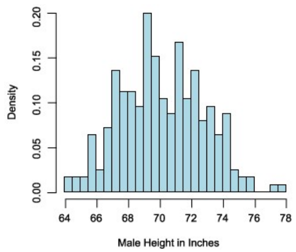
بخاطر این که میزان احتمال در توابع پیوسته در یک نقطه معین مساوی صفر است ، لذا در این گونه توابع ، احتمال همیشه در قالب یک فاصله تعیین می شود



تابع چگالی احتمال

احتمال این که متغیر تصادفی پیوسته x مقداری بین دو نقطه a و b را بگیرد برابر است با

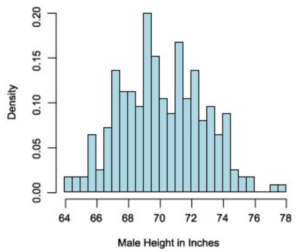
$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(X)\,dx$$



نقش علامت مساوی در احتمالات پیوسته

$$P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < x \le b) = P(a \le X \le b)$$

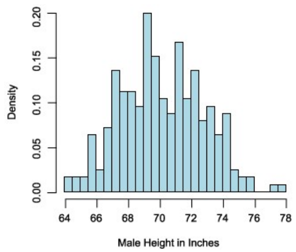
پس علامت مساوی در این توزیع ها نقشی ایفاء نمی کند



امید ریاضی متغیر تصادفی پیوسته

یعنی ضرب متغیر تصادفی در تابع چگالی خود و سپس انتگرال گیری به ازای مقادیر ممکن متغیر

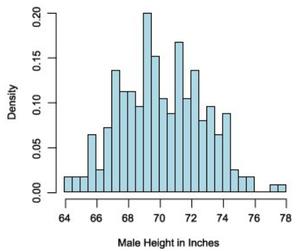
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} X \cdot f(X)\,dx$$



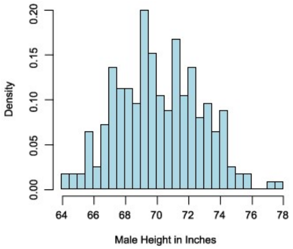
واریانس متغیر تصادفی پیوسته

یعنی کسر متغیر تصادفی از میانگین خود ، به توان ۲ رساندن نتیجه و ضرب نتیجه حاصله به تابع چگالی و انتگرال گیری

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[X - E(X) \right]^2 f(x) dx$$



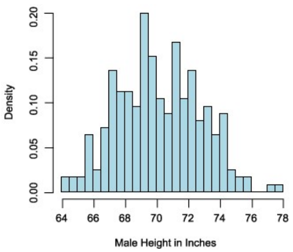
توزیع نرمال

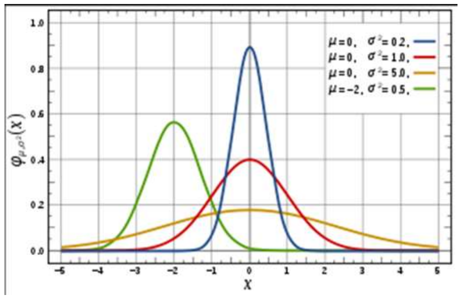

Density
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
64
66
68
70
72
74
76
78
Male Height in Inches

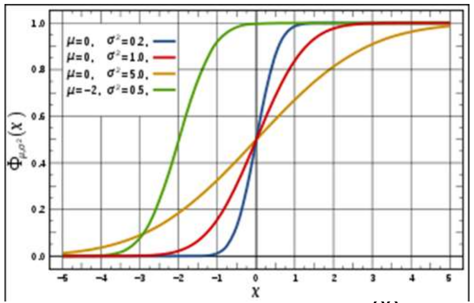
تعریف توزیع نرمال

متغیر تصادفی پیوسته X در صورت داشتن تابع چگالی زیر دارای توزیع نرمال است

$$f(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^{2}}}e^{-\frac{1}{2}\left[(X-\mu)/\delta\right]^{2}}$$



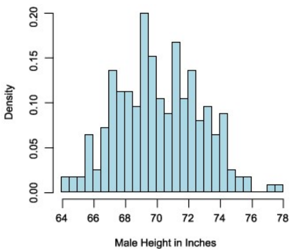




پارامترهای توزیع نرمال

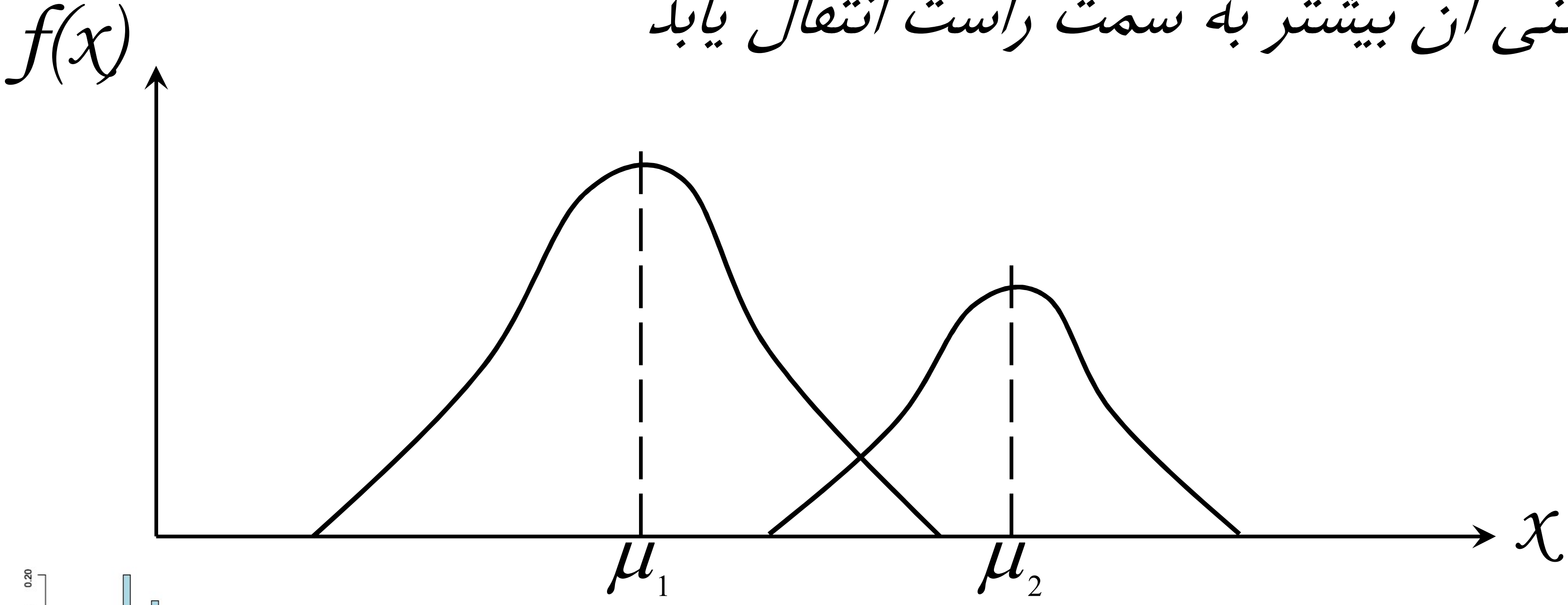
$$X \sim \mathcal{N}(\mu , \sigma)$$

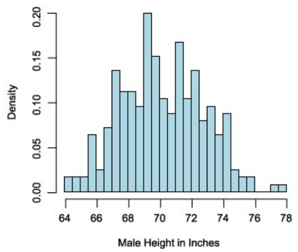
μ (میانگین) و σ (انحراف معیار) دو پارامتر توزیع نرمال بوده و با مشخص بودن آنها ، منحنی توزیع قابل ترسیم می باشد



نقش میانگین در منحنی توزیع نرمال

در یک توزیع نرمال هر قدر میانگین افزایش یابد ، باعث می شود که منحنی آن بیشتر به سمت راست انتقال یابد



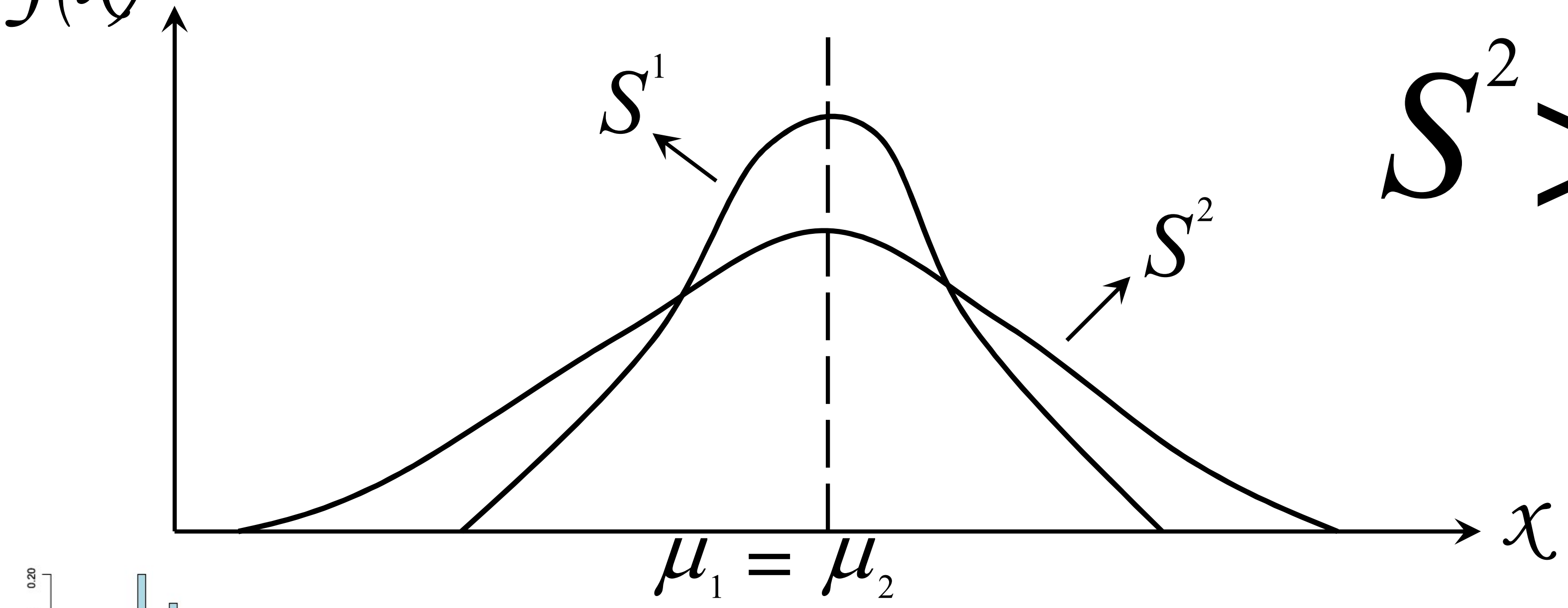


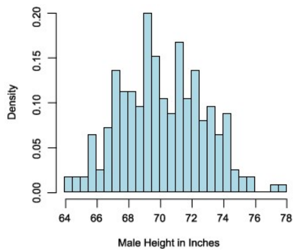
$$\mu_2 > \mu_1$$

نقش انحراف معیار در توزیع نرمال

هر قدر انحراف معیار افزایش یابد ، منحنی توزیع نرمال کوتاه تر (بعبارتی پهن تر) می شود

$$S^2 > S^1$$





خصوصیات توزیع نرمال

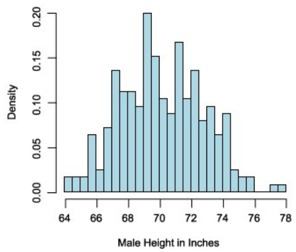
۱- سطح زیر منحنی همیشه برابر یک است

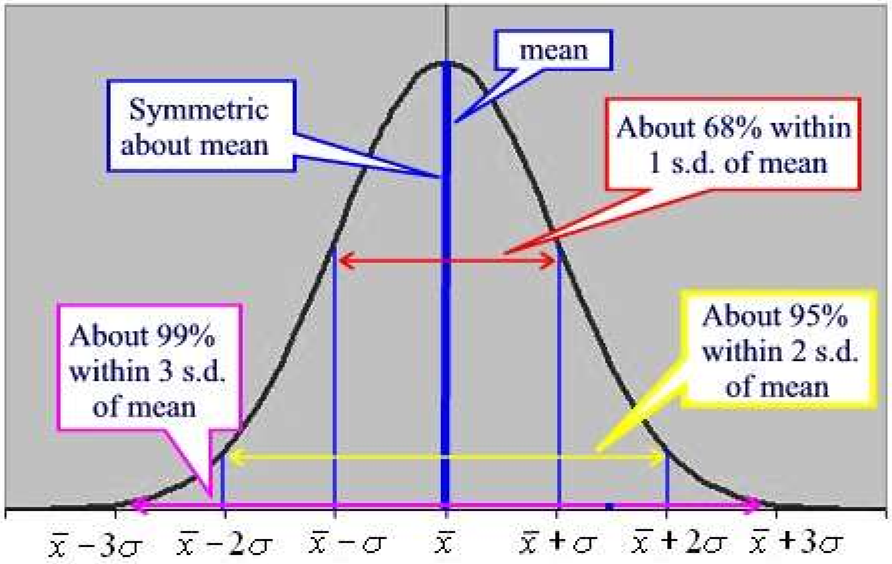
۲- $f(x)$ همیشه بزرگتر یا مساوی صفر است

۳- حداکثر مقدار تابع در $X = \mu$ می باشد

۴- تابع حول میانگین ، متقارن است

۵- میانگین ، میانه و مد با هم برابرند



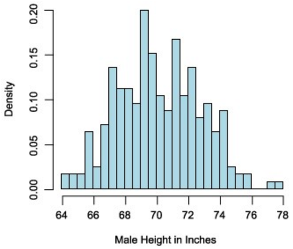


احتمال x با توجه به انحراف معیارهای مختلف بشرح ذیل است :

$$P(\mu-\sigma \le x \le \mu+\sigma) = 0/683$$

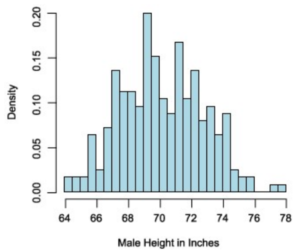
$$P(\mu-2\sigma \le x \le \mu+2\sigma) = 0/954$$

$$P(\mu-3\sigma \le x \le \mu+3\sigma) = 0/997$$



توزیع نرمال استاندارد

یعنی استاندارد کردن متغیر $X \approx \mathcal{N}(\mu , \sigma)$ با استفاده از متغیر نرمالی که میانگین آن صفر و واریانس اش یک است و سپس استفاده از جدول مربوطه

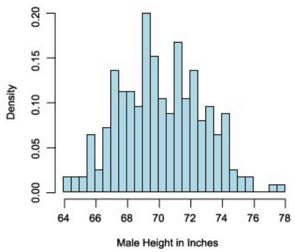


نحوه تبدیل متغیر xبه متغیر نرمال استاندارد z

با کم کردن میانگین از متغیر x و تقسیم نتیجه آن بر انحراف معیار ، z بدست می آید

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

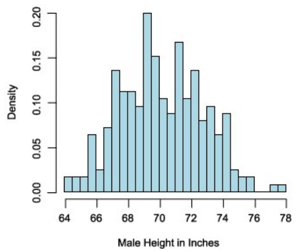
$$X = \mu + z\sigma$$

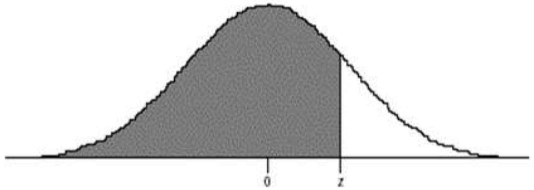


روش های استفاده از جدول توزیع نرمال استاندارد

۱- استفاده مستقیم : مقدار Z مشخص است و احتمال آن را بدست می آوریم

۲- استفاده معکوس : احتمال Z مشخص است و مقدار آن را بدست می آوریم



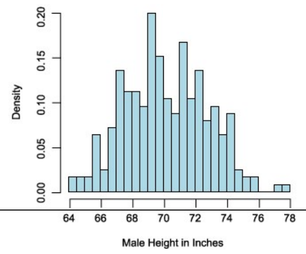


Normal Deviate z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-4.0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
-3.9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
-3.8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
-3.7	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
-3.6	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
-3.5	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483

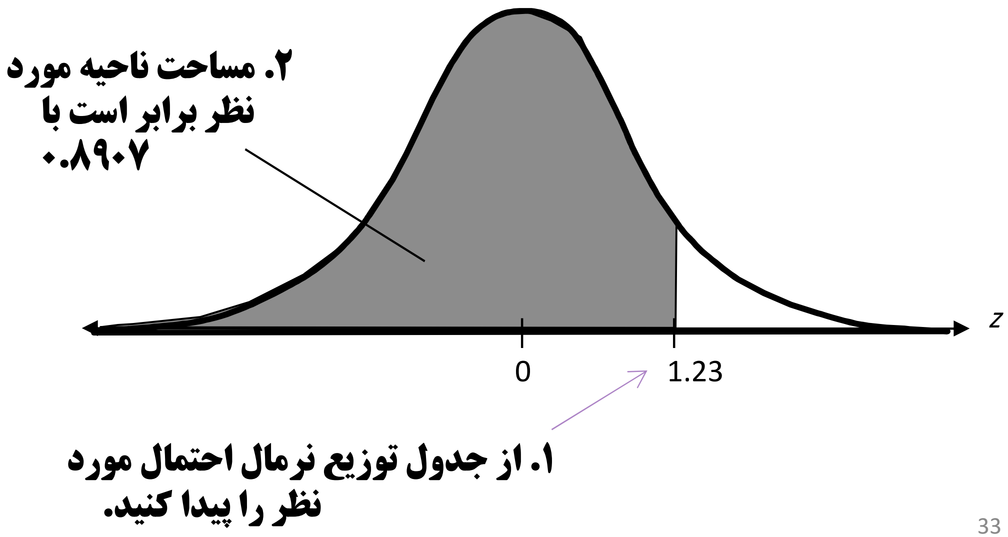
$P(z<0)=0.5$

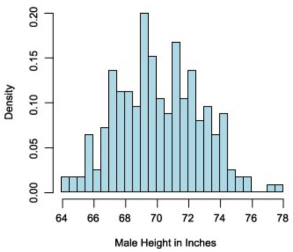
$P(z<1.02)=0.8461$

$P(z<1.96)=0.975$

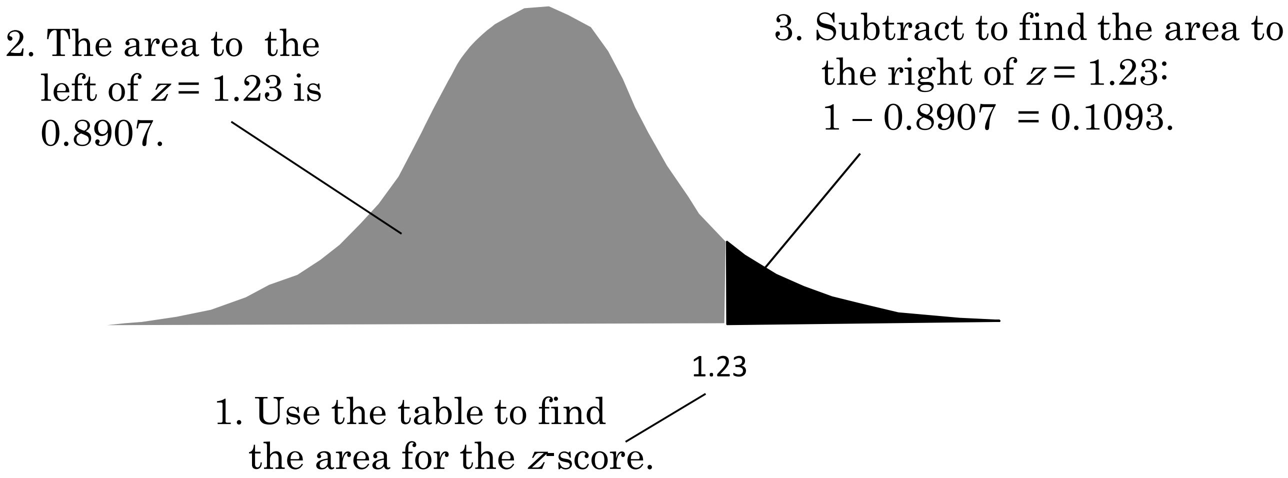


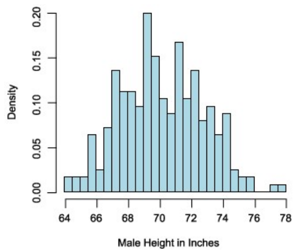
- کمتر از 1.23 باشد چقدر است؟zدر جدول توزیع نرمال احتمال اینکه



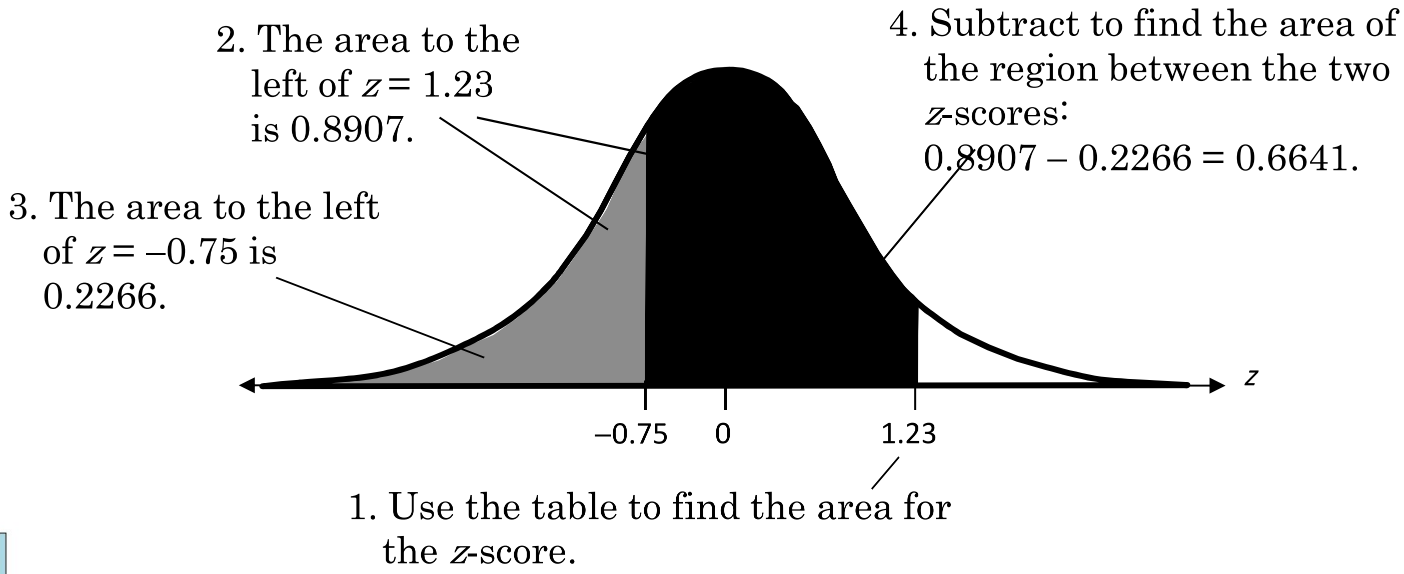


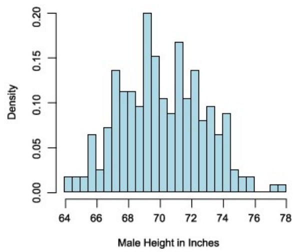
- بیشتر از 1.23 باشد چقدر است؟zدر جدول توزیع نرمال احتمال اینکه



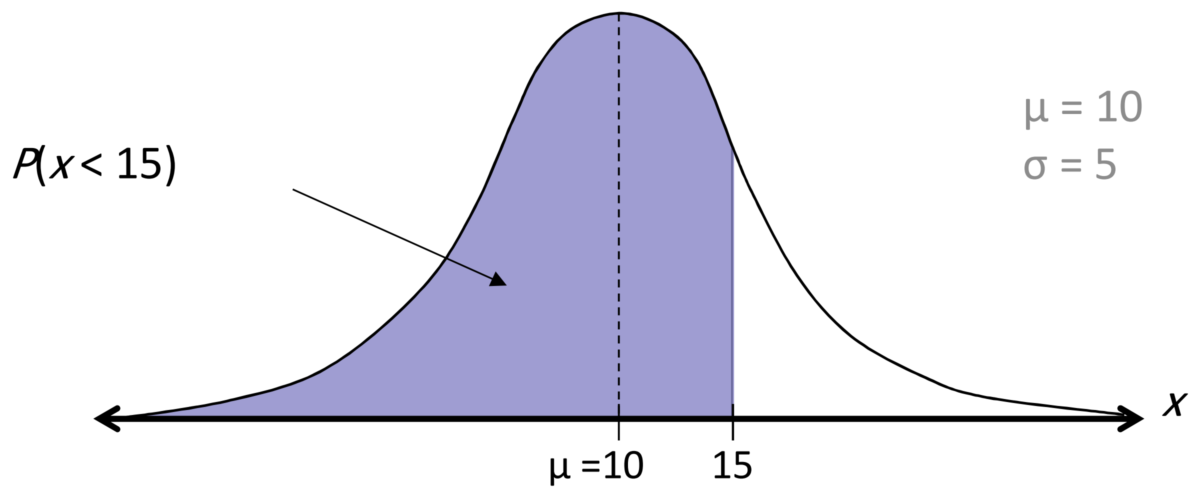


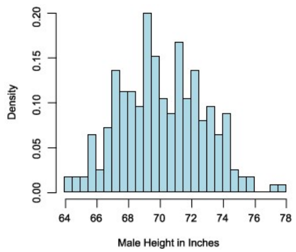
- بین 0.75 - و 1.23 باشد چقدر است؟zدر جدول توزیع نرمال احتمال اینکه





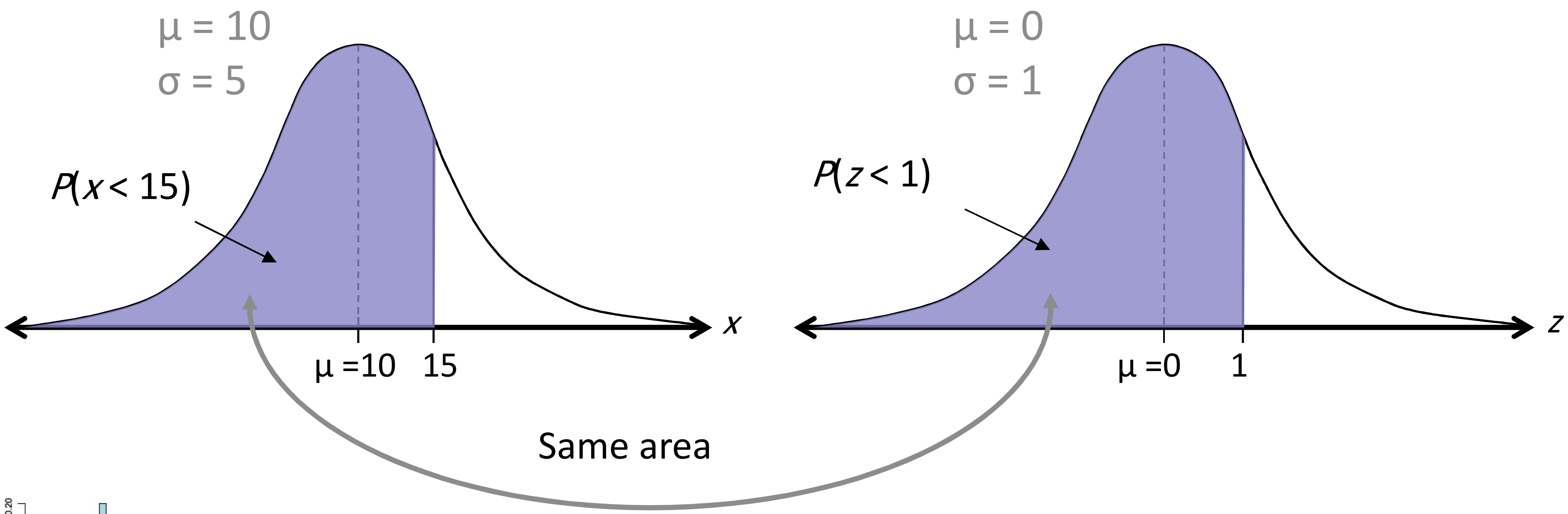
- توزیع نرمال با میانگین 10 و انحراف معیار 5 داشته باشد احتمال xاگر متغیر تصافی
کمتر از 15 باشد چقدر است؟ xاینکه

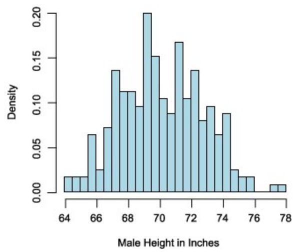




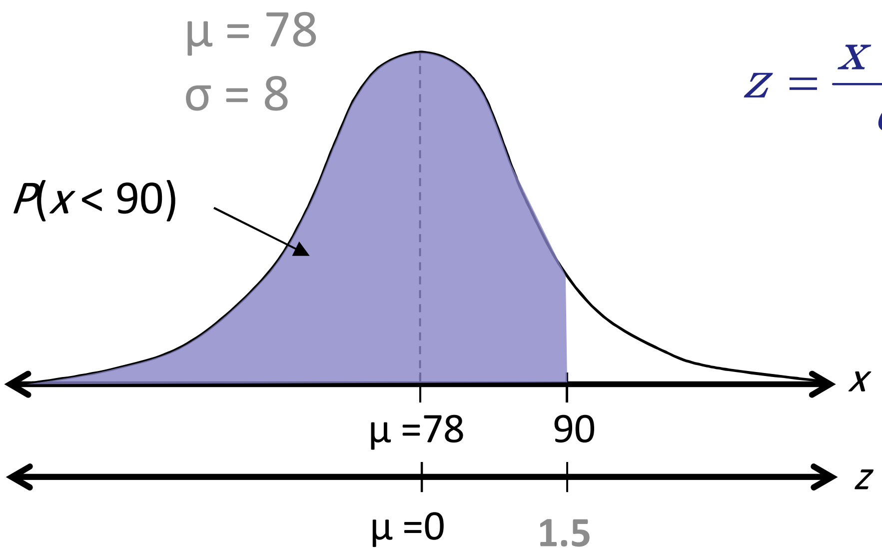
Normal Distribution

Standard Normal Distribution



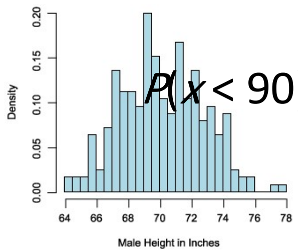


- اگر نمرات درسی با میانگین 78 و انحراف معیار 8 توزیع شده باشند احتمال اینکه نمره دانشجویی کمتر از 90 باشد چقدر است؟



$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{90 - 78}{8}$$
$$= 1.5$$

احتمال اینکه نمره دانشجویی کمتر از ۹۰ باشد ۰.۹۳۳۲ است



$P(x < 90) = P(z < 1.5) = 0.9332$

- در مثال قبل احتمال زیر را پیدا کنید

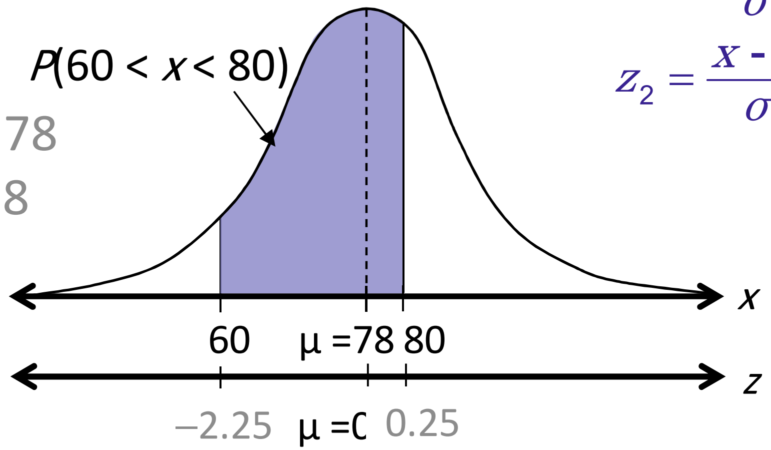
$$P(60 < x < 80)$$

$$z_1 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{60 - 78}{8} = -2.25$$

$$z_2 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{80 - 78}{8} = 0.25$$

$\mu = 78$

$\sigma = 8$



احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(60 < x < 80) = P(-2.25 < z < 0.25) = P(z < 0.25) - P(z < -2.25)$$
$$= 0.5987 - 0.0122 = 0.5865$$